МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ,
МОЛОДЕЖИ И СПОРТА УКРАИНЫ
ДОНЕЦКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
КАФЕДРА ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

# ТЕОРИЯ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ПРИЛОЖЕНИЕМ К ЗАДАЧАМ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ

Донецк 2012

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ,
МОЛОДЕЖИ И СПОРТА УКРАИНЫ
ДОНЕЦКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
КАФЕДРА ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

# ТЕОРИЯ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ С ПРИЛОЖЕНИЕМ К ЗАДАЧАМ ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ

(для студентов специальности 6.040205 «Статистика»)

Рекомендовано к изданию Ученым советом
факультета математики
и информационных технологий
Донецкого национального университета
Протокол №112 от 26 января 2012 г.

Донецк ДонНУ 2012

УДК 517.977
ББК 22.161.6я73

Теория оптимального управления с приложением к задачам экономической динамики (для студентов специальности 6.040205 «Статистика») / сост. А.Л. Зуев. — Донецк: ДонНУ, 2012. — 78 с.

В учебном пособии изложены основы математической теории управления детерминированнми системами. Приведены задачи оптимального управления моделями экономической динамики, которые описываются системами обыкновенных дифференциальных уравнений. После каждого раздела сформулированы контрольные вопросы и творческие задания для лучшего восприятия теоретического материала студентами. В заключительной части издания представлены упражнения для самостоятельной работы.

Для студентов факультета математики и информационных технологий специальности 6.040205 «Статистика».

Составитель: А.Л. Зуев, д-р физ.-мат. наук

Отв. за выпуск: Б.В. Бондарев, д-р физ.-мат. наук, проф.

# Содержание

**Введение** **5**

**1 Динамические модели в экономике** **7**

1.1 Оптимальное распределение капитальных вложений . . . . . 7

1.2 Динамическая модель Леонтьева с непрерывным временем . 8

1.3 Контрольные вопросы . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 10

1.4 Творческие задания . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 10

**2 Управляемость линейных систем** **11**

2.1 Ранговый критерий управляемости . . . . . . . . . . . . . 12

2.2 Декомпозиция Калмана . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 16

2.3 Каноническая форма Бруновского . . . . . . . . . . . . . 17

2.4 Контрольные вопросы . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 20

2.5 Творческие задания . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 20

**3 Задача стабилизации** **21**

3.1 Стабилизация управляемых систем . . . . . . . . . . . . . 22

3.2 Необходимые и достаточные условия стабилизируемости . . 23

3.3 Контрольные вопросы . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 24

3.4 Творческие задания . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 25

**4 Наблюдаемость линейных систем** **25**

4.1 Наблюдатель Луенбергера . . . . . . . . . . . . . . . . . . 30

4.2 Стабилизация линейных систем с наблюдателем . . . . . . 32

4.3 Контрольные вопросы . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 34

4.4 Творческие задания . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . . 34

**5 Основы теории оптимального управления** **35**

5.1 Принцип максимума Понтрягина . . . . . . . . . . . . . . 36

5.2 Оптимальное управление односекторной моделью экономики 42

5.3 Оптимальное по быстродействию управление в линейных системах . . . 45
5.4 Принцип динамического программирования Беллмана . . . 49
5.5 Вывод уравнений Беллмана . . . 51
5.6 Задача о линейном регуляторе . . . 54
5.7 Линейный регулятор на бесконечном промежутке . . . 58
5.8 Линейный регулятор и стабилизация . . . 61
5.9 Контрольные вопросы . . . 62
5.10 Творческие задания . . . 63

**6 Элементы геометрической теории нелинейных систем 64**

6.1 Ранговое условие достижимости . . . 64
6.2 Задача точной линеаризации . . . 68
6.3 Контрольные вопросы . . . 70
6.4 Творческие задания . . . 71

**7 Задания для самостоятельной работы 71**

**Список использованной литературы 77**

## Введение

Основы математической теории оптимального управления были заложены в середине XX века работами школ Л.С. Понтрягина [1] и Р. Беллмана [2]. Метод динамического программирования Беллмана и принцип максимума Понтрягина с успехом применяются для синтеза оптимальных режимов управления многочисленными техническими объектами, в том числе космическими и летательными аппаратами, манипуляционными роботами, системами промышленной автоматики.

