Министерство образования и науки Украины

Донецкий национальный университет

А.Л. Зуев, Е.А. Буряченко

КАЧЕСТВЕННАЯ ТЕОРИЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

(Тексты лекций специального курса по дифференциальным уравнениям и уравнениям математической физики)

У т в е р ж д е н о
на заседании кафедры
Дифференциальных уравнений

Протокол № 3 от 17.10.2007 г.

Донецк – 2007

УДК 517.9

Качественная теория дифференциальных уравнений: тексты лекций специального курса по дифференциальным уравнениям и уравнениям математической физики (для студентов специальности 01.01) / А.Л. Зуев, Е.А. Буряченко. – Донецк: ДонНУ, 2007. – 50 с.

В пособии собрано тексты лекций по специальному курсу, который авторы читают на математическом факультете ДонНУ для студентов специализаций “Дифференциальные уравнения” и “Уравнения в частных производных”. Однако издание будет полезным также и для тех, кто интересуется приложениями методов нелинейного анализа, классической механикой, математической теорией устойчивости и управления.

Авторы: *А. Л. Зуев,* канд. физ.-мат. наук, с.н.с.,доц. каф. дифференциальных уравнений ДонНУ,
Е. А. Буряченко, канд. физ.-мат. наук, доц. каф. дифференциальных уравнений ДонНУ.

Отв. за выпуск: *В.Н. Тышлек*, канд. физ.-мат. наук, доц.

Содержание

Введение 4

1. Теоремы существования и общие свойства решений 5

 1.1. Свойства траекторий динамических систем 7

 1.2. Классификация траекторий по свойствам предельных множеств 9

 1.3. Выпрямляемые семейства траекторий 10

2. Устойчивость особых точек автономных систем 15

 2.1. Формулы для вычисления индекса изолированной особой точки $x = 0$ отображения $f(x)$ 16

 2.2. Метод функций Ляпунова исследования устойчивости особых точек 20

 2.3. Теоремы о неустойчивости по Ляпунову 24

 2.4. Устойчивость линейных систем 26

 2.5. Устойчивость по линейному приближению 29

 2.6. Притяжение почти всюду 31

 2.7. Системы с интегральным инвариантом 36

3. Эргодические теоремы Биркгофа 39

4. Классификация особых точек на плоскости 41

5. Приложение качественной теории дифференциальных уравнений: экологическая задача межвидового взаимодействия 44

Упражнения 46

Список рекомендованной литературы 49

Введение. Предлагаемый курс посвящен изложению классических результатов качественной теории дифференциальных уравнений. Основы этой теории были заложены работами А. Пуанкаре, А.М. Ляпунова и продолжены в исследованиях И. Бендиксона, Д. Биркгофа, И.Г. Петровского, Н.Г. Четаева, В.В. Немыцкого, В.В. Степанова и др. ученых.

В настоящем пособии освещены не только теоретические основы курса дифференциальных уравнений (теоремы существования, единственности, продолжаемости решений систем обыкновенных дифференциальных уравнений), но также, ввиду важного прикладного аспекта, изучается проблема устойчивости положения равновесия. Приведены достаточные условия устойчивости как линейных, так и нелинейных систем, введено понятие функции Ляпунова и изучена её роль в исследовании на устойчивость положения равновесия автономной системы. В издание включено также исследование фазовой плоскости линейных систем второго порядка, приводится классификация особых точек линейной системы в зависимости от значений собственных чисел матрицы этой системы.

В завершении приводятся основные понятия и утверждения эргодической теории. Особенностью изложения является включение современных результатов А. Рантцера об устойчивости почти всюду. Данный курс охватывает широкий спектр вопросов теории обыкновенных дифференциальных уравнений, связанных с использованием методов теории меры, функционального анализа, алгебры, поэтому требует соответствующей подготовки читателя. Однако авторы приводят все основные определения и указывают на литературные источники в конце каждого раздела с целью углубленного овладения материалом у заинтересованных читателей.

Многие доказательства адаптированы для лучшего понимания и простоты изложения студентам. Для сравнения возле теорем приводятся ссылки на первоисточники. Успешному овладению материала способствуют и упражнения, помещенные после изложения основной части.

Авторы надеются, что настоящее издание будет полезно и доступно для изучения всем, кто интересуется качественной теорией дифференциальных уравнений, вопросами устойчивости динамических систем, а также прикладными аспектами обыкновенных дифференциальных уравнений. Авторы выражают благодарность Жук Оксане Васильевне за техническую помощь при составлении настоящего издания.

1. Теоремы существования и общие свойства решений

Рассмотрим автономную систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t)), \tag{1}$$

где $f \in C(\overline{G})$, G - область в R^n, $x(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}$ - фазовый вектор, $f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(t) \end{pmatrix}$.

Сформулируем основные теоремы существования (теорема 1), единственности (теорема 2) и продолжаемости (теорема 3) решения задачи Коши для системы (1) [15, с. 11], [16, с. 152-174].

Теорема 1. *Пусть G - ограниченная область в R^n, $f \in C(\overline{G})$, $x_0 \in G$. Тогда существует решение $x(t)$ системы (1), проходящее через точку x_0: $x(t_0) = x_0$, которое определено и непрерывно на отрезке $t \in \left[t_0 - \frac{D}{M\sqrt{n}}, t_0 + \frac{D}{M\sqrt{n}} \right]$.*

Здесь $D = \inf\limits_{y \in \partial G} \|x_0 - y\|$, $M = \max\limits_{1 \le i \le n} \sup\limits_{x \in \overline{G}} |f_i(x)|$, $\|x\| = \left(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2\right)^{1/2}$.

Теорема 2. *Пусть функция $f \in C(\overline{G})$ удовлетворяет условию Липшица :*

$$\exists\, L > 0 : \|f(x') - f(x'')\| \le L\|x' - x''\|, \forall\, x', x'' \in \overline{G}.$$

Тогда $\forall\, x_0 \in G$ существует единственное решение задачи Коши для системы (1), $x(0) = x_0$, которое определено и непрерывно на промежутке $t \in [t_0, T)$, $T \le +\infty$.

Теорема 3. *Пусть Γ - ограниченная область, $\overline{\Gamma} \in G$, $x(0) = x_0 \in \Gamma$. Если $x(t)$ - решение задачи Коши для системы (1) с $x(0) = x_0$ на некотором интервале $t \in [0, T)$, $T < +\infty$, то существует продолжение $\tilde{x}(t)$ решения $x(t)$, которое определено на промежутке $t \in [0, T_1)$, $T < T_1 \le +\infty$.*

Теорема 4. [15, с. 18] *Пусть $G = R^n$ и функция $f \in C(R^n)$ удовлетворяет условию:*

$$\|f(x)\| = O(\|x\|) \text{ при } \|x\| \to \infty \tag{2}$$

Тогда все решения системы (1) могут быть доопределены на промежутке $t \in (-\infty, +\infty)$.

Замечание. Если задача Коши для автономной системы (1) с $x(0) = x_0$ имеет единственное решение $\forall\, x_0 \in \overline{G}$, определенное на интервале $t \in (-\infty, +\infty)$, то в дальнейшем будем обозначать такое решение через $x = x(t, x_0),\ x_0 \in \overline{G},\ t \in R,$ подчеркивая тем самым зависимость решения от начальных данных.

Определение 1. [15, с. 27] Отображение $x = x(t, x_0),\ x_0 \in \overline{G},\ t \in R$ будем называть *динамической системой в* $\overline{G}$, если:

1) $x(0, x_0) = x_0,\ \forall\, x_0 \in \overline{G}$;

2) отображение $x(t, x_0)$ непрерывно по обоим аргументам;

3) $x(t_2, x(t_1, x_0)) = x(t_1 + t_2, x_0),\quad \forall\, t_1, t_2 \in R,\ x_0 \in \overline{G}$ (групповое свойство).

При этом $\pi(x_0) = \{x(t, x_0) : t \in R\}$ называется *траекторией динамической системы*,

$\pi_+(x_0) = \{x(t, x_0) : t \geq 0\}$ - *положительная полутраектория*,

$\pi_-(x_0) = \{x(t, x_0) : t \leq 0\}$ - *отрицательная полутраектория.*

Лемма 1. Если задача Коши для системы (1) с $x(0) = x_0$ удовлетворяет свойствам существования и единственности решения $x = x(t, x_0),\ x_0 \in \overline{G},\ t \in R$, то отображение $x(t, x_0)$ определяет динамическую систему в $\overline{G}$.

Доказательство. Свойство 1) динамической системы следует из определения $x(t, x_0)$ как решения задачи Коши с начальными условиями $x\big|_{t=0} = x_0$. Свойство 2) следует из теоремы о непрерывной зависимости решения от начальных условий [16, с. 178].

Свойство 3) при $t_2 = 0$ следует из свойства 1): $x(0, x(t_1, x_0)) = x(t_1, x_0)$. Осталось проверить, что $x(t_1 + t, x_0)$ - решение системы (1), и тогда решения $x(t, x(t_1, x_0)), x(t_1 + t, x_0)$ совпадают при всех $t \in R$ по свойству единственности решения задачи Коши. По определению $x(t, p)$ - решение системы (1), т.е. $\dfrac{\partial x(t, p)}{\partial t} = f(x(t, p)),\quad \forall t \in R, \forall p \in \overline{G}$. Дифференцируя $x(t_1 + t, x_0)$ по *t*, получим:

$$\frac{\partial x(t + t_1, x_0)}{\partial t} = \frac{\partial x(\tau, x_0)}{\partial \tau} \cdot \frac{d\tau}{dt} = f(x(\tau, x_0)) = f(x(t + t_1, x_0)),$$

где $\tau = t + t_1$. Лемма доказана.

Определение 2. [15, с. 30] Пусть $\pi(x_0)$ - траектория динамической системы $x(t, x_0)$. Точка $p \in R^n$ называется *ω-предельной* для $\pi(x_0)$, если существует последовательность $\{t_j\} \to +\infty$, $j \to \infty$: $\lim\limits_{j \to +\infty} x(t_j, x_0) = p$.

Точка $p \in R^n$ называется *α-предельной* для $\pi(x_0)$, если существует последовательность $\{t_j\} \to -\infty$, $j \to \infty$: $\lim\limits_{j \to -\infty} x(t_j, x_0) = p$.

Определение 3. [15, с. 30] Множество всех ω-предельных точек для $\pi(x_0)$ называется *ω-предельным множеством* $\Omega(x_0)$. Множество всех α-предельных точек для $\pi(x_0)$ называется *α-предельным множеством* $\mathrm{A}(x_0)$.

1. 1. Свойства траекторий динамических систем

Рассмотрим задачу Коши для автономной системы дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t)), \quad x \in G \subseteq R^n,\ x(0) = x_0 \in G. \tag{3}$$

Будем предполагать, что решения $x = x(t, x_0)$ задачи (3) обладают свойством динамической системы (лемма 1 из п.1). Тогда имеет место следующее утверждение:

Лемма 2. Каждая траектория $\pi(x_0) = \{x(t, x_0) : t \in R\}$ динамической системы $x(t, x_0)$ относится к одному из трех типов:

1) $\pi(x_0) = \{x_0\}$, x_0 - особая точка,

2) $\pi(x_0)$ - замкнутая кривая, соответствующая периодическому решению $x(t, x_0)$,

3) $\pi(x_0)$ - кривая без самопересечений.

Доказательство. Если $x(t, x_0) \equiv const = x_0$, $\forall t \in R$, тогда $\pi(x_0)$ относится к первому типу: $x_0 -$ особая точка, в противном случае возможны 2 случая:

а) $x(t_1, x_0) \neq x(t_2, x_0)$, $\forall t_1 \neq t_2$. Тогда, очевидно, $\pi(x_0)$ не имеет самопересечений (тип 3).

б) $\exists\, t_1 \neq t_2 : x(t_1, x_0) = x(t_2, x_0)$; $\quad x(t, x_0) \neq const$.

Определим $\tau = \inf\limits_{t_2 > t_1} \{t_2 - t_1 : x(t_1, x_0) = x(t_2, x_0)\}$, $\quad \tau > 0$. Покажем , что τ - период решений $x(t, x_0)$, т.е. $x(t + \tau, x_0) \equiv x(t, x_0)$, $\forall t \in R$, $(\tau > 0)$. Используем свойство 3) динамический системы (определение 1, п.1): $x(t + \tau, x_0) \equiv x(\tau, x(t, x_0))$. Возьмем $t_2 = t + \tau$, $t_1 = t$, тогда по определению τ

$x(t+\tau, x_0) \equiv x(\tau, x(t, x_0))$. Осталось показать, что $\tau > 0$. Это следует из того, что $x(t, x_0) \neq const$ и, согласно следствию из теоремы Вейерштрасса, точная нижняя грань для непрерывных функций в формуле, определяющей τ, достигается.

Если $\tau = 0$, тогда $\forall\, \varepsilon > 0\, \exists\, \tau^* \in (0, \varepsilon) : x(\tau^*, x_0) = x_0$. Выберем последовательность $\{\tau_n\} \to +0 : x(\tau_n, x_0) = x_0, n = 1,2,...$ Перейдем к пределу в выражении

$$\frac{x(t_n, x_0) - x_0}{t_n} = 0.$$

С другой стороны:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x(t_n, x_0) - x_0}{t_n} = \left.\frac{dx(t, x_0)}{dt}\right|_{t=0} = f(x(t, x_0))\big|_{t=0} = f(x_0).$$

Следовательно, $f(x_0) = 0$, и по свойству единственности решения задачи Коши $x(t, x_0) \equiv x_0$, а это противоречит тому, что $x(t, x_0) \neq const$, отсюда, $\tau > 0$, значит, $x(t, x_0)$ - периодическое решение с периодом τ. Лемма доказана.

Следующая лемма показывает, что предельные множества состоят из целых траекторий, т.е. инвариантны.

Лемма 3. Пусть $\Omega(x_0), A(x_0)$ - предельные множества траектории $\pi(x_0)$ для динамической системы $x(t, x_0)$. Если некоторая точка $q \in \Omega(x_0)$, то $\pi(q) = \{x(t, q) : t \in R\} \subseteq \Omega(x_0)$. Если $q \in A(x_0)$, то $\pi(q) \subseteq A(x_0)$.

Доказательство. Пусть $q \in \Omega(x_0)$, тогда по определению предельного множества существует последовательность $\{t_n\} \to +\infty : \lim\limits_{n\to\infty} x(t_n, x_0) = q$. Нам необходимо показать, что $\forall\, t \in R \Rightarrow x(t, q) \in \Omega(x_0)$. Рассмотрим $x(t_n + t, x_0) = x(t, x(t_n, x_0))$ (следует из свойства 3 определения динамической системы), $x(t_n, x_0) \to q$. Тогда

$$\lim_{n\to\infty} x(t_n + t, x_0) = x(t, q), \tag{4}$$

используя свойство непрерывности $x(t, x_0)$. С другой стороны $\lim\limits_{n\to\infty} x(t_n + t, x_0) \in \Omega(x_0)\, \forall t \in R$.

Доказательство для α - предельного множества аналогичное.

1.2. Классификация траекторий по свойствам предельных множеств

Определение 4. [15, с. 30] Решение $x(t, x_0)$ (траектория $\pi(x_0)$) называется *уходящим в положительном направлении*, если его Ω - предельное множество пусто.

Определение 5. Решение $x(t, x_0)$ (траектория $\pi(x_0)$) называется *асимптотическим*, если его Ω - предельное множество не пусто, а $\pi(x_0) \cap \Omega(x_0)$ является пустым множеством.

Определение 6. Решение $x(t, x_0)$ (траектория $\pi(x_0)$) называется *устойчивым по Пуассону*, если существует $q \in \Omega(x_0): q \in \pi(x_0)$.

Определение 7. Если $\Omega(x_0)$ - замкнутая кривая, соответствующая периодическому решению, то такой характер предельного множества будем называть *предельным циклом*.

Имеет место следующая теорема [5; 15, с. 28].

Теорема 5. *Пусть для автономной системы*

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t)),\ x \in R^n \tag{5}$$

имеет место теорема существования и единственности решения задачи Коши для любой начальной точки $x(0) = x_0 \in R^n$.

Тогда существует динамическая система, эквивалентная заданной, т.е. интегральные кривые системы (5) совпадают с траекториями динамической системы.

Доказательство. Рассмотрим вспомогательную автономную систему с некоторой положительной функцией $\alpha(t)$:

$$\frac{dx(t)}{dt} = f(x(t)) \cdot \alpha(x(t)),\ \alpha : R^n \to R,\ \alpha(x) > 0\,. \tag{6}$$

Связь траекторий систем (5) и (6) отражена в следующей лемме:

Лемма 4. *Пусть для автономных систем (5) и (6) имеют место теоремы существования и единственности решения задачи Коши для любой начальной точки* $x(0) = x_0 \in R^n$. *Тогда непродолжаемые траектории этих систем совпадают.*

Доказательство леммы. Пусть $x(t)$ - непродолжаемое решение системы (5), $t \in (t_1, t_2);\ -\infty \le t_1 \le t_2 \le +\infty$. Подставим $x = x(\tau(t))$ в (6):

$$\frac{dx(\tau(t))}{dt} = \frac{dx}{d\tau} \cdot \frac{d\tau}{dt} = \frac{d\tau}{dt} \cdot f(x(\tau)) = \alpha(x) \cdot f(x).$$

Выберем $\tau(t)$ следующим образом:

$$\frac{d\tau(t)}{dt} = \alpha(x(\tau(t))) \tag{7}$$

Тогда $x(\tau(t))$ - решение системы (6). Интегрируя (7) будем иметь:

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{1}{\alpha(x(\tau(t)))};$$

$$t - t_0 = \int_{\tau_0}^{\tau} \frac{ds}{\alpha(x(s))}, \tag{8}$$

где $\tau_0 \in (t_1, t_2)$. Формула (8) определяет $\tau(t)$ как неявную функцию, $x = x(\tau(t))$ - решение (6). Лемма доказана.

Для заданной функции $f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}$ выполним следующие построения:

$\varphi_i(x) = \begin{cases} 1, |f_i(x)| \le 1 \\ \dfrac{1}{f_i(x)}, |f_i(x)| > 1 \end{cases}$, $\varphi(x) = \prod_{i=1}^{n} \varphi_i(x)$. Для построенной таким образом функции $\varphi(x)$ рассмотрим систему типа (6):

$$\frac{dx}{dt} = \varphi(x) f(x) \tag{9}$$

По лемме 4 непродолжаемые траектории систем (5) и (9) совпадают, а по теореме 4 из п. 1 решения системы (9) определены для всех $t \in R$, т.е. (9) определяет динамическую систему в R^n и ее траектории совпадают с траекториями (5). Теорема доказана.

Замечание. В условии теоремы 5 не предполагается продолжаемость решений автономной системы (5) для $t \in (-\infty; +\infty)$.

1.3. Выпрямляемые семейства траекторий

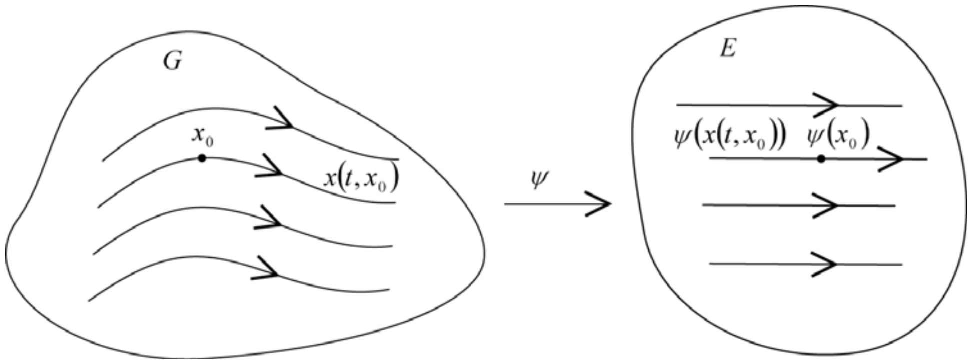
Рассмотрим автономную систему:

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), x \in G \subseteq R^n. \tag{10}$$

Предположим, что G - область, $f \in C(G)$, а система (10) удовлетворяет условиям теоремы единственности решения задачи Коши (см. теорему 2) $x\big|_{t=0} = x_0$, $\forall\ x_0 \in G$.

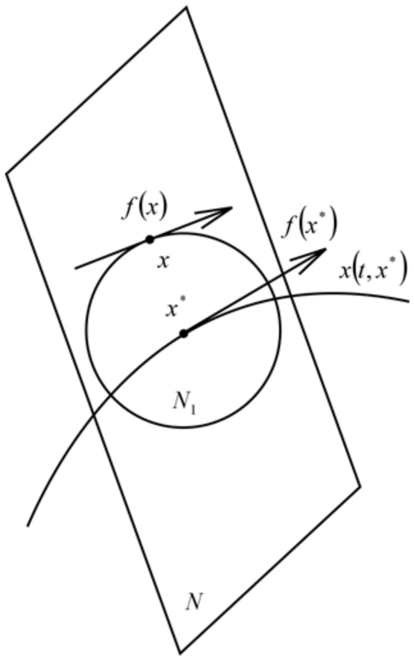
Обозначим через $S = \{x(t,p) : p \in G\}$-семейство интегральных кривых системы (10).

Определение 8. [15, с. 39] Семейство S называется *выпрямляемым* в G, если существуют область $E \in R^n$ и гомеоморфизм $\psi : G \to E$, такие, что $\{\psi(x(t,p))\}_{t\in I}$ - прямая или интервал из E; $\{\psi(x(t,p_1))\}_{t\in I_1}$; $\{\psi(x(t,p_2))\}_{t\in I_2}$ - параллельные прямые. (Здесь через I_1, I_2 обозначены интервалы, на которых существует решение системы (10) в области G).



Теорема 6 (о выпрямлении). [15, с. 40] *Пусть* G *- область, система (10) удовлетворяет условиям теоремы 2 – теоремы единственности решения задачи Коши* $x(0) = x_0$ $,\forall\, x_0 \in G$, *и пусть* $x^* \in \operatorname{int} G : f(x^*) \neq 0.$

Тогда существует окрестность точки x^*, *в которой интегральные кривые системы (10) выпрямляемы.*



Доказательство. Выберем некоторое R>0. Так как по условию теоремы $f(x^*) \neq 0$, следовательно, $\exists$ $N -$гиперплоскость: $x^* \in N$ и $f(x^*) \perp N$, т.е.

$$N = \{x \in R^n : (x - x^*, f(x^*)) = 0\ \}.$$

Определим R из условия:

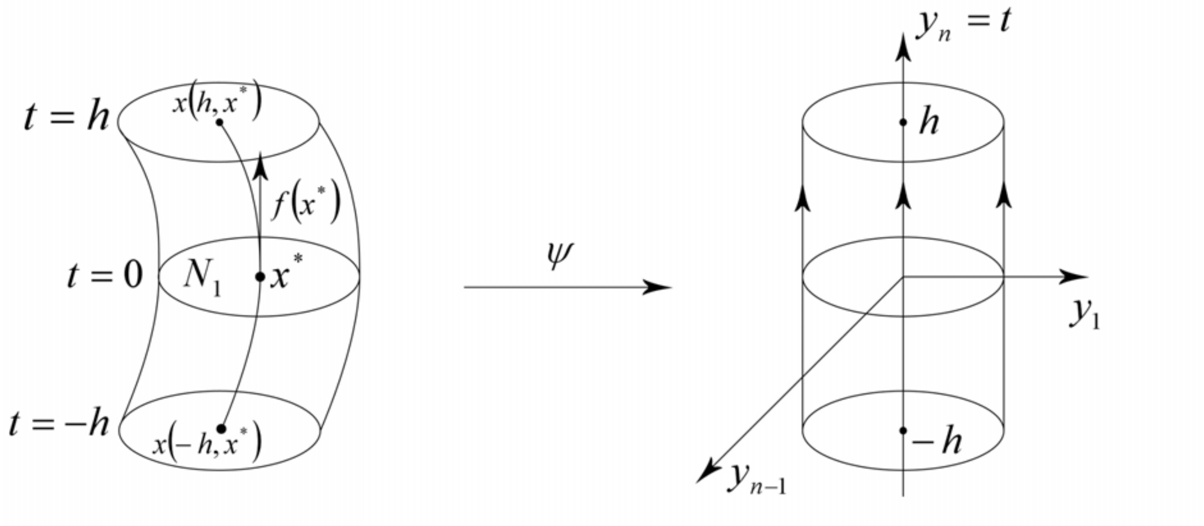
$$x \in N_1 = N \cap \{x : \|x - x^*\| \le R\ \} \Rightarrow (f(x), f(x^*)) \ge \frac{\|f(x^*)\|^2}{2}.$$

По теореме существования и единственности решения задачи Коши для системы (10) имеем: $\exists\ h_0 > 0 :$ $x(t,x_0)$- определено на

$t \in [-h_0, h_0] \; \forall \, x_0 \in N_1$.

Если для некоторого начального условия $x_0 \in N$ система (10) обладает периодическими решениями, то обозначим их период $\tau = \inf\limits_{t>0} \{t : x(t, x_0) = x_0,\, x_0 \in N_1\}$. Выберем $h = \min\left\{h_0, \frac{\tau}{2}\right\}$.

Обозначим через $\tau_{2h} = \{x : x(t, x_0) = x,\, |t| \le h,\, x_0 \in N_1\}$.



Построим отображение $\psi : \tau_{2h} \to \mathrm{E} = \{y = (y_1, ..., y_n) : y_1^2 + ... + y_{n-1}^2 \le R^2 \;, y_n \in [-h, h]\}$, где Е - цилиндр в R^n. Если $x \in \tau_{2h}$, то $\exists \, x_0 \in N_1, \exists \, |t| \le h : x = x(t, x_0)$.

Пусть $(y_1, ... y_{n-1})$ - координаты точки x_0 в N_1. Положим $y_n = t$, т.е. $x \to y = \begin{pmatrix} y_1 \\ .... \\ y_{n-1} \\ t \end{pmatrix} \in \mathrm{E}$.

Покажем непрерывность отображений $\psi(x)$ и $\psi^{-1}(y)$.

Пусть $\{x_k\} \to x \in \tau_{2h}$, тогда $\psi(x_k) = \psi(x(t_k, x_k^0)), \quad x_k^0 = x(-t_k, x_k)$, так как

$x(t_k, x(-t_k, x_k)) = x(t_k - t_k, x_k) = x_k$, $x(t_1 + t_2, x_0) = x(t_1, x(t_2, x_0))$, $\forall \, t_1, t_2$, $\forall \, x_0$.

Из свойства непрерывности $x(t, x_0)$ следует непрерывность отображения $x_k \to x_k^0$, т.е. $\psi(x_k) \to \psi(x)$ при $k \to \infty$.

Докажем непрерывность отображения $\psi^{-1}(y)$. Рассмотрим последовательность $y_k \to y : \{y_1^{(k)}, ... y_{n-1}^{(k)}\} \to \{y_1, ... y_{n-1}\}; \{y_n^{(k)}\} \to y_n$. Тогда в силу непрерывности координатного отображения $x_0 \in \mathrm{N}_1 \to (y_1, ..., y_{n-1})$, получим:

$$\psi^{-1}(y_k) = x\left(y_n^{(k)},\, x_0\left(y_1^{(k)},\ldots y_{n-1}^{(k)}\right)\right) \to x\left(y_n, x_0\left(y_1,\ldots,y_{n-1}\right)\right) = x = \psi^{-1}(y).$$

В качестве В - окрестности точки x^* возьмем некоторое открытое подмножество $\mathrm{B} \subseteq \tau_{2h}$. Теорема доказана.

Связь свойства выпрямляемости траекторий автономной системы (10) с разрешимостью некоторого дифференциального уравнения в частных производных первого порядка установил Е.А. Барбашин [15, с. 41].

Теорема 7 (Е.А. Барбашин) *Пусть дифференциальное уравнение в частных производных первого порядка*

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u(x)}{\partial x_i} \cdot f_i(x) = 1 \tag{11}$$

имеет решение $u \in C^1(G)$.

Тогда траектории системы (10) выпрямляемы в G.

Доказательство. Заметим, что если $u(x)$-решение уравнения (11), то для любой точки $x_0 \in G$ выполнено равенство

$$u(x(t, x_0)) = u(x_0) + t. \tag{12}$$

Имеет место и обратное утверждение. Действительно, дифференцируя (12) по t, получим:

$$\frac{du(x(t, x_0))}{dt} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot \frac{dx_i}{dt}\Big|_{x = x(t, x_0)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} \cdot f_i = 1. \tag{13}$$

Т.е. $u(x)$ - решение уравнения (11), обратно: интегрируя тождество (13) по переменной t, будем иметь:

$$u(x(t, x_0)) = \int_0^t \frac{du(x(\tau, x_0))}{d\tau} d\tau + u(x_0) = u(x_0) + \int_0^t 1 d\tau = u(x_0) + t.$$

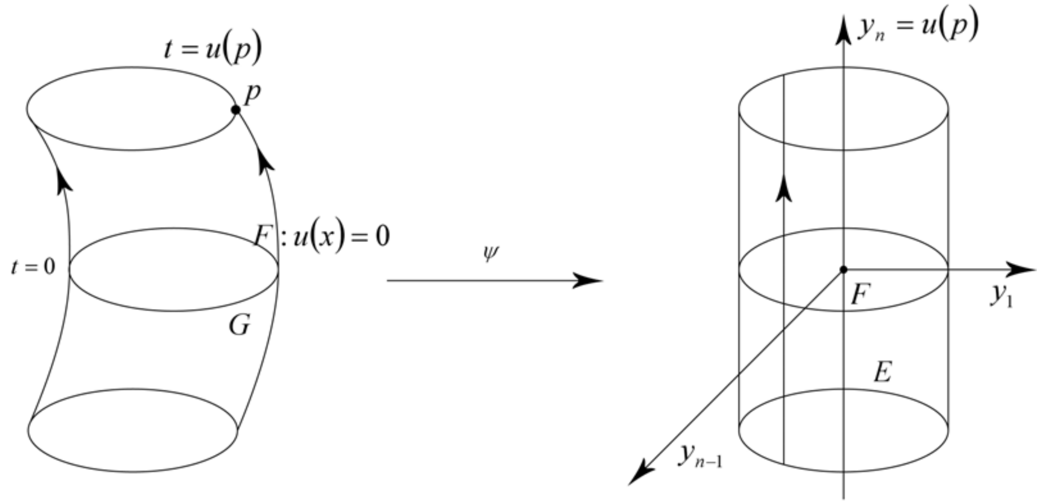
Т.е. приходим к равенству (12).

Без ограничения общности будем считать, что $\inf\limits_{x \in G} u(x) < 0, \sup\limits_{x \in G} u(x) > 0$.

Положим $F = \{x \in G, u(x) = 0\}$-$(n-1)$мерная поверхность в R^n, $E = F \times R^1$-цилиндр.

Построим отображение $\psi : G \to E,\ \ \psi(p) = (x(-u(p), p), u(p)) \in E$. Для завершения доказательства теоремы нам остается показать, что $x(-u(p), p) \in F$ и непрерывность отображений $\psi(p), \psi^{-1}(p)$.