Круг приложений теории оптимального управления постоянно расширяется по мере распространения математических моделей в социальных науках. Однако такое распространение сдерживается сложностью математического описания процессов в обществе. В частности, в работе нобелевского лауреата по экономике Я. Тинбэрхэна и Х. Боса отмечается, что «полное (во всех своих деталях) функционирование хозяйства той или иной страны и деятельность населяющих ее людей могут быть описаны с помощью математической модели, гораздо более сложной и изощренной по сравнению с тем, что мы знаем в действительности. Отрицать возможность получения такой модели — значит отрицать возможность научного исследования общества» [3, с. 21]. «Такая модель, или их комбинация на различных этапах работы, имеет очевидные преимущества, присущие систематическому исследованию. Известными преимуществами модели являются ясность и последовательность, то есть отсутствие внутренних противоречий. Кроме того, анализ с помощью математики позволяет при относительно небольших дополнительных затратах произвести альтернативные расчеты, которые дают нам возможность судить по крайней мере о некоторых доверительных интервалах или о пределах надежности и результатах альтернативных вариантов хозяйственной политики» [3, с. 24].

В основу данного пособия положены лекции по дисциплине «Оптимальное управление в задачах экономической динамики», которые читаются автором студентам 5 курса специальности «Статистика» на факультете математики и информационных технологий ДонНУ.

Изложение построено следующим образом. В первом разделе вводятся дифференциальные уравнения, описывающие макроэкономические модели с управлением. Для таких моделей ставится задача оптимизации баланса между потреблением и накоплением производственных фондов. В последующих разделах изложены основные результаты математической теории управления детерминированными системами, которые описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями. Во втором — приводится ранговый критерий управляемости и вводится в рассмотрение стандартная каноническая форма управляемой системы. В третьем разделе рассматривается задача стабилизации, которая состоит в определении управления с обратной связью для обеспечения асимптотически устойчивого равновесия системы. В четвертом разделе изучается задача наблюдения при неполной информации о состоянии системы. Описывается схема синтеза динамического наблюдателя и показано применение подсистемы наблюдения для стабилизации при неполных измерениях состояния. В пятом разделе освещены основные методы решения задач оптимального управления. Принцип максимума Понтрягина приводится с общим интегральным функционалом качества, а также для случая задачи оптимального быстродействия. Приведен эвристический вывод уравнения Беллмана и доказана теорема об оптимальном управлении в терминах функции Беллмана. Детально рассмотрена задача оптимального управления линейными системами с квадратичным функционалом качества. В шестом разделе предлагается введение в нелинейную теорию управления с использованием алгебр Ли. После каждого раздела приводятся контрольные вопросы и творческие задания для лучшего восприятия теоретического материала. В заключительной части пособия даны задания для самостоятельной работы студентов.

Автор выражает благодарность Грушковской Виктории Васильевне за техническую помощь при подготовке данного пособия.

# 1 Динамические модели в экономике

В данном разделе приведены некоторые модели управляемых экономических процессов, которые описываются системами обыкновенных дифференциальных уравнений [4, Гл. 3], [5]. Методы решения задач управления такими системами будут изложены в последующих разделах.