Используем свойство (4): $u(x(-u(p),p)) = u(p) - u(p) = 0 \Leftrightarrow x(-u(p),p) \in F$.



Условие $x(-u(p), p) \in F$ следует из того, что E - цилиндр. Пусть $\{p_n\} \to p$, тогда $u(p_n) \to u(p)$ (из непрерывности функции u из условия теоремы). Тогда

$\psi(p_n) = (x(-u(p_n), p_n), u(p_n)) \to (x(-u(p), p), u(p)) = \psi(p)$.

Аналогично для ψ^{-1}:

$\psi^{-1}(p) = \psi^{-1}(q,t)$. Если $\{q_n\} \to q \in F$, $\{t_n\} \to t$, тогда $p_n = x(t_n, q_n) \to x(t,q) = \psi^{-1}(p)$.

Теорема доказана.

Следствие. *Если существует функция $u \in C^1(G)$, для которой выполнено неравенство*

$$N = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} f_i \geq k > 0, \quad \forall \quad x \in G, \qquad (14)$$

с некоторой постоянной $k > 0$, тогда траектории системы (10) выпрямляемы.

Доказательство. Рассмотрим систему

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{1}{N(x)} f_i(x), \quad x \in G. \qquad (15)$$

Траектории систем (10) и (15) совпадают (как подмножества в R^n) по лемме 4 из пункта 2.

Траектория: $\pi(x_0) = \{x(t, x_0) : t \in R\}$. К системе (15) применим теорему Е.А. Барбашина:

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{1}{N} f_i = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial u}{\partial x_i} f_i = \frac{N}{N} = 1,$$

откуда следует выпрямляемость траекторий систем (10) и (15).

2. Устойчивость особых точек автономных систем

Рассмотрим автономную систему

$$\dot{x} = f(x),\ x \in G \subseteq R^n,\ f \in C(G). \tag{16}$$

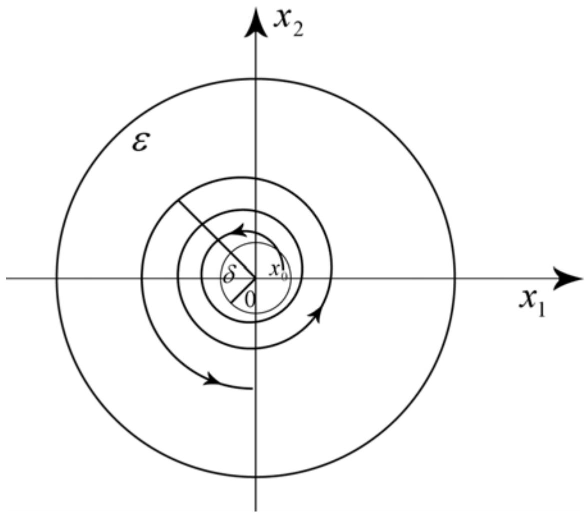
Предположим, что x=0 является решением системы (16), т.е. $f(0) = 0, \quad 0 \in G$.

Будем также считать, что для системы (16) выполнены условия существования и единственности решения $x(t, x_0)$ задачи Коши с начальными условиями $x\big|_{t=0} = x_0 \in G$.

Введем понятие устойчивости по Ляпунову тривиального решения [7, 14, 18].

Определение 9. Решение $x = 0$ называется *устойчивым по Ляпунову*, если для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что любое решение $x(t, x_0)$ системы (16) с $\|x_0\| \le \delta$ определено при всех $t \ge 0$ и удовлетворяет неравенству

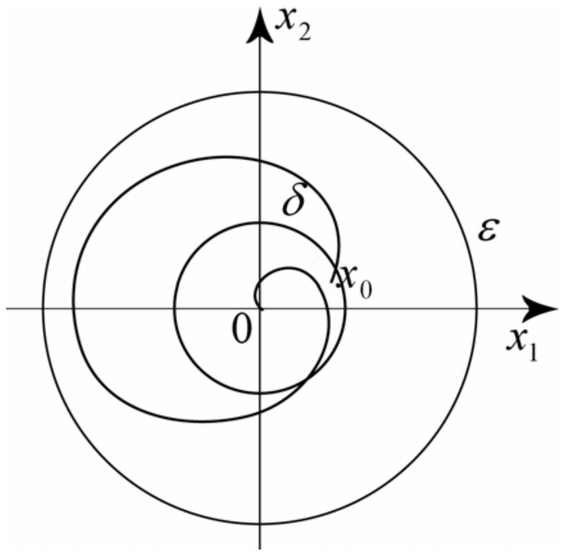
$$\|x(t, x_0)\| \le \varepsilon,\ \forall\ t \ge 0.$$



Определение 10. Решение $x = 0$ системы (16) называется *асимптотически устойчивым по Ляпунову*, если оно устойчиво по Ляпунову и

$$\lim_{t\to\infty} \|x(t, x_0)\| = 0,\ \forall\ x_0 : \|x_0\| \le \Delta,$$

при некотором $\Delta > 0$.



Важную роль в качественной теории дифференциальных уравнений играет понятие индекса особой точки отображения. В следующей теореме вычислен индекс асимптотически устойчивой особой точки (положения равновесия) для автономной системы.

Теорема 8 (Красносельский М.А.) [9, Теорема 52.1] *Пусть* $x = 0$ *- асимптотически устойчивое по Ляпунову решение системы (16). Тогда*

$$\operatorname*{ind}_{x=0} f = (-1)^n \ . \tag{17}$$

Здесь n *-размерность пространства,* $\operatorname*{ind}_{x=0} f$ *- индекс особой точки* $x = 0$ *отображения* $f(x)$.

Ниже приводятся формулы для вычисления индекса особой точки, после чего будет дано доказательство теоремы 8.

2.1.Формулы для вычисления индекса изолированной особой точки $x = 0$ *отображения* $f(x)$.

Точку $x = 0$ будем называть *изолированной особой точкой* отображения $f : G \to R^n$, $0 \in \operatorname{int} G$, если $f(0) = 0$ и

$$\exists\, r > 0 : f(x) \neq 0 \text{ при } 0 < \|x\| \leq r \ .$$

Приведем некоторые формулы для вычисления индекса изолированной особой точки непрерывного отображения (векторного поля) f [9].

1. Формула Кронекера

$$\operatorname*{ind}_{x=0} f = \frac{1}{V(r)} \int\limits_{\|x\| \leq r} J\left[\frac{\|x\|}{\|f(x)\|} \cdot f(x) \right] dx, \tag{18}$$

где $V(r)$ - объем (мера Лебега) шара $\|x\| \leq r, J$ - якобиан, $\|x\| = \left(x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2\right)^{1/2}$.

2. Формула вычисления индекса для линейных отображений

Пусть $f(x) = Ax + o(\|x\|)$ при $x \to 0$, где $\det A \neq 0$. Тогда

$$\operatorname*{ind}_{x=0} f = \operatorname{sign}(\det A). \tag{19}$$

3. Формула Пуанкаре

Пусть $n = 2,\ f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} P(x_1, x_2) \\ Q(x_1, x_2) \end{pmatrix},\quad x_1(t), x_2(t),\ t \in [0,1)$ - параметризация окружности $x_1^2 + x_2^2 = r^2$. Положим $p(t) = P(x_1(t), x_2(t))$; $q(t) = Q(x_1(t), x_2(t))$. Тогда

$$\operatorname*{ind}_{x=0} f = \frac{1}{2\pi}\int_0^1 \frac{q'(t)p(t) - p'(t)q(t)}{p^2(t) + q^2(t)} dt. \tag{20}$$

4. Формула Пуанкаре в случае аналитических функций

Пусть $P(x_1, x_2) + iQ(x_1, x_2) = \Phi(z)$ - аналитическая функция переменной $z = x_1 + ix_2$ при $\|z\| \le r$. Тогда

$$\operatorname*{ind}_{x=0} f = \frac{1}{2\pi i} \oint_{|z|=r} \frac{\Phi'(z)dz}{\Phi(z)}. \tag{21}$$

С понятием индекса особой точки тесно связано понятие вращения векторного поля. Дадим необходимые определения, чтобы установить эту связь [9].

Определение 11. Пусть M - некоторое подмножество в R^n. Непрерывное отображение $\Phi : M \to R^n$ называется *векторным полем* в M.

Определение 12. Векторное поле Φ называется *невырожденным*, если

$$\Phi(x) \ne 0, \quad \forall\ x \in M.$$

Определение 13. Невырожденные векторные поля $\Phi_1, \Phi_2 : \partial\Omega \to R^n \setminus \{0\}$ называются *гомотопически эквивалентными* $(\Phi_1 \sim \Phi_2)$, если

$$\exists\ h \in C\left[\partial\Omega \times [0,1] \to R^n\right]: \qquad \begin{array}{l} h(x,0) = \Phi_1(x), \quad h(x,1) = \Phi_2(x), \\ h(x,\lambda) \ne 0\ \forall\ x \in \partial\Omega,\ \lambda \in [0,1]. \end{array}$$

Определение 14. Пусть Ω-ограниченная область в R^n, $\partial\Omega$ - граница области Ω, Φ - невырожденное векторное поле на $\partial\Omega$. *Вращением* невырожденного векторного поля $\Phi : \partial\Omega \to R^n \setminus \{0\}$ называется целое число $\gamma[\Phi, \partial\Omega]$, которое обладает следующими свойствами:

1) Если $x_0 \in \Omega,\ \Phi(x) = x - x_0$, то $\gamma[\Phi, \partial\Omega] = 1$.

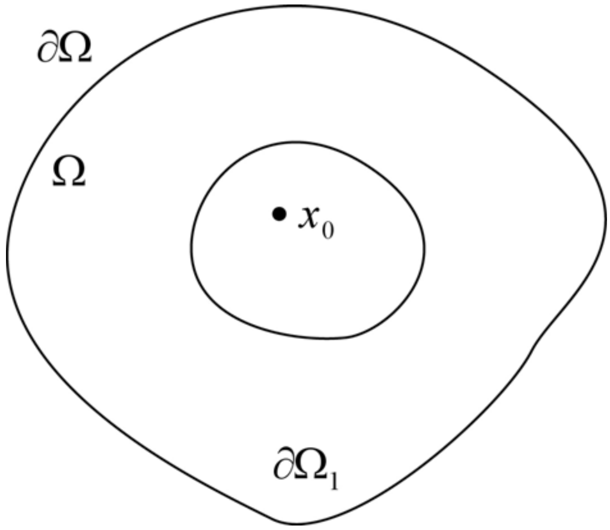
2) Если $\Phi_1 \sim \Phi_2$ (гомотопическая на $\partial\Omega$ эквивалентность), то $\gamma[\Phi_1, \partial\Omega] = \gamma[\Phi_2, \partial\Omega]$.

3) Если Φ - невырожденное векторное поле на $\mu = \overline{\Omega} \setminus \bigcup_{n=1}^{\infty} \Omega_n$, где

$$\Omega_n \subset \Omega, \Omega_i \bigcap \Omega_j = \varnothing, i \neq j,$$

то $\gamma[\Phi, \partial\Omega] = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma[\Phi, \partial\Omega_n]$,

причем $\gamma[\Phi, \partial\Omega_n] \neq 0$ лишь на конечном множестве индексов n.



Свойствами 1) - 3) вращение определено однозначно.

Заметим, что если x_0 - единственная особая точка $\Phi(x)$ в $\Omega, \Phi(x) \neq 0$ при $x \in \partial\Omega$, то по свойству 3) вращения векторного поля $\gamma[\Phi, \partial\Omega] = \gamma[\Phi, \|x - x_0\| = \varepsilon]$ для любых достаточно малых $\varepsilon > 0$. Поскольку вращения $\gamma[\Phi, \|x - x_0\| = \varepsilon]$ совпадают при всех достаточно малых $\varepsilon > 0$, то введем локальную характеристику векторного поля (индекс) в окрестности особой точки.

Определение 15. Пусть x_0 - изолированная особая точка непрерывного отображения $\Phi : \Omega \to R^n$, $x_0 \in \Omega$. *Индексом* Φ в точке x_0 называется целое число

$$\operatorname*{ind}_{x=x_0} \Phi = \gamma[\Phi, \|x - x_0\| = \varepsilon], \tag{22}$$

где ε - достаточно малое положительное число.

Итак, формула (22) устанавливает связь между индексом особой точки и вращением векторного поля, определяемого этим непрерывным отображением. Таким образом, вращение векторного поля может быть вычислено по формулам (18)-(21).

Доказательство теоремы 8. Обозначим через $x = \Phi(p, t)$ - решение следующей задачи Коши:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= f(x), \\ x(0) &= p. \end{aligned} \tag{23}$$

Введем в рассмотрение функцию

$$h(x,\lambda)=\frac{1}{\lambda}\left[\Phi\left(x,\frac{\lambda}{1-\lambda}\right)-x\right] \tag{24}$$

$$\forall\ \lambda\in(0,1),\ \|x\|<\delta,$$

где $\delta>0$ берется из определения 9.

Доопределим $h(x,\lambda)$ по непрерывности при $\lambda=0,\lambda=1$ следующим образом:

$$h(x,0)=\lim_{\lambda\to+0}\frac{\Phi\left(x,\frac{\lambda}{1-\lambda}\right)-x}{\lambda}=\lim_{\lambda\to+0}\frac{x+f(x)\cdot\frac{\lambda}{1-\lambda}+0\cdot\left(\frac{\lambda}{1-\lambda}\right)-x}{\lambda}=f(x),$$

$$h(x,1)=\lim_{\lambda\to1-0}\frac{\Phi\left(x,\frac{\lambda}{1-\lambda}\right)-x}{\lambda}=-x.$$

Теперь $h\in C(\mathrm{B}_\delta\times[0,1])$, $\mathrm{B}_\delta=\{x:\|x\|\le\delta\}$. Необходимо показать, что $h(x,\lambda)\neq0,\ \forall\ x\in\partial\mathrm{B}_\delta$.

При $\lambda=0,\ h(x,0)=f(x)\neq0,$ при $\|x\|=\delta$, т.к. $x=0$ - изолированная особая точка f, и поэтому только изолированная особая точка может быть асимптотически устойчивой.

При $x=1,\ \ h(x,1)=-x\neq0,\ \|x\|\le\delta$.

Если $h(x_0,\lambda_0)=0$ при $\lambda_0\in(0,1),\ \|x_0\|=\delta$, то из (24) следует:

$$\Phi(x_0,\mathrm{T}_0)=x_0,\ \mathrm{T}_0=\frac{\lambda_0}{1-\lambda_0}>0. \tag{25}$$

Откуда получаем, что $x=\Phi(x_0,t)$ - периодическое решение (23), т.е.

$$\Phi(x_0,k\mathrm{T}_0)=x_0,\ \forall\ k\in\Omega. \tag{26}$$

Следовательно, $\lim\limits_{k\to\infty}\Phi(x_0,k\cdot\mathrm{T}_0)=x_0\neq0$, что противоречит асимптотической устойчивости x_0.

Итак, $f=-x$ на $\partial\mathrm{B}_\delta$ и по свойству 2) (см. опр. 13) $\gamma[f,\partial\mathrm{B}_\delta]=\gamma[-x,\partial\mathrm{B}_\delta]$ тогда и только тогда, когда $\operatorname*{ind}\limits_{x=0}f=\operatorname*{ind}\limits_{x=0}(-x)=\operatorname*{ind}\limits_{x=0}(-\mathrm{I}x)=\operatorname{sign}(-\mathrm{I})=(-1)^n$. Значит, $\operatorname*{ind}\limits_{x=0}f=(-1)^n$. Теорема доказана.

2.2. Метод функции Ляпунова исследования устойчивости особых точек

Данный раздел посвящен исследованию устойчивости решения x=0 системы

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in D \subseteq R^n \tag{27}$$

с помощью построения некоторой положительно определенной функции (функции Ляпунова). Как и ранее, будем предполагать, что $0 \in \operatorname{int} D, \quad f(0) = 0$, а решение задачи Коши для системы (27) с начальным условием $x|_{t=0} = x_0 \in D$ будем обозначать $x(t, x_0)$.

Определение 16. Функция $V : D \to R^1$ называется *определенно-положительной*, если $V(x) > 0, \forall\ x \in D \setminus \{0\}, V(0) = 0$. Функция $V(x)$ называется *определенно-отрицательной*, если $V(x) < 0, \forall\ x \in D \setminus \{0\}, V(0) = 0$.

Определение 17. Функция $V : D \to R^1$ называется *знакоположительной*, если $V(x) \geq 0, \forall\ x \in D$. Функция V называется *знакоотрицательной*, если $V(x) \leq 0, \forall\ x \in D$. Будем называть функцию $V(x)$ *знакопостоянной*, если она знакоотрицательна или знакоположительна.

Пусть $V \in C^1(D \to R^1)$. Производной функции V силу системы (27) будем называть следующее выражение:

$$\dot{V}_{(27)}(x) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V(x)}{\partial x_j} f_j(x) = (\nabla V, f), \tag{28}$$

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}.$$

Следующая теорема отвечает на вопрос об устойчивости нулевого положения равновесия системы (27), если существует некоторая определенно-положительная функция, производная которой в силу этой системы определена отрицательно. Такую функцию называют функцией Ляпунова системы (27).

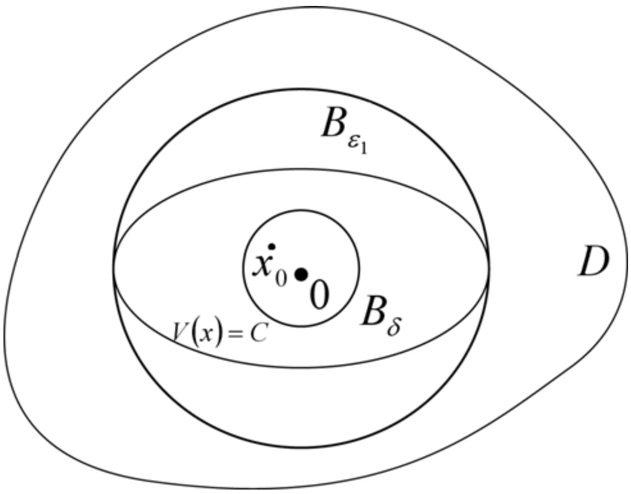
Теорема 9 (А.М. Ляпунова об устойчивости). [2, с. 12] *Если существует определенно-положительная функция* $V : D \to R^1, V \in C^1(D)$, *производная которой в силу системы (27)* $\dot{V}_{(27)}(x)$ *знакоотрицательна, то решение* $x(t) \equiv 0$ *системы (27) устойчиво по Ляпунову.*

Доказательство. Для заданного $\varepsilon > 0$ найдем число $\varepsilon_1 \in (0, \varepsilon]$ так, чтобы выполнялось включение $\mathrm{B}_{\varepsilon_1} = \{x : \|x\| \le \varepsilon_1\} \subseteq D$. Определим

$$C = \inf_{\|x\| = \varepsilon_1} V(x), \tag{29}$$

$$\delta(\varepsilon) = \inf\{\|x\| : V(x) \ge C\}. \tag{30}$$

Непрерывность, а также положительная определенность функции $V(x)$ следует из того, что $C > 0, \delta(\varepsilon) > 0, \mathrm{B}_{\varepsilon_1} \supseteq \{x : V(x) = C\} \supseteq \mathrm{B}_{\delta}$.



Пусть $\|x_0\| < \delta$, тогда $\|x_0\| < \varepsilon_1 \le \varepsilon$. Действительно, $V(x_0) < C$ (по формуле (30)), а значит $\|x_0\| < \varepsilon_1$ (по формуле (29)). Вычислим производную функции в силу системы (27):

$$\frac{d}{dt} V(x(t, x_0)) = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_j} \cdot \frac{dx_j(t, x_0)}{dt} = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V}{\partial x_j} \cdot f_j(x) |_{x = x(t, x_0)} = \dot{V}(x(t, x_0)) \le 0 \text{ (по условию теоремы).}$$

Это означает, что функция $V(x(t, x_0))$ убывает, т.е.

$$V(x(t, x_0)) \le V(x_0) < C, \forall\, t \ge 0. \tag{31}$$

Устойчивость нулевого положения равновесия системы (27) будем доказывать методом от противного. Действительно, если предположить, что $\|x(t, x_0)\| \ge \varepsilon_1$ при некотором $t > 0$, то (по непрерывности $x(t, x_0)$) $\exists\, t_1 \in (0, t] : \|x(t_1; x_0\| = \varepsilon_1$. Отсюда $V(x(t_1, x_0)) \ge C$ из формулы (29), а это неравенство противоречит неравенству (31). Итак, $\|x(t, x_0)\| < \varepsilon_1 \le \varepsilon, \forall\, t \ge 0$, что и доказывает устойчивость нулевого положения равновесия системы (27).

Теорема 10 (А.М. Ляпунова об асимптотической устойчивости). [2, с.18] *Если существует определенно-положительная функция* $V : D \to R^1$, $V \in C^1(D)$, *производная которой в силу системы (27)* $\dot{V}_{(27)}(x)$ *отрицательно определена, тогда решение* $x(t) \equiv 0$ *системы (27) асимптотически устойчиво по Ляпунову.*

Доказательство. Как и в доказательстве предыдущей теоремы, для любого $\varepsilon > 0$ определим $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$. Пусть $\|x_0\| < \delta$. Рассмотрим

$$V(x(t, x_0)) = \delta(x_0) + \int_0^t \dot{V}(x(\tau, x_0))d\tau \le V(x_0) < C. \tag{32}$$

Откуда следует, что $V(x(t, x_0))$- монотонна по t (ограничена снизу), значит, существует $\lim\limits_{t\to+\infty} V(x(t, x_0)) = C_1 \ge 0$. Если $C_1 = 0$, то в силу непрерывности функции V : $x(t, x_0) \to 0$ при $t \to +\infty$, если $C_1 > 0$, то рассматривая множество $\mathrm{M}_{C_1} = \{x : C_1 \le V(x) \le C\}$(при этом $V(x(t, x_0)) \in \mathrm{M}_{C_1}$ $\forall\, t \ge 0$), положим

$$-m = \sup_{x \in M_C} \dot{V}(x). \tag{33}$$

Непрерывность и отрицательная определенность производной $\dot{V}_{(27)}$ следует из того, что $m > 0$.

Подставим (33) в (32):

$$V(x(t, x_0)) = V(x_0) + \int_0^t \dot{V}(x(\tau, x_0))d\tau \le V(x_0) - mt \underset{t\to+\infty}{\to} -\infty,$$

что противоречит неравенству $V(x) \ge 0$. Следовательно, $C_1 = 0,$ $x(t, x_0) \underset{t\to+\infty}{\to} 0$. Теорема доказана.

Определение 18. Множество $\mathrm{M} \subseteq D$ называется *инвариантным* для системы (27), если $\forall\, x_0 \in \mathrm{M} \Rightarrow x(t, x_0) \in \mathrm{M},\ \forall\, t \ge 0$.

Заметим, что если $\Omega(x_0) - \omega$-предельное множество для $x(t, x_0)$, то $\Omega(x_0)$ инвариантно по лемме 3 пункта 1.1.

Теорема 11 (принцип инвариантности ЛаСалля). [13] *Пусть существует функция* $V \in C^1(D)$ *такая, что* V *ограничена снизу в* $D, \dot{V}(x) \le 0, D$ *- инвариантно,* $x_0 \in D, \Omega(x_0) \subseteq D.$

Тогда $\Omega(x_0)$ *содержится в инвариантном подмножестве множества* $Z_c = \{x : V(x) = C, \dot{V}(x) = 0\}$ *для некоторой постоянной* C.

Доказательство. Пусть $g \in \Omega(x_0), g \in D$. Так как функция $V \in C^1(D), V$ - ограничена снизу в $D,$ то существует $\lim\limits_{t \to +\infty} V(x(t, x_0)) = C$. В силу непрерывности функции V имеем: $V(y) = C$. В силу инвариантности D, а значит и $\Omega(x_0)$, получаем $x(t, y) \in \Omega(x_0), \forall\, t \ge 0$.

Докажем, что $\dot{V}(y) = 0,$ тогда, очевидно $y \in Z_C$.

Так как $\dot{V} \le 0,$ то $V(x(t, y))$ - монотонна , значит,

$$V(x(t, y)) \le V(y). \tag{34}$$

Покажем, что в (34) имеет место равенство. Доказательство проведем от противного. Действительно, если предположить, что $\exists\, t_1 > 0 :\ V(x(t, y)) < V(y),$ тогда по непрерывности V и определению предельных точек $\exists\, t > 0$ такое, что выполнено:

$$V(x(t_1 + t; x_0)) < V(y), \text{ но } V(y) = C. \tag{35}$$

По определению C и монотонности $V(x(t, x_0))$: $C = \inf\limits_{t \ge 0} V(x(t, x_0)),$ т.е. $C \le V(x(t, x_0))\ \forall\, t \ge 0$.

Получено противоречие с (35). Итак, $\Omega(x_0) \subseteq Z_C$. Теорема доказана.

Теорема 12 (Е.А. Барбашин – Н.Н. Красовский). [10] *Пусть существует определенно-положительная функция* $V \in C^1(D),$ *причем* $\dot{V}(x) \le 0, \forall\, x \in D$*, а множество* $Z_0 = \{x : \dot{V}(x) = 0\}$ *не содержит положительных полутраекторий системы (27), отличных от* $x = 0$. *Тогда решение* $x(t) \equiv 0$ *системы (27) асимптотически устойчиво по Ляпунову.*

Доказательство. По теореме 9 решение $x(t) \equiv 0$ устойчиво по Ляпунову. Пусть $\forall\, \varepsilon > 0$ определено $\delta(\varepsilon) > 0$ по теореме 9. Рассмотрим начальное условие $\|x_0\| < \delta$. Нужно показать, что $\Omega(x_0) = \{0\}$. Из ограниченности решения $x(t, x_0)$ при $t \ge 0$ следует, что $\Omega(x_0) \ne \varnothing$ и $\Omega(x_0)$ - компакт. Предположим, $\exists\, p \ne 0 : p \in \Omega(x_0)$, тогда $V(p) = C > 0$ из свойства $V(x)$. По теореме 11 p принадлежит инвариантному подмножеству из $Z_C = \{x : V(x) = C, V(x) = 0\}$, $Z_C \subseteq \{x : \dot{V}(x) = 0, x \ne 0\} = Z_0 \setminus \{0\}$. По условию теоремы $Z_0 \setminus \{0\}$ не содержит полутраекторий, т.е. не содержит инвариантных подмножеств системы (27), значит, предположение $p \neq 0$ ложное, т.е. $\Omega(x_0) = \{0\}$. Теорема доказана.

Замечание. Условие отсутствия целых полутраекторий на Z_0 можно сформулировать иначе: $\forall\ x_0 : \dot{V}(x_0) = 0,\ x_0 \neq 0 \Rightarrow \dot{V}(x(t, x_0)) \neq 0$ при некотором $t > 0$.

2.3. Теоремы о неустойчивости по Ляпунову

Как и в предыдущем разделе, рассмотрим нулевое положение равновесия системы (27).

Определение 19. Решение $x(t) \equiv 0$ будем называть *неустойчивым по Ляпунову*, если оно не является устойчивым.

Для $\varepsilon > 0$ обозначим $B_\varepsilon = \{x : \|x\| < \varepsilon\}$.

Теорема 13 (Первая теорема А.М. Ляпунова о неустойчивости). [10] *Пусть существует такая функция $V \in C^1(D), V(0) = 0$, что при любом $\varepsilon > 0$ найдется $x \in B_\varepsilon$, удовлетворяющий условию $V(x) > 0$. Если $\dot{V}(x)$ - определенно-положительная функция, то решение $x(t) \equiv 0$ неустойчиво.*

Доказательство. Выберем $\varepsilon > 0$ из условия $\overline{B}_\varepsilon \subseteq D$. Покажем, что $\forall\ \delta > 0\ \exists\ x_0 \in B_\delta : x(t, x_0)$ выходит из $\overline{B}_\varepsilon$ за конечное время. Для произвольного $\delta > 0\ (\delta < \varepsilon)$, выбираем $x_0 \in B_\delta$ из условия $V(x_0) = V_0 > 0$. Выберем $\eta > 0 : |V(x)| \le V_0$ при $x \in \overline{B}_\eta$.

Предположим, что $x(t, x_0) \in \overline{B}_\varepsilon\ \forall\ t \ge 0$. Так как

$\dot{V}(x) \ge 0,$ то $V(x(t, x_0)) \ge V(x_0)$, $\forall\ t \ge 0 \Leftrightarrow x(t, x_0) \notin B_\eta$, $\forall\ t \ge 0.$

Итак,

$$x(t, x_0) \in \overline{B}_\varepsilon \setminus B_\eta\ \ \forall\ t \ge 0. \tag{36}$$

Положим $m = \inf\limits_{x \in B_\varepsilon ! B_\mu} \dot{V}(x) > 0$ (т.к. $\dot{V}$ - определенно-положительна и $\eta > 0$),

$$V(x(t, x_0)) = V(x_0) + \int_0^t \dot{V}(x(\tau, x_0)) d\tau \ge V(x_0) + mt \underset{t \to \infty}{\longrightarrow} + \infty. \tag{37}$$

Неравенство (3) противоречит свойству ограниченности $V(x)$ на компакте (36).

Значит, предположение $x(t,x_0)\in\overline{\mathrm{B}}_\varepsilon$ ложно, т.е. $x(t)\equiv 0$ неустойчиво по Ляпунову. Теорема доказана.

Теорема 14. (Вторая теорема А.М. Ляпунова о неустойчивости). *Пусть существует функция* $V\in C^1(D)$*,для которой* $\forall\,\varepsilon>0\;\exists\,x\in\mathrm{B}_\varepsilon: V(x)>0$, *и при этом производная в силу системы (27) удовлетворяет условию*

$$\dot V(x)=\lambda V(x)+\omega(x),\ \lambda>0\,. \tag{38}$$

Если $\omega(x)\ge 0,$ *то решение* $x(t)\equiv 0$ *системы (27) неустойчиво по Ляпунову.*

Доказательство. Выбираем $\varepsilon>0$ так, чтобы $\overline{\mathrm{B}}_\varepsilon\subseteq D.\ \forall\,\delta>0\;(\delta<\varepsilon)$, и выберем $x_0\in\mathrm{B}_\delta: V(x_0)=V_0>0$. Из уравнения (38) методом вариации произвольной постоянной получим:

$$V(x(t,x_0))=e^{\lambda t}\left\{V_0+\int\limits_0^t\omega(x(\tau,x_0))e^{-\lambda\tau}d\tau\right\}, \tag{39}$$

Откуда,

$$V(x(t,x_0))\ge V_0\cdot e^{\lambda t}\underset{t\to+\infty}{\longrightarrow}+\infty,\ \forall\,t\ge 0\,. \tag{40}$$

Если $x(t,x_0)\in\overline{\mathrm{B}}_\varepsilon\ \forall\,t\ge 0$, то формула (40) противоречит ограниченности $V(x)$ в $\overline{\mathrm{B}}_\varepsilon$.