## 1.1 Оптимальное распределение капитальных вложений

Обозначим через $K(t)$ величину основных производственных фондов в году $t$. Если проследить их изменение за промежуток времени $\Delta t$, то

$$\Delta K = K(t + \Delta t) - K(t).$$

Рост основных производственных фондов происходит за счет капитальных вложений. Однако за счет физического и морального износа количество их уменьшается с течением времени. Обозначим через $V(t)$ интенсивность ввода основных производственных фондов, т.е. количество вводимых фондов за единицу времени, например за год. Будем считать, что величина выбытия фондов в году $t$ пропорциональна $K(t)$ и равна $\mu K(t)$, то есть величина $\mu K(t)$ — это интенсивность выбытия основных производственных фондов. Так как мы рассматриваем промежуток времени $\Delta t$, то за этот промежуток времени будет введено $V(t)\Delta t$ единиц новых фондов, а количество выводимых из производства фондов составит $\mu K(t)\Delta t$ единиц. Таким образом, уравнение баланса основных производственных фондов будет иметь вид

$$K(t + \Delta t) - K(t) = V(t)\Delta t - \mu K(t)\Delta t.$$

Поделим обе части этого равенства на $\Delta t$ и устремим $\Delta t \to 0$. Получим:

$$\frac{dK}{dt} = -\mu K(t) + V(t) \tag{1.1}$$

Обыкновенное дифференциальное уравнение (1.1) является моделью роста основных производственных фондов отрасли. Этот экономический процесс можно рассматривать как управляемый, если считать $V(t)$ управлением, а $K(t)$ — состоянием. На переменные состояния и управления следует наложить естественные ограничения:

$$K(t_0) = K^0,\ K(t) \geq 0,\ V(t) \in [V_{\min}, V_{\max}], \quad t \in [t_0, t_1], \tag{1.2}$$

где $K^0$ — заданное начальное значение основных фондов, $V_{\min}$, $V_{\max}$ — известные постоянные или зависящие от времени функции. Для оценки протекающего процесса введем в рассмотрение критерий качества:

$$\mathcal{J}(K^0, V) = \alpha \int_{t_0}^{t_1} V(t)dt - \beta K(t_1) \to \min \tag{1.3}$$

Теперь можно сформулировать задачу оптимального управления: требуется найти пару $(K(t), V(t))$, которая удовлетворяет уравнению (1.1), условиям (1.2) и доставляет минимум критерию качества (1.3). Так как функционал $\mathcal{J}(K^0, V)$ состоит из двух слагаемых, то его минимизация означает, во-первых, экономию капиталовложений, а во-вторых, максимизацию основных фондов в конце рассматриваемого отрезка времени. Положительные числа $\alpha$ и $\beta$ — это весовые коэффициенты. Если $\alpha > \beta$, то приоритет отдается первому требованию, если $\alpha < \beta$, то второму.

## 1.2 Динамическая модель Леонтьева с непрерывным временем

Предположим, что состояние $n$ отраслей экономики в каждый момент времени $t$ характеризуется вектором

$$X(t) = \begin{pmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \\ \vdots \\ X_n(t) \end{pmatrix}.$$

Будем считать, что время $t$ измеряется в годах, а валовый выпуск продукта $j$-й отрасли за промежуток времени от $t$ до $t + \Delta t$ равен $X_j(t)\Delta t$ с точностью до величины более высокого порядка малости относительно $\Delta t$. Тогда открытая динамическая модель Леонтьева может быть представлена в виде [9, с. 217]:

$$X_i(t) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j(t) + \sum_{j=1}^{n} b_{ij} \frac{dX_j(t)}{dt} + C_i(t), \quad i = 1, 2, ..., n \tag{1.4}$$

Система межотраслевых балансовых соотношений (1.4) показывает, как $X_i(t)$ распадается на три составляющие.

Первая составляющая, $\sum_{j=1}^{n} a_{ij} X_j(t)$ — это производственные затраты, которые пропорциональны выпуску продукции ($a_{ij}$ — коэффициенты прямых затрат). Вторая составляющая, $\sum_{j=1}^{n} b_{ij} \frac{dX_j}{dt}$, описывает прирост основных производственных фондов за единицу времени. В такой модели предполагается, что амортизационные отчисления отсутствуют, и все валовые капитальные вложения идут на ввод в действие новых основных производственных фондов. При этом считается, что капиталовложения пропорциональны приросту выпуска продукции в текущий момент времени. Третья составляющая, $C_i(t)$ — это непроизводственное потребление продукта $i$-й отрасли в единицу времени.