Значит, $\|x(t,x_0)\|>\varepsilon$ при некоторых $t>0$. Теорема доказана.

Определение 20. Пусть $V\in C^1(\mathrm{B})$. Функция $\dot V(x)$ называется *определенно-положительной в области* $V(x)>0,$ если $\forall\,\varepsilon>0\;\exists\,\delta>0: x\in\mathrm{B},\,V(x)>\varepsilon\Rightarrow\dot V(x)>\delta$.

Теорема 15 (Н.Г. Четаев, [19]). *Пусть существует функция* $V\in C^1(\mathrm{B})$*, такая, что* $\forall\,\varepsilon>0\quad\exists\,x\in\mathrm{B}_\varepsilon: V(x)>0$. *Если* $\dot V(x)$ *- определенно-положительна в области* $V(x)>0,$ *то решение* $x(t)\equiv 0$ *системы (27) неустойчиво.*

Доказательство теоремы Четаева заинтересованный читатель может найти в [19, с. 31].

Замечания.

1) Теорема 9 об устойчивости автономных систем с функцией Ляпунова вида $V(x)$ необратима. Теорема 10 об асимптотической устойчивости обратима (см., например, [15], [16]).

2) Теоремы 13 - 15 о неустойчивости обратимы (см., например, [16], [17].).

Таким образом, существование функций типа Ляпунова не только достаточно, но и необходимо для свойств асимптотической устойчивости либо неустойчивости особой точки автономной системы.

Доказательства обратных теорем мы не приводим, т.к. они не позволяют эффективно построить функции Ляпунова для автономной системы (27) в общем случае. Однако, в зависимости от вида правой части системы $f(x)$, разработан ряд методов построения функции Ляпунова в виде квадратичной формы, полной энергии механической системы, линейной связки интегралов, и т.д. [8].

2.4. Устойчивость линейных систем

В настоящем разделе будем рассматривать линейные автономные системы, т.е. системы вида

$$\dot{x} = Ax,\ x \in R^n \ , \tag{41}$$

где A - матрица размерности $n \times n$.

В случае, если $A \in R^1$, то решение уравнения (41) имеет вид $x(t) = Ce^{At}$. Возникает вопрос: «Что понимать под e^{At}, если A - матрица размерности $n \times n$?» Воспользуемся принятым определением

$$e^{tA} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j A^j}{j!} = I + tA + \frac{t^2 A^2}{2!} + \dots \tag{42}$$

где I - единичная матрица. Ряд (42) сходится абсолютно $\forall\ t \in R$, т.к. $\|A\| < \infty$.

Решение задачи Коши для системы (41) с начальным условием $x(0) = x_0$ представимо в виде

$$x(t, x_0) = e^{tA} x_0 \,. \tag{43}$$

Действительно,

$$\dot{x}(t, x_0) = \frac{d}{dt} \sum_{j=0}^{\infty} \left(\frac{t^j A^j}{j!} \right) x_0 = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{j t^{j-1} A^j}{j!} x_0 = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{t^j A^j}{j!} A x_0 = e^{tA} x_0 = x(t, x_0),\ x(0, x_0) = I x_0 = x_0 \,.$$

Обозначим через $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$ - собственные значения матрицы A.

Критерии устойчивости решения x=0 линейной системы (41) можно эффективно описать в терминах собственных значений матрицы A.

Лемма 5. *Решение* $x \equiv 0$ *неустойчиво тогда и только тогда, когда* $\mathrm{Re}(\lambda_k) > 0$ *при некотором* $1 \le k \le n$.

Доказательство. Обозначим $\lambda_k = a + ib, a > 0, b \in R$. Тогда у системы (41) есть решение $\vec{x}(t)Ce^{at} \cdot \cos bt \cdot \vec{e}$, где $\vec{e} \ne \vec{0}, C \in R$. Если $x(0) \ne 0$, то $\|x(t)\| \xrightarrow[t\to\infty]{} \infty$, т.е. решение $x = 0$ неустойчиво.

Лемма 6. *Решение* $x \equiv 0$ *асимптотически устойчиво тогда и только тогда, когда* $\mathrm{Re}(\lambda_j) < 0$ $, \forall\ j = \overline{1,n}$.

Лемма 7 [7, с. 86]. *Решение* $x \equiv 0$ *устойчиво тогда и только тогда, когда* $\mathrm{Re}(\lambda_j) \le 0$ $, \forall\ j = \overline{1,n},$ *причем собственные значения* λ_j *с* $\mathrm{Re}(\lambda_j) = 0$ *допускают лишь простые элементарные делители (т.е. соответсвующие клетки Жордана сводятся к одному элементу).*

Для *доказательства* этих результатов воспользуемся известной теоремой линейной алгебры о приведении матрицы к жордановой форме. Согласно этой теореме существует матрица

$$S : \det S \ne 0 : A = S\, diag\left[J_{\lambda_1}(m_1), J_{\lambda_2}(m_2), \ldots J_{\lambda_k}(m_k)\right] S^{-1},$$

где $J_\lambda(m)$ - жорданова клетка размерности m, соответствующая собственному значению λ:

$$J_m(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda & 1 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \lambda & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda \end{pmatrix}.$$

Матрица $J = diag[J_{\lambda_1}(m_1), J_{\lambda_2}(m_2), \ldots J_{\lambda_k}(m_k)]$ определена единственным образом (с точностью до перестановки жордановых блоков). Так как $m_1 + m_2 + \ldots + m_k = n$, то

$$e^{tA} = S\, diag\left[e^{tJ_{\lambda_1}(m_1)}, \ldots e^{tJ_{\lambda_k}(m_k)}\right] S^{-1}. \tag{44}$$

Доказательство лемм 6 и 7 следует из представления (44), т.к.

$$\overline{\lim_{t\to+\infty}}\left\| e^{tJ_{\lambda_j}(m_j)} \right\| = \begin{cases} 0, \textit{если } \operatorname{Re}(\lambda_j) < 0, \\ C \neq 0, \textit{если } \operatorname{Re}(\lambda_j) = 0, \dim J_{\lambda_j}(m_j) = 1, \\ +\infty, \textit{если } \operatorname{Re}(\lambda_j) > 0. \end{cases}$$

Детальное доказательство этих утверждений приведено в [7].

Запишем характеристический многочлен матрицы A:

$$\det(\lambda I - A) = a_n \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_0. \tag{45}$$

Определение 21. Многочлен $f(\lambda) = a_n \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \ldots + a_0$ называется *многочленом Гурвица*, если $\operatorname{Re}(\lambda_j) < 0$, $\forall j = \overline{1,n}$.

Согласно лемме 6, асимптотическая устойчивость решения $x = 0$ эквивалентна тому, что (45) – многочлен Гурвица.

Лемма 8 [7, с. 91]. *Если $a_0 > 0, a_n \neq 0$, многочлен $f(\lambda)$ - гурвицев, то $a_j > 0, \forall j = \overline{1,n}$.*

Теорема 16. (Гурвиц) [7, с. 91]. *Предположим, что $a_0 > 0$, $a_n \neq 0$ и обозначим через M_f матрицу Гурвица*

$$M_f = \begin{pmatrix} a_1 & a_0 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_3 & a_2 & a_1 & 0 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{2n-1} & a_{2n-2} & \ldots & \ldots & \ldots & a_n \end{pmatrix},$$

в которой $a_s = 0$, если $s > n$ или $s < 0$. Многочлен $f(\lambda)$ - гурвицев тогда и только тогда, когда все главные диагональные миноры M_f положительны, т.е.

$$\Delta_1 = a_1 > 0,\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & a_0 \\ a_3 & a_2 \end{vmatrix} > 0, \ldots\ldots,\ \Delta_n = |M_f| > 0.$$

2.5. Устойчивость по линейному приближению

Применим результаты предыдущего раздела для исследования на устойчивость особых точек нелинейных автономных систем (27) по линейному приближению. Предположим, что $f(0) = 0,\ f \in C^1(B)$ и разложим функцию $f(x)$ в ряд Маклорена в окрестности положения равновесия. Тогда автономную систему (27) можно переписать в виде:

$$\dot{x} = Ax + R(x), \tag{46}$$

где

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{pmatrix}_{x=0}, \quad \|R(x)\| = o(\|x\|) \text{ при } x \to 0 \ . \tag{47}$$

Нулевое решение нелинейной системы (27) можно исследовать на устойчивость с помощью соответствующей линейной системы, полученной из (46) путем отбрасывания остаточного члена в формуле Маклорена [14].

Теорема 17. *Если все собственные значения матрицы* A *в (47) имеют отрицательные действительные части,* $\operatorname{Re}(\lambda_j) < 0\ \forall \lambda_j$, *то решение* $x = 0$ *системы (27) асимптотически устойчиво.*

Доказательство. Рассмотрим следующую функцию:

$$V(x_0) = \int_0^{+\infty} \left\| e^{tA} x_0 \right\|^2 dt \ . \tag{48}$$

Покажем, что $V(x_0)$ - функция Ляпунова для линейной системы:

$$\dot{x} = Ax \ . \tag{49}$$

Действительно,

$$V(x_0) = \int_0^{+\infty} \left(e^{tA} x_0, e^{tA} x_0\right) dt = \int_0^{+\infty} (e^{tA^*} e^{tA} x_0, x_0) dt = (Mx_0, x_0),$$

где $M = \int_0^{+\infty} e^{tA} e^{tA^*} dt$. Т.к. $\operatorname{Re}(\lambda_j) < 0\ \forall j = \overline{1,n},\ \min \operatorname{Re}(\lambda_j) = \lambda^* < 0,$ значит, $M < \infty$, т.е. $V(x_0)$ - квадратичная форма с матрицей M.

$V(0) = 0; V(x_0) > 0$ при $x_0 \neq 0$, т.е. V - определенно положительная квадратичная форма.

$V\left(e^{tA}x_0\right)-V(x_0)=\int\limits_t^{+\infty}\left\|e^{\tau A}x_0\right\|^2 d\tau$, $\dot V(x_0)=\lim\limits_{t\to 0}\dfrac{V\left(e^{tA}x_0\right)-V(x_0)}{t}=-\left\|e^{\tau A}x_0\right\|^2{}_{\tau=0}=-\left\|x_0\right\|^2$, с другой стороны $\dot V(x_0)=\left(\nabla V(x_0),Ax_0\right)=-\left\|x_0\right\|^2$.

Для нелинейной системы (27)

$$\dot V(x_0)=\left(\nabla V(x_0),Ax_0+R(x_0)\right)=-\left\|x_0\right\|^2+\left(\nabla V(x_0),R(x_0)\right)=-\left\|x_0\right\|^2\cdot\left(1+\bar o(1)\right) \text{ при } \left\|x_0\right\|\to 0. \quad (50)$$

Последнее означает, что $\dot V$ определенно отрицательна в некоторой окрестности $x=0$. Значит, решение $x=0$ системы (27) асимптотически устойчиво по теореме Ляпунова.

Теорема 18. (Об устойчивости по линейному приближению) [18]

1) Если $\operatorname{Re}(\lambda_j)<0,\ \forall\ j=\overline{1,n}$*, то решение* $x=0$ *системы (27) асимптотически устойчиво.*

2) Если $\operatorname{Re}(\lambda_j)>0$ *для некоторого* j*, то решение* $x=0$ *системы (27) неустойчиво.*

3) Если $\operatorname{Re}(\lambda_j)\le 0, \forall j=\overline{1,n}$ *и существует* $j:\operatorname{Re}(\lambda_j)=0$*, то решение* $x=0$ *может быть устойчивым либо неустойчивым, в зависимости от* $R(x)$ *(критический случай).*

Доказательство. Первый случай следует из теоремы 17.

Пусть $\lambda_1>0$. Тогда $\forall\varepsilon>0$ матрица A приводится к виду

$$A=S^{-1}\begin{pmatrix}\lambda_1 & \bar a_{12} & \dots & \bar a_{1n}\\ \bar a_{21} & \lambda_2 & \dots & \bar a_{2n}\\ \dots & \dots & \ddots & \dots\\ \bar a_{n1} & \bar a_{n2} & \dots & \lambda_n\end{pmatrix}S, \text{ где матрица } S \text{ невырождена и } \sum_{i\ne j}\bar a_{ij}^2<\varepsilon.$$

Выберем $\varepsilon<\dfrac{\lambda_1}{2}$. После замены $y=Sx$ имеем $\dot y=S\dot x=SAx=SAS^{-1}=\widetilde{A}y$. Неустойчивость по x эквивалентна неустойчивости по y. Выберем $V(y)=\dfrac{1}{2}y_1^2,\quad y=\begin{pmatrix}y_1\\ \vdots\\ y_n\end{pmatrix}$,

$\dot V(y)=y_1\dot y_1=y_1\left(\lambda_1 y_1+\sum\limits_{j=2}^{n}\widetilde a_{1j}y_j\right)+o\left(\left\|y\right\|^2\right)\ge\lambda_1 y_1^2+\varepsilon\left\|y\right\|^2+o\left(\left\|y\right\|^2\right)$. Таким образом $V(y)$ удовлетворяет условиям теоремы Четаева о неустойчивости. Если же $\lambda_{1,2}=\lambda^*\pm ib$, где $\lambda^*>0, b\in R$, то система (46) приводится к виду

$$\dot{y}_1 = \lambda^* y_1 + by_2 + L_1(y_3, \dots y_n),$$
$$\dot{y}_2 = -by_1 + \lambda^* y_2 + L_2(y_3, \dots y_n),$$
$$\begin{pmatrix} \dot{y}_3 \\ \vdots \\ \dot{y}_n \end{pmatrix} = \widetilde{A}_{(n-2)\times n} \cdot y,$$

где $\|L_1\| < \varepsilon, \|L_2\| < \varepsilon$.

Тогда функция $V_2(y) = \frac{1}{2} y_1^2 + \frac{1}{2} y_2^2$ удовлетворяет условиям теоремы о неустойчивости:

$\dot{V}_2 = \lambda^* y_1^2 + \lambda^* y_2^2 + r(y)$, где $|r(y)| \le C\varepsilon$. Теорема доказана.

2.6. Притяжение почти всюду

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений, которая имеет нулевое решение:

$$\dot{x}(t) = f(x(t)), \quad f(0) = 0, \quad f \in C^1(R^n \to R^n). \tag{51}$$

Обозначим через $x = x(t, x_0)$ решение системы (51), удовлетворяющее начальному условию $x|_{t=0} = x_0$.

Определение 22. Решение $x = 0$ системы (51) называется *притягивающим почти всюду*, если для почти всех $x_0 \in R^n$ решение $x(t, x_0)$ определено при $t \ge 0$ и $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t, x_0) = 0.$

Свойство «для почти всех x_0» означает, что $\exists\, M : \mu(R^n \setminus M) = 0$, и данное свойство выполнено для всех $x_0 \in M$, где $\mu(\cdot)$ - мера Лебега в R^n.

Лемма 9. [20] *Пусть* $f \in C^1(D \to R^n)$, D *- открытое подмножество из* R^n, Z *- измеримое подмножество* R^n, $t \in R$. *Если* $x(\tau, t) = \{x(\tau, x_0) : x_0 \in Z\} \subseteq D \ \forall \tau \in [0, t]$ *(или* $\tau \in [t, 0]$, *если* $t < 0$*), то*

$$\int\limits_{z \in x(t,z)} \rho(z) dz - \int\limits_{z \in Z} \rho(z) dz = \int\limits_0^t \int\limits_{x(\tau,z)} div(\rho f)(z) dz d\tau \ , \tag{52}$$

где $\rho(z)$ *-произвольная функция из* $C^1(D \to R) \cap L^1(D)$.

Доказательство. Если $M(t)$ – матрица класса C^1, $M(0)=I$, то

$$\frac{d}{dt}\left|M(t)\right|\Big|_{t=0}=tr\,M'(0). \tag{53}$$

Действительно,

$$M(t)=\begin{pmatrix} 1+m_{11}+\overline{o}(t) & \underline{o}(t) & \dots & \underline{o}(t) \\ \underline{o}(t) & 1+m_{22}t+\overline{o}(t) & \dots & \underline{o}(t) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \underline{o}(t) & \underline{o}(t) & \dots & 1+m_{nn}t+\overline{o}(t) \end{pmatrix} \text{ при } t\to 0,$$

где $M'(0)=\begin{pmatrix} m_{11} & \dots & m_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ m_{n1} & \dots & m_{nn} \end{pmatrix}$.

$$\left|M(t)\right|=\left(1+m_{11}t+\overline{o}(t)\right)+\ldots+\left(1+m_{nn}t+\overline{o}(t)\right)+\overline{o}(t)=1+\left(m_{11}+m_{22}+\ldots+m_{nn}\right)t+\overline{o}(t).$$

Отсюда $\frac{d}{dt}\left|M(t)\right|\Big|_{t=0}=m_{11}+\ldots+m_{nn}=tr\,M'(0)$. Возьмем $M(t)=\frac{\partial x(t,z)}{\partial z}$ - матрица Якоби решения. Так как $x(t,z)=z+t\cdot f(z)+\overline{o}(t)$, то $M(0)=I$. Применим формулу (53)

$$\frac{\partial}{\partial t}\left|M(t)\right|\Big|_{t=0}=tr\left\{\frac{\partial^2}{\partial t\partial z}x(t,z)\right\}_{t=0}.$$

Поскольку $x(t,z)=z+tf(z)+\overline{o}(t)$, то $\frac{\partial x(t,z)}{\partial t}\Big|_{t=0}=f(z))=tr\left\{\frac{\partial f(z)}{\partial z}\right\}=\frac{\partial f_1}{\partial z_1}+\frac{\partial f_2}{\partial z_2}+\ldots\frac{\partial f_n}{\partial z_n}=divf(z)$.

Для $\rho: D\to R^1$ обозначим

$$\rho_t(z)=\rho(x(t,z))\cdot\left|\frac{\partial x(t,z)}{\partial z}\right|, \tag{54}$$

где $\chi(z)=\begin{cases}1, z\in Z\\ 0, z\notin Z\end{cases}$.

Рассмотрим

$$\int\limits_{y\in x(t,Z)}\rho(y)dy-\int\limits_{z\in Z}\rho(z)dz=\int\limits_{R^n}\rho(y)\chi\left(x^{-1}(t,y)\right)dy-\int\limits_{Z}\rho(z)dz=\left\{\begin{matrix} z=x^{-1}(t,y)=x(-t,y) \\ y=x(t,z),\ dy=\left|\frac{\partial x(t,z)}{\partial z}\right|dz\end{matrix}\right\}= \tag{55}$$
$$\int\limits_{R^n}\rho((t,z))\chi(z)\left|\frac{\partial x(t,z)}{\partial z}\right|dz-\int\limits_{Z}\rho dz=\int\limits_{z\in Z}\left[\rho_t\,(z)-\rho(z)\right]dz,$$

где $\rho_t(z)$ определено формулой (54). Тогда

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho_t(t)|_{t=0} = \frac{\partial}{\partial t}\rho(x(t,z))\left|\frac{\partial x(t,z)}{\partial z}\right||_{t=0} = \nabla\rho\cdot f\left|\frac{\partial x(t,z)}{\partial z}\right| + \rho(z)\left|\frac{\partial x(t,z)}{\partial z}\right|'_{t=0} =$$
$$= \nabla\rho\cdot f(z) + \rho(z)div(f) == div(\rho f)(z) = [\nabla\cdot(\rho f)](z), \tag{56}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho_t(z)|_{t=\tau} = \frac{\partial}{\partial h}\{\rho_t + h(z)\}|_{h=0} = (\text{замена } t \text{ на } h \text{ в } (6)) = [\nabla\cdot(\rho f)](x(\tau,z))\cdot\left|\frac{\partial x(\tau,z)}{\partial z}\right|. \tag{57}$$

Применим к (55) формулу Ньютона-Лейбница по t с учетом (57):

$$\int_Z[\rho_t(z)-\rho(z)]dz = \int_Z\int_0^t\frac{d\rho_\tau(z)}{d\tau}d\tau dz = \int_0^t\int_Z[\nabla\cdot\rho f]\cdot(x(\tau,z))\cdot\left|\frac{\partial x(\tau,z)}{\partial z}\right|dzd\tau = \int_0^t\int_{y\in x(t,Z)}div(\rho\cdot f)(y)dyd\tau.$$

Теорема 19. (А. Рантцер) [20] *Пусть существует функция* $\rho\in C^1(R^n\setminus\{0\}\to R)$ *такая, что все решения* $x(t,x_0)$ *системы (51) определены для* $t\in R$, $\int_{|x|\geq 1}\rho(x)dx < \pm\infty$,

$$div(\rho f)(x) > 0 \text{ для почти всех } x\in R^n. \tag{58}$$

Если решение $x=0$ *системы (51) устойчиво по Ляпунову, то оно является притягивающим почти всюду.*

Доказательство. Выберем произвольное число $r>0$. Определим множество $Z=\bigcap_{l=1}^{\infty}\{x_0 : |x(t,x_0)| > r \text{ при некотором } t>l\}$. Множество Z является измеримым множеством (как пересечение счетного набора открытых множеств).

Если $\overline{\lim_{t\to+\infty}}|x(t,x_0)| > r$, то $x_0\in Z$. Если $x_0\notin Z$, то $\overline{\lim_{t\to-\infty}}|x(t,x_0)|\leq r$. Покажем, что $\mu(Z)=0$.

Сначала покажем, что

$$x(t,Z)=\{x(t,x_0): x_0\in Z\} = Z, \forall\, t\in R. \tag{59}$$

Действительно,

а) $Z\subseteq x(t,Z)$. Если $y\in Z$, то $\exists\{t_l\}\to+\infty : |x(t_l,y)|>r$. Возьмем $x_0 = x(-t,y)$, тогда $x(t,x_0)=y$.

$|x(tl+t,x_0)| = |x(tl+t,x(-t,y))| = |x(t_l;y)| > r\ \forall\, l=1,2...$

б) Включение $Z\supseteq x(t,Z)$ доказывается аналогично.

Согласно определению устойчивости для $r>0\ \exists\,\delta(r)>0$:

$|x_0|<\delta \Rightarrow |x(t,x_0)|\leq r\ \forall\, t\geq 0 \Rightarrow x_0\notin Z,$ итак $D=\{x:|x|>\delta\}\supseteq Z.$

Применим лемму 9 при условии

$$\int_{x(t,Z)} \rho(z)dz - \int_Z \rho(z)dz = 0.$$

Тогда

$$0 = \int_0^t \int_Z div(\rho f)(z)dzd\tau, \quad \forall t \geq 0 \quad \Rightarrow \int_Z div(\rho f)(z)dz = 0. \tag{60}$$

Из (60) и (58) следует, что $\mu(Z) = 0$. Ввиду произвольности $r > 0$, можно выбрать последовательность $r_m > 0 : r_m \to 0, m \to \infty$, и соответствующие ей множества Z_m. Тогда, $\widetilde{Z} = \bigcup_{m=1}^{\infty} Z_m$; $\mu(\widetilde{Z}) = 0$, т.к. $\mu(Z_m) = 0$, $\forall m.$ Если $x_0 \in R^n \setminus \widetilde{Z}$, то $\varliminf_{t \to +\infty} |x(t, x_0)| = 0.$

Теорема 20. (А. Рантцер) [20] *Пусть существует функция* $\rho \in C^1(R^n \setminus \{0\} \to R)$, $\rho(x) \geq 0$, *удовлетворяющая условиям*

$$\int \frac{|\rho(x) f(x)|}{|x|} dx < \pm\infty,$$

$$div(\rho f)(x) > 0 \text{ *для почти всех* } x \in R^n. \tag{61}$$

Тогда для почти всех $x_0 \in R^n$, $x(t, x_0)$ *определено на промежутке* $t \in [0, +\infty)$ *и* $\lim_{t \to +\infty} x(t, x_0) = 0.$

Доказательство. Для доказательства теоремы нам понадобится следующее утверждение:

Лемма 10. *Пусть* (χ, A, μ)- *пространство с мерой,* $A - \sigma$*-алгебра измеримых множеств.* $P \in A$, $\mu(P) < \infty, T : \chi \to \chi$ - *измеримое отображение. Предположим, что* $\mu(T^{-1}Y) \leq \mu(Y), \forall Y \in A.$

Определим множество

$Z = \{\chi \subset P : T^n(x) \in P$ *для бесконечного множества индексов* $n \geq 0\}$. *Тогда* $\mu(T^{-1}Z) = \mu(Z)$.

Предположим вначале, что $\frac{|f(x)|}{|x|} \leq C, \int_{|x| \geq 1} \rho(x)dx < +\infty$, тогда $\forall\ x_0 \in R^n$ решение $x(t, x_0)$ определено для всех $t \in R$. Возьмем произвольное $r > 0$ и рассмотрим:

$$P = \{x : |x| > r\}, \ \chi = R^n, \ \mu(Y) = \int_Y \rho(x)dx, \ T(x_0) = x(1, x_0).$$

По лемме 9 для любого измеримого множества $Y \subset P$ имеем:

$$\int_{X(1,Y)} \rho(y)dy - \int_Y \rho(y)dy = \int_0^1 \int_{x(\tau,y)} div(\rho f) y\, dy d\tau .$$

Отсюда следует $\mu(T^{-1}\widetilde{Y}) \leq \mu(\widetilde{Y})$; $\mu(TY) \geq \mu(Y)$; $\widetilde{Y} = T(Y), Y = T^{-1}(\widetilde{Y})$.

Определим множество Z:

$Z = \{x_0 : |x_0| > r, |x(n, x_0)| > r$ *для бесконечного множества* $n \geq 0\}$.

Тогда по лемме 10: $\mu(T^{-1}(Z)) = \mu(Z)$. Применим также лемму 9:

$0 = \mu(T^{-1}(Z)) - \mu(Z) = \int\limits_{Y \in T^{-1}Z} \rho(y)dy - \int\limits_{Z} \rho(y)dy = \int\limits_{-1}^{0} \int\limits_{x(\tau,z)} div(\rho f)(y)dyd\tau \Rightarrow \mu(x(\tau, z)) = 0$ для почти всех $\tau \in [-1,0]$. С учетом непрерывности $\mu, x(t, x_0)$, получаем, что $\mu(z) = 0$ (при $\tau = 0$).

Это означает, что для почти всех x_0 (т.е. $x_0 \in R^n \setminus Z$) выполнено условие:

$|x(n, x_0)| > r$ лишь для конечных $n \geq 0$, т.е. $\overline{\lim\limits_{n \to \infty}} |x(n, x_0)| \leq r$, для почти всех x_0. Отсюда в силу произвольности $r > 0 \Rightarrow \overline{\lim\limits_{n \to +\infty}} |x(n, x_0)| = 0$, для почти всех $x_0 \in R^n$.

Пусть $[t]$ - целая часть от t. Из неравенства $\frac{|f(x)|}{|x|} \leq C \Rightarrow |\dot{x}| \leq C|x|$, отсюда:

$|x(t)| \leq \exp\{C(t - [t])\} \cdot |x([t])| \leq e^C \cdot |x([t])| \to 0$ в том числе для нецелых t.

Теорема 21. (Критерий Бендиксона) [15] *Если* $\operatorname{div} f(x) \neq 0$, $\forall x \subseteq G \subseteq R^2, f \in C^1(G)$, *то в односвязной области G нет периодических неособых решений системы (51).*

Доказательство проведем методом от противного. Предположим, что существует решение $\tilde{x}(t) \in G : \tilde{x}(0) = \tilde{x}(l)\ (l > 0), \tilde{x}(t) \neq const, \tilde{x}(t)$ - решение (51). Обозначим через $C = \{x = \tilde{x}(t), t \in [0, l]\}$ замкнутую кривую в односвязной области G. По лемме Жордана кривая C делит область G на две части. Внутреннюю часть обозначим через Γ, внешнюю - $G \setminus \Gamma$.

Рассмотрим

$$f(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} f_1(x_1, x_2) \\ f_2(x_1, x_2) \end{pmatrix},$$

$$\int\limits_C f_1(x_1, x_2)dx_2 - f_2(x_1, x_2)dx_1 = \begin{Bmatrix} dx_2 = f_2 dt \\ dx_1 = f_1 dt \end{Bmatrix} = \int\limits_0^l (f_1 f_2 - f_2 f_1)dt = 0.$$

По формуле Стокса

$$0 = \int\limits_C f_1 dx_2 - f_2 dx_1 = \iint\limits_\Gamma \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \frac{\partial f_2}{\partial x_2} \right) dx_1\, dx_2\ . \qquad (62)$$

Из выражения (62) следует, что либо $\operatorname{div} f(x) \equiv 0$, либо $\operatorname{div} f(x)$ принимает значения обоих знаков в G. В последнем случае по теореме Коши о промежуточном значении

$\exists\, x^* \in G : \operatorname{div} f\left(x^*\right) = 0$, что противоречит условию теоремы. Итак, периодических решений $\tilde{x}(t) \neq \text{const}$ в области G нет.

2.7. Системы с интегральным инвариантом

Автономную систему

$$\dot{x} = f(x),\ x \in D \subseteq R^n,\ f \in C^1(D) \tag{63}$$

будем называть *системой с интегральным инвариантом*, если существует такая функция $\rho : D \to R$, что

$$\int\limits_{X(t;M_0)} \rho(z)dz \equiv I(M_0)$$

для любого измеримого множества $M_0 \subseteq D$, где

$X(t, M_0) = \{x(t, x_0) : x_0 \in M_0\} \subseteq D,\ t \subseteq R$. При этом функция $\rho(x)$ называется *плотностью интегрального инварианта*, а выражение

$$I(M_0) = \int\limits_{M_0} \rho(x)dx$$

называется *интегральным инвариантом* системы (63) [15].

Из леммы 9 следует, что для интегрального инварианта

$$0 = \int\limits_{X(t,M_0)} \rho(z)dz - \int\limits_{M_0} \rho(x)dx = \int\limits_0^t \int\limits_{X(\tau,M_0)} div(\rho \cdot f(z))dzd\tau\,,$$

т.е.

$$div(\rho f)(x) = 0,\ \forall x \in D\,. \tag{64}$$

Таким образом, условие (64) – необходимое условие того, чтобы функция $\rho(x)$ была плотностью интегрального инварианта.

Если $\rho(x) > 0,\ \forall x \in D$ и $\rho \in L_1(D)$, то интегральный инвариант системы задает меру на множестве D, а именно:

$$\mu(A) = \int\limits_A \rho(x)dx, \forall A \subseteq D. \tag{65}$$

Определение 23. Мера μ называется *инвариантной* для системы (63), если множество D-измеримо, инвариантно для системы (63) и

$$\mu(x(t,A)) \equiv \mu(A), \forall\, t \in R, \forall A \subseteq D,\ A - \mu \text{ - измеримое.}$$

Заметим, что частным случаем меры (65) является мера Лебега с единичной плотностью.

Теорема 22. (Пуанкаре – Каратеодори о возвращении множеств) [15] *Пусть* D – *инвариантное множество для системы (63),* μ*-инвариантная мера на множестве* $D, \mu(D) < \infty,\quad A \subseteq D$ *- измеримо,* $\mu(A) = m > 0.$ *Тогда* $\exists\, t : |t| \ge 1 : \mu(A \cap x(t, A)) > 0.$

Доказательство. Построим $A_n = x(n, A),\quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ Предположим, что множество $\mu(A_i \cap A_j) = \varnothing$ при $i \ne j$. По свойству счетной аддитивности меры

$$\mu(A_0 \cup A_1 \cup \ldots \cup A_n \cup \ldots) = \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n) - \mu(A_0 \cap A_1) - \mu(A_0 \cap A_2) - \ldots + \mu(A_0 \cap A_1 \cap A_2) + \ldots =$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \mu(A_n). \tag{66}$$

С одной стороны,

$$\mu(A_0 \cup A_1 \cup \ldots \cup A_n \cup \ldots) \le \mu(D) < \infty, \tag{67}$$

с другой стороны, из инвариантности μ следует, что $\mu(A_n) = \mu(A) = m > 0$.

Из формулы (66) получим: $\mu(A_0 \cup \ldots \cup A_n \cup \ldots) = \sum_{n=0}^{\infty} m = \infty$, что противоречит (67). Следовательно, существует $i < j : \mu(A_i \cap A_j) > 0$, тогда $\mu(x(-i, A_i) \cap x(-i, A_j)) > 0, \mu(A_0 \cap x(j - i, A_0)) > 0$.

Теорема 23. (О возвращении точек) [15] *Пусть* D*-инвариантное множество для системы (63),* μ*-инвариантная мера на* D*,* $\mu(D) < \infty, \mu(A) > 0$ *для любого открытого множества* $A \subseteq D$.

Тогда почти все (по мере μ*) точки* $p \in D$ *устойчивы по Пуассону, т.е.*

$\exists\, t_n^+ \to +\infty : \lim\limits_{n\to\infty} x(t_n^+, p) = p$,

$\exists\, t_n^- \to -\infty : \lim\limits_{n\to\infty} x(t_n^-, p) = p$ *для почти всех* $p \in D$.

Доказательство. Рассмотрим произвольное измеримое множество

$$A \subset D,\ \mu(A) > 0,\ A_n = x(n, A), \tag{68}$$

$n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

$$A_{01}=A_0\cap A_1\,,\,A_{02}=A_0\cap A_2,\ldots A_{0n}=A_0\cap A_n,\ldots,A_{0\infty}=A_0\setminus\bigcup_{n=1}^{\infty}A_{0n},$$

$$A_{12}=A_1\cap A_2,\ldots A_{1n}=A_{1n},\ldots,A_{1\infty}=A_1\setminus\bigcup_{n=2}^{\infty}A_{1n},\ldots.$$

Покажем, что $\mu(A_{0\infty})=0$. Предположим, от противного, что $\mu(A_{0\infty})=m>0.$ Тогда

$$X(1,A_{0\infty})=X\left(1,A_0\setminus\bigcup_{n=1}^{\infty}A_{0n}\right)=X(1,A_0)\setminus\bigcup_{n=1}^{\infty}X(1,A_{0n})=A_1\setminus\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigl(X(1,A_0)\cap X(1,A_n)\bigr)=$$

$$=A_1\setminus\bigcup_{n=1}^{\infty}A_1\cap A_{n+1}=A_{1\infty}.$$

Отсюда $X(n,A_{0\infty})=A_{n\infty},n=1,2,\ldots\quad \mu(A_{0\infty})=\mu(A_{1\infty})=\ldots=\mu(A_{n\infty})=\ldots=m>0\,,\forall n.$

Докажем, что $A_{i\infty}\cap A_{j\infty}=\varnothing$ при $j>i$. По построению $A_{0\infty}\cap A_i=\varnothing,i\geq 1$. Поскольку $A_i\supset A_{i\infty}\Rightarrow A_{0\infty}\cap A_{i\infty}=\varnothing,$ то $A_{i\infty}\cap A_{j\infty}=\varnothing.$ Отсюда,

$\infty>\mu(D)\geq\mu(A_{0\infty}\cup A_{1\infty}\cup\ldots)=\sum_{n=0}^{\infty}\mu(A_{n\infty})=m\cdot\infty=\infty$. Получили противоречие. Итак,

$$\mu(A_{0\infty})=0.$$

Пусть $\{U^{(k)}\}$ - счетная база в D, т.е. $U^{(k)}$ - открытые множества $\forall\, k,$ и для каждого открытого множества $U\in D\quad\exists\, k:U^{(k)}\subset U.$ Для каждого $U^{(k)}$ построим множество $U_{0\infty}^{(k)}$ как в (68). Строим множество $\varepsilon=\bigcup_{k=1}^{\infty}U_{0\infty}^{(k)}$, $\mu(\varepsilon)=0$ по доказанному. Докажем, что $\forall\, p\in D\setminus\varepsilon\Rightarrow\exists\, t_n^-\to-\infty:\ \lim_{n\to\infty}x(t_n^-,p)=p.$ По построению ε, если $p\in D\setminus\varepsilon$, то $\forall U^{(k)}\supset p\ \exists\, n\geq 1:p\in x(n,U^{(k)}),\ U_{0\infty}^{(k)}=U_0^{(k)}\setminus\bigcup_{n=1}^{\infty}U_{0n}^{(k)},\quad U^{(k)}=U_0^{(k)}$. Сдвиг на $-n$ дает:

$$x(p,-n)\in U^{(k)}\quad. \tag{69}$$

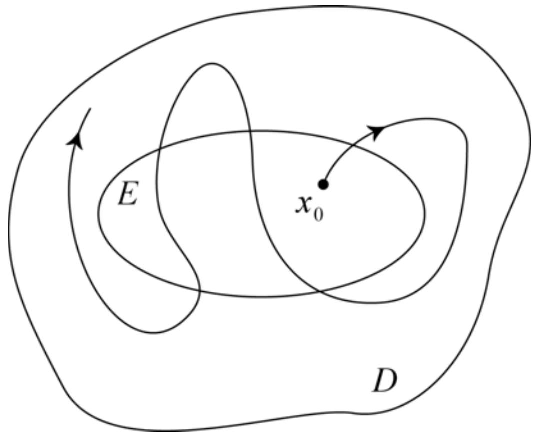
Ввиду произвольности окрестности $U^{(k)}\supset p$, из (69) следует, что $\lim_{n\to\infty}x(t_n^-,p)=p$ для некоторой последовательности $t_n^-\to-\infty.$

Заменой n на $-n$ в формуле (67) получим, что $\lim_{n\to\infty}x(t_n^+,p)=p$ для почти всех $p\in D$, для некоторой последовательности $t_n^+\to+\infty$.

3. Эргодические теоремы Биркгофа

Предположим, что существует единственное решение $x = x(t, x_0)$ задачи Коши с начальным условием $x(0, x_0) = x_0$, $\forall\, x_0 \in D, t \in R$. Рассмотрим измеримое множество $E \subseteq D$, и определим

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, x \in E, \\ 0, x \in D \setminus E \end{cases}.$$



Среднее время нахождения в E решения $x(t, x_0)$ определим по формуле

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \chi_E(x(t, x_0))dt\,. \tag{70}$$

Возникает вопрос об условиях существования предела в выражении (70). Ответом на такой вопрос является следующее утверждение [15]:

Теорема 24. *Пусть μ-инвариантная мера для (63) в D, $\mu(D) = 1$. Тогда $\forall\ \varphi \in L_1(D)$ существует*

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \varphi(x(t, x_0))dt, \quad \forall x_0 \in D \setminus \varepsilon,\ \mu(\varepsilon) = 0. \tag{71}$$

Замечание. Существование предела (71) достаточно доказать для целых $T \to \infty$. Действительно,

$$\left| \frac{1}{T} \int_0^T \varphi(x(t, x_0))dt - \frac{1}{[T]} \int_0^{[T]} \varphi(x(t, x_0)) \right| \le \left| \frac{1}{T} \int_0^T \varphi dt - \frac{1}{T} \int_0^{[T]} \varphi dt \right| + \left| \left(\frac{1}{T} - \frac{1}{[T]} \right) \int_0^{[T]} \varphi dt \right| \le$$

$$\le \frac{1}{T} \left| \int_{[T]}^T \varphi dt \right| + \frac{1}{T[T]} \left| \int_0^{[T]} \varphi dt \right| \to 0 \text{ при } T \to \infty.$$

Если существует $\lim\limits_{T\to\infty} \frac{1}{[T]} \int_0^{[T]} \varphi dt, \forall \varphi \in L_1$ п.в. $x_0 \in D$, то

$$\frac{1}{T}\left|\int\limits_{[T]}^{T}\varphi dt\right| \le \frac{1}{T}\int\limits_{[T]}^{T}|\varphi|dt \le \frac{1}{T}\int\limits_{[T]}^{[T]+1}|\varphi|dt = \frac{1}{T}\left\{\int\limits_{0}^{[T+1]}|\varphi|dt - \int\limits_{0}^{[T]}|\varphi|dt\right\} = \frac{[T]+1}{T}\cdot\frac{1}{[T]+1}\int\limits_{0}^{[T]+1}|\varphi|dt -$$

$$-\frac{[T]}{T}\cdot\frac{1}{[T]}\int\limits_{0}^{[T]}|\varphi|dt \underset{T\to\infty}{\to} 0,$$

при условии существования $\lim\limits_{m\to\infty}\frac{1}{m}\int\limits_{0}^{m}|\varphi|dt, \quad m\in N.$

Определение 24. Автономная система (63) называется *неразложимой по мере* μ, если $\forall A\subseteq D: \mu(A) > 0$, из инвариантности A следует, что $\mu(D\setminus A) = 0.$

Теорема 25. *Если* μ*-инвариантная мера для (63),* $\mu(D)=1$*, система (63) неразложима по мере* $\mu, \varphi\in L_1(D)$*, то*

$$\lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int\limits_{0}^{T}\varphi(x(t,x_0))dt = \psi(x_0) = const, \quad \forall x_0 \in D\setminus\varepsilon : \mu(\varepsilon) = 0.$$

Доказательство. По теореме 24 значение $\psi(x_0)$ определено почти для всех x_0. Покажем, что $\psi(x_0)$ инвариантна, т.е.

$$\psi(x_0) = \psi(x(t,x_0)), \quad \forall x_0 \in D\setminus\varepsilon, \forall t\in R.. \tag{72}$$

Имеем

$$\psi(x(t_0,x_0)) - \psi(x_0) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int\limits_{0}^{T}\varphi(x(t+t,x_0))dt - \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int\limits_{0}^{T}\varphi(x(t,x_0))dt = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\left\{\int\limits_{t_0}^{t_0+T}\varphi dt - \int\limits_{0}^{T}\varphi dt\right\} =$$

$$= \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int\limits_{T}^{T+t_0}\varphi dt + \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int\limits_{t_0}^{0}\varphi dt = 0.$$

Так как $\frac{1}{T}\int\limits_{0}^{T}\varphi dt$ сходится, следовательно $\frac{1}{T}\int\limits_{T}^{T+t_0}\varphi dt$ сходится к нулю. Таким образом, показали выполнение условия (72). Доказательство теоремы проведем от противного. Предположим, теорема неверна, т.е. $\inf\limits_{x_0\in D\setminus\tilde{\varepsilon}}\psi(x_0) < \sup\limits_{x_0\in D\setminus\tilde{\varepsilon}}\psi(x_0), \forall\tilde{\varepsilon}\subseteq D: \mu(\tilde{\varepsilon}) = 0$. Определим $M = ess\sup\limits_{D}\psi(x); \quad m = ess\inf\limits_{D}\psi(x), \quad M > m$. Выберем произвольное число $\alpha\in(m,M)$.

Пусть $M_\alpha = \{x_0\in D: \psi(x_0) > \alpha\}$. По свойствам $ess\sup, ess\inf: \mu(M_\alpha) > 0,$
$\mu(D\setminus M_\alpha) = \mu\{x_0 : \psi(x_0)\le\alpha\} > 0$. Множества M_α и $D\setminus M_\alpha$ инвариантны вследствие оценки (72). Это противоречит свойству неразложимости системы по мере μ. Теорема доказана.

Теорема 26. [15, с. 491] *Пусть* μ*-инвариантная мера для (63) в* D*,* $\mu(D)=1$*,* $\varphi \in L_1(D)$*, функция* $\psi(x)$ *определена в теореме 25. Тогда*

$$\int\limits_D \varphi(p)d\mu = \int\limits_D \psi(p)d\mu, \ \forall\, \varphi \in L_1(D).$$

Замечание. Если система (63) неразложима по мере μ, то из теорем 25 и 26 следует:

$$\int\limits_D \psi(p)d\mu = C\cdot\mu(D) = C = \int \varphi(p)d\mu .$$

В частном случае для $\varphi(p)=\varphi_E(p)=\begin{cases}1, p\in E\\ 0, p\in d\setminus E\end{cases}$, получим:

$\lim\limits_{T\to\infty}\dfrac{1}{T}\int\limits_0^T \varphi_E(x(t,x_0))dt = C = \mu(E)$ (среднее время нахождения во множестве E).

Более подробное освещение эргодической теории можно найти в [15].

4. Классификация особых точек на плоскости

Рассмотрим линейную автономную систему второго порядка

$$\begin{cases}\dfrac{dy_1}{dt} = a_{11}y_1 + a_{12}y_2,\\ \dfrac{dy_2}{dt} = a_{21}y_1 + a_{22}y_2.\end{cases} \tag{73}$$

Предположим, что O = (0,0) – изолированная особая точка системы (73). Систему (73) можно свести к уравнению с разделенными переменными с помощью следующего приема:

$$dt = \frac{dy_1}{a_{11}y_1 + a_{12}y_2} = \frac{dy_2}{a_{21}y_1 + a_{22}y_2};\ \frac{dy_2}{dy_1} = \frac{a_{21}y_1 + a_{22}y_2}{a_{11}y_1 + a_{12}y_2};\ z = \frac{y_2}{y_1};$$

$$\frac{d(zy_1)}{dy_1} = \frac{y_1dz + zdy_1}{dy_1} = \frac{y_1dz}{dy_1} + z = \frac{a_{21} + a_{22}z}{a_{11} + a_{12}z},\ \frac{y_1dz}{dy_1} = \frac{a_{21} + a_{22}z - a_{12}z - a_{12}z^2}{a_{11} + a_{12}z} = \frac{dy_2}{dy_1},$$

Рассмотрим вспомогательное квадратное уравнение

$$a_{12}z^2 - (a_{22} - a_{11})z - a_{21} = 0 .$$

Возможны 4 случая расположения корней этого уравнения:

1) $z_1 = \alpha_1, z_2 = \alpha_2, \quad \alpha_1 \neq \alpha_2$ - вещественные корни разных знаков,

2) α_1 и α_2 - вещественные корни одного знака,

3) $\alpha_1 = \alpha_2$ - кратные корни,

4) $\alpha_1 = \overline{\alpha}_2$ - комплексно-сопряженные корни.

В зависимости от расположения корней характеристического уравнения, возможны следующие типы (по Пуанкаре) особой точки O (см. [1, с. 11], [15, с. 84-93]).

1) Если собственные числа λ_1, λ_2 матрицы A правой части системы (73) удовлетворяют условию

$\lambda_1 \cdot \lambda_2 < 0$, тогда точка O - **седло.**

2) Если λ_1, λ_2 - вещественны, различны и $\lambda_1 \cdot \lambda_2 > 0$, то точка O - **узел.**

3) Если $\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$, A - недиагональная матрица, тогда точка O – **вырожденный узел**. Если $\lambda_1 = \lambda_2 \neq 0$, A - диагональная матрица, то точка O – **особый узел.**

4) Если $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i\beta$, $\alpha, \beta \in R$, $\alpha\beta \neq 0$, то точка O – **фокус**, если $\lambda_{1,2} = \pm i\beta$, $\beta \in R$, $\beta \neq 0$, то точка O - **центр.**

Теорема 27. Если особая точка $y = 0$ системы (73) имеет тип фокус, центр или узел, то $\operatorname*{ind}\limits_{y=0}\begin{pmatrix} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 \end{pmatrix} = 1$, если седло, то $\operatorname*{ind}\limits_{y=0}\begin{pmatrix} a_{11}y_1 + a_{12}y_2 \\ a_{21}y_1 + a_{22}y_2 \end{pmatrix} = -1$.

Доказательство. Систему (73) можно рассматривать в виде: ($y_1 = x, y_2 = y$).

$$\begin{cases} \dot{x} = cx + dy, \\ \dot{y} = ax + by. \end{cases}$$

По формуле вычисления индекса

$$\operatorname*{ind}\limits_{x=y=0} f = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{\substack{x=0 \\ y=0}} \frac{pdq - qdp}{p^2 + q^2} \quad , \tag{74}$$

в которой

$p(x, y) = f_1(x, y) = cx + dy,\ q(x, y) = f_2(x, y) = ax + by,$ имеем:

$$
\begin{aligned}
&\underset{\substack{x=0\\y=0}}{ind} f = J_0 = \frac{1}{2\pi}\int_\gamma \frac{(cx+dy)\partial(ax+by)-(ax+by)\partial(cx+dy)}{(cx+dy)^2+(ax+by)^2} = \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_\gamma \frac{(acx+ady-acx-bcy)\partial x+(bcx+bdy-adx-bdy)\partial y}{(cx+dy)^2+(ax+by)^2} = \\
&\frac{\Delta}{2\pi}\int_\gamma \frac{ydx-xdy}{(cx+dy)^2+(ax+by)^2}.
\end{aligned}
\tag{75}
$$

Здесь обозначено $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$. Пусть $\gamma : (cx+dy)^2 + (ax+by)^2 = 1$-эллипс, если $\Delta \neq 0$. Тогда формула (74) определяет J_0 через площадь внутри эллипса:

$$
J_0 = \frac{\Delta}{2\pi}\int_\gamma ydx - xdy = \frac{\Delta}{2\pi}\iint_{\operatorname{int}\gamma} 2dxdy = \frac{\Delta \cdot S}{\pi}. \tag{76}
$$

Вычислим площадь эллипса:

$S = \iint\limits_{(cx+dy)^2+(ax+by)^2\le 1} dxdy = \left\{ \begin{array}{l} \tilde{x} = cx+dy \\ \tilde{y} = ax+by \\ d\tilde{x}d\tilde{y} = \Delta dxdy \end{array} \right\} = \iint\limits_{\tilde{x}^2+\tilde{y}^2\le 1} \frac{1}{\Delta} d\tilde{x}d\tilde{y} = \frac{\pi}{|\Delta|}$. Из формулы (76) следует, что

$J_0 = \dfrac{\Delta S}{\pi} = \dfrac{\Delta}{|\Delta|} = sign\Delta$.

Характеристическое уравнение для системы (73) имеет вид:

$\begin{vmatrix} a-\lambda & b \\ c & d-\lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - (a+d)\lambda + \Delta$, т.е. по теореме Виета $\lambda_1 \cdot \lambda_2 = \Delta$.

Если точка O-седло, то $\lambda_1\lambda_2 < 0 \Rightarrow J_0 = -1$. Если точка O-фокус, узел или центр, то $\lambda_1\lambda_2 > 0 \Rightarrow J_0 = 1$. Теорема доказана.

Следствие. Седло всегда неустойчиво по теореме об индексе устойчивого решения. Седло является «грубым» свойством, т.е. малое изменение коэффициентов системы (73) в случае седла не меняет тип особой точки.

5. Приложение качественной теории дифференциальных уравнений: экологическая задача межвидового взаимодействия

Рассмотрим пример, который наглядно иллюстрирует приложения качественной теории, а именно использование методов исследования устойчивости и асимптотической устойчивости положения равновесия.

Впервые задачу межвидового взаимодействия рассмотрел А. Лотка в 1920 г., а затем В. Вольтерра [6], который пытался объяснить циклические колебания улова рыб в Адриатике. Н. Гоэл писал: «Было явно замечено, что популяции двух видов рыб изменялись с одним и тем же периодом, но с некоторым отклонением по фазе. Один из этих видов представлял собой мелкую рыбу, другой – более крупную. Представлялось, как будто большие рыбы поедали мелких, росли и размножались до тех пор, пока численность мелких рыб не падала до того уровня, что становилась недостаточной для поддержания уровня жизни больших рыб. После уменьшения численности популяции крупных рыб популяция мелких процветала, что снова могла поддерживать численность крупной рыбы».

Построим математическую модель Лотки – Вольтерры межвидового взаимодействия и исследуем на устойчивость положения равновесия полученных моделей.

Пусть N_1 – число рыб-жертв, служащих пищей для рыб-хищников, а через N_2 обозначим число этих хищников. Предположим, что при отсутствии хищников рождаемость $\frac{dN_1}{dt} : N_1$ среди первой популяции постоянна, обозначим её через α_1. Аналогично, будем считать, что при отсутствии первой популяции смертность среди хищников постоянна и представляется константой α_2. При наличии хищников рождаемость рыб-жертв должна быть скорректирована на отрицательную величину, которую мы будем предполагать пропорциональной числу хищников. Можно также считать, что вероятность встречи рыб первой популяции с хищниками пропорциональна произведению $N_1 N_2$.

Таким образом, приходим к следующей системе дифференциальных уравнений, представляющих собой математическую модель данной задачи:

$$\dot{N}_1 = N_1(\alpha_1 - \lambda_1 N_2),$$
$$\dot{N}_2 = N_2(-\alpha_2 + \lambda_2 N_1), \tag{77}$$

где $\alpha_1, \alpha_2, \lambda_1, \lambda_2 -$положительные числа. Эти уравнения имеют смысл только при $N_1 \geq 0, N_2 \geq 0$, так как представляют собой количества представителей популяций. Однако, с математической точки зрения систему (77) можно изучать во всей плоскости (N_1, N_2).

Существуют два положения равновесия системы (77): $(N_1, N_2) = (0,0)$, $(N_1, N_2) = \left(\dfrac{\alpha_2}{\lambda_2}, \dfrac{\alpha_1}{\lambda_1}\right)$.

Исследуем их на устойчивость.

Первое неустойчиво, поскольку при $N_2 = 0, N_1(t) = e^{\alpha_1 t} \to \infty, t \to \infty,$ так как $\alpha_1 > 0.$ Второе положение равновесия исследуем на устойчивость с помощью построения первого интеграла системы (77), который имеет вид:

$$V(N_1, N_2) = N_1 - \frac{\alpha_2}{\lambda_2} - \frac{\alpha_2}{\lambda_2}\ln\frac{\lambda_2}{\alpha_2}N_1 + \frac{\lambda_1}{\lambda_2}\left(N_2 - \frac{\alpha_1}{\lambda_1} - \frac{\alpha_1}{\lambda_1}\ln\frac{\lambda_1}{\alpha_1}N_2\right). \tag{78}$$

Разложим функцию (78) в ряд Тейлора в окрестности положения равновесия $(N_1, N_2) = \left(\dfrac{\alpha_2}{\lambda_2}, \dfrac{\alpha_1}{\lambda_1}\right)$.

$$V(N_1, N_2) = \frac{1}{2}\frac{\lambda_2}{\alpha_2}\left(N_1 - \frac{\alpha_2}{\lambda_2}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\frac{\lambda_1}{\alpha_1}\left(N_2 - \frac{\alpha_1}{\lambda_1}\right)^2 + \cdots$$

Откуда следует положительная определенность функции (78) в окрестности положения равновесия $(N_1, N_2) = \left(\dfrac{\alpha_2}{\lambda_2}, \dfrac{\alpha_1}{\lambda_1}\right)$. Следовательно, решение $(N_1, N_2) = \left(\dfrac{\alpha_2}{\lambda_2}, \dfrac{\alpha_1}{\lambda_1}\right)$ устойчиво по Ляпунову.

Рассмотренная задача может быть обобщена на случай экологического взаимодействия n видов следующим образом:

$$\frac{dN_i}{dt} = N_i\left(k_i + \beta_i^{-1}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}N_j\right), i = 1, \ldots, n,$$

где $k_i -$ разность между рождаемостью и смертностью $i -$го вида в предположении, что он предоставлен сам себе. Параметры β_i положительны и отражают тот факт, что, например, воспроизводство одного хищника обычно сопряжено с исчезновением более чем одной жертвы.

Интересным представляется случай, когда два вида питаются третьим. Тогда система имеет вид:

$$
\begin{aligned}
&\dot N_1 = (k_1 + \beta_1^{-1}\alpha_{13}N_3)N_1,\\
&\dot N_2 = (k_2 + \beta_2^{-1}\alpha_{23}N_3)N_2,\\
&\dot N_3 = (k_3 - \beta_3^{-1}(\alpha_{13}N_1 + \alpha_{23}N_2))N_3,
\end{aligned}
\tag{79}
$$

где $k_1 < 0, k_2 < 0, k_3 > 0, \alpha_{13} > 0, \alpha_{23} > 0,\ \beta_i > 0,\ i = 1,2,3.$

Заинтересованный читатель может доказать следующий факт, известный как «экологический принцип вымирания Вольтерры-Лотки»: Если система (79) исходит из любой точки множества $\{(N_1, N_2, N_3) : N_i > 0, i = 1,2,3.\}$, то один из видов вымирает асимптотически [6].

Упражнения

I. Определить тип особой точки *x*=*y*=0 для систем:

1. $\begin{cases} \dot x = 3x - y; \\ \dot y = x + 2y. \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dot x = -2x + y; \\ \dot y = x + 3y. \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dot x = 5x - 3y; \\ \dot y = -x + 4y. \end{cases}$

4. $\begin{cases} \dot x = -5x + 9y; \\ \dot y = -4x + 5y. \end{cases}$

5. $\begin{cases} \dot x = 5x - 9y; \\ \dot y = 4x - 10y. \end{cases}$

II. Является ли мера Лебега инвариантной мерой в R^3 для следующих систем дифференциальных уравнений?

1. $\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_1^{\,2} + x_3; \\ \dot{x}_2 = -x_1 + x_3^{\,2} + 2x_1x_2; \\ \dot{x}_3 = x_1 - x_2. \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dot{x}_1 = \cos x_2; \\ \dot{x}_2 = x_3 - \sin x_1; \\ \dot{x}_3 = x_1^{\,2} + x_2^{\,2}. \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dot{x}_1 = 2x_2 - 3x_3; \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2 - x_3; \\ \dot{x}_3 = 6x_1 - 4x_2 + x_3. \end{cases}$

III. Исследовать на асимптотическую устойчивость тривиальное решение систем:

1. $\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2; \\ \dot{x}_2 = -5x_1 - 3x_2 + 3x_3; \\ \dot{x}_3 = x_4; \\ \dot{x}_4 = 11x_1 + 6x_2 - 7x_3. \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2; \\ \dot{x}_2 = 11x_1 + x_2 - 5x_3; \\ \dot{x}_3 = -x_4; \\ \dot{x}_4 = -35x_1 - 3x_2 + 16x_3. \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dot{x}_1 = -5x_2 + 11x_4; \\ \dot{x}_2 = x_1 - 3x_2 + 6x_4; \\ \dot{x}_3 = 3x_2 - 7x_4; \\ \dot{x}_4 = x_3. \end{cases}$

IV. Построить функцию Ляпунова для систем:

1. $\begin{cases} \dot{x} = -y^3 + x^5; \\ \dot{y} = x^3 + y^5. \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dot{x} = y^3 - 2x^5; \\ \dot{y} = -x^3 - 6y^5. \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dot{x} = -x^2 y^3 - 7x^5; \\ \dot{y} = x^3 y^2 - 3y^5. \end{cases}$

V. Вычислить индекс особой точки $x=y=0$ и сделать вывод об асимптотической устойчивости нулевого решения систем:

1. $\begin{cases} \dot{x} = x^3 - 3xy^2; \\ \dot{y} = 3x^2 y - y^3. \end{cases}$

2. $\begin{cases} \dot{x} = -x^2 y^3 - 7x^5; \\ \dot{y} = x^3 y^2 - 3y^5. \end{cases}$

3. $\begin{cases} \dot{x} = -y^3 + x^5; \\ \dot{y} = x^3 + y^5. \end{cases}$

Список рекомендованной литературы

1. *Андреев А.Ф.* Введение в локальную качественную теорию дифференциальных уравнений. – СПб.: Изд-во С.- Петерб. Университета, 2003. – 160 с.
2. *Барбашин Е.А.* Функции Ляпунова.– М.: Наука, 1970. – 240 с.
3. *Баутин Н.Н., Леонтович Е.А.* Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. – 2-е изд. – М.: Наука, 1990. – 488 с.
4. *Биркгоф Дж.* Динамические системы. – М.-Л.: Гостехиздат, 1941. – 320 с.
5. *Виноград Р.Э.* Неприменимость метода характеристических показателей к изучению нелинейных дифференциальных уравнений // Мат. сборник. – Т. 41. – № 4. – С. 431–438.
6. *Вольтерра В.* Математическая теория борьбы за существования. – М.: Наука, 1976. – 282 с.
7. *Демидович Б.П.* Лекции по математической теории устойчивости. – М.: Наука, 1967. – 472 с.
8. *Коддингтон Е.А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. – М.: ИЛ, 1958. – 474 с.
9. *Красносельский М.А, Забрейко П.П.* Геометрические методы нелинейного анализа. – М.: Наука, 1975. – 512 с.
10. *Красовский Н.Н.* Некоторые задачи теории устойчивости движения. – М.: Физматгиз, 1959. – 212 с.
11. *Курцвейль Я.* К обращению первой теоремы Ляпунова об устойчивости движения // Чехословацкий матем. журнал. – 1955. – Т.5 (80). – С. 382 – 397.
12. *Курцвейль Я.* Об обращении второй теоремы Ляпунова об устойчивости движения // Чехословацкий матем. журнал. – 1956. – Т.6 (81). – С. 217 – 259.
13. *Ла-Салль Ж., Лефшец С.* Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова. – М.: Мир, 1964. – 186 с.
14. *Малкин И.Г.* Теория устойчивости движения. – М.: Наука, 1966. – 532 с.
15. *Немыцкий В.В., Степанов В.В.* Качественная теория дифференциальных уравнений. – М.-Л.: Гостехиздат, 1949. – 550 с.
16. *Понтрягин Л.С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. – М.: Наука, 1974. – 331 с.
17. *Рейссиг Р., Сансоне Г., Конти Р.* Качественная теория нелинейных дифференциальных уравнений. – М.: Наука, 1974. – 320 с.
18. *Руш Н., Абертс П., Лалуа М.* Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости. – М.: Мир, 1980. – 300 с.
19. *Четаев Н.Г.* Устойчивость движения.– М.: Наука, 1965. – 207 с.
20. *Rantzer A*. A dual to Lyapunov's stability theorem // Systems & Control Letters. – 2001. - Vol. 42. – P. 161–168.

Учебное издание

Качественная теория дифференциальных уравнений

(Тексты лекций к специальным курсам по дифференциальным уравнениям и уравнениям математической физики)

Составители:

Александр Леонидович Зуев,

Екатерина Александровна Буряченко

Редактор:

Р.В. Щадько