Предположим, что рассматривается развитие экономики на отрезке времени от $t \in [0, \tau]$ (за $\tau$ лет). Будем считать в дифференциальных уравнениях (1.4) функции $C_1(t)$, $C_2(t)$,..., $C_n(t)$ управляющим воздействием. Предполагается, что задано начальное состояние экономической системы $X_i(0) = X_i^0$ и ограничения

$$X_i(t) \geq 0, \; C_i(t) \in [C^i_{\min}, C^i_{\max}], \quad t \in [0, \tau], \tag{1.5}$$

для каждой отрасли, $i = 1, 2, ..., n$. Оптимальное управление экономикой должно быть организовано так, чтобы потребление было как можно больше, и в то же время в конечный момент времени $\tau$ обеспечивалась высокая интенсивность выпуска продукции, что означает накопление производственного потенциала. Критерий качества процесса, соответствующий этим требованиям, может быть выражен функционалом

$$\mathcal{J} = \sum_{i=1}^{n} \left\{ \alpha_i \int_0^{\tau} C_i(t)dt + \beta_i X_i(\tau) \right\} \to \max, \tag{1.6}$$

где $\alpha_i$ и $\beta_i$ — положительные весовые коэффициенты. Если предпочтение отдается потреблению, то $\alpha_i > \beta_i$, а если предпочтение отдается накоплению производственного потенциала, то $\alpha_i < \beta_i$.

Таким образом, задача оптимального управления экономикой состоит в нахождении функций управления $C_1(t)$, $C_2(t)$,..., $C_n(t)$ и соответствующих им решений $X_1(t)$, $X_2(t)$,..., $X_n(t)$ системы дифференциальных уравнений (1.4) на отрезке $t \in [0, \tau]$, которые удовлетворяют начальным условиям $X_i(0) = X_i^0$, ограничениям (1.5) и доставляют максимум функционалу (1.6). Для решения поставленной задачи применяются методы, изложенные в разделе 5.

## 1.3 Контрольные вопросы

1. Какое балансовое соотношение положено в основу модели Леонтьева?

2. Каким ограничениям удовлетворяет управляющее воздействие в модели Леонтьева?

3. Каким образом учитывается баланс между потреблением и накоплением фондов в функционале качества задачи об оптимальном распределении капитальных вложений?

4. Каков экономический смысл функции управления в задаче об оптимальном распределении капитальных вложений?

## 1.4 Творческие задания

**Задание 1.** (*Модель Кейнса с непрерывным временем*) Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение [4, с. 59]:

$$\frac{1}{1-c}\frac{dy(t)}{dt} + y(t) = \frac{C+I}{1-c}, \tag{1.7}$$

где $y(t)$ — валовой внутренний продукт (ВВП), $t$ — время (например, измеряемое в годах от начального отсчета $t = 0$), $C \geq 0$ — минимальный объем фонда потребления, $c \in (0, 1)$ — склонность к потреблению, $I \geq 0$ — валовые частные внутренние инвестиции.

Для фиксированных значений параметров $C$, $c$, $I$, найти стационарное решение уравнения (1.7) вида $y(t) \equiv y_E$ (равновесное состояние модели Кейнса). Исследовать поведение решений $y(t)$ в окрестности точки $y = y_E$.

**Задание 2**. Для случая $C = \text{const}$, $c = \text{const}$, $I = I(t)$, требуется записать общее решение дифференциального уравнения (1.7) методом вариации произвольных постоянных. При каких условиях на функцию $I(t)$, $t \geq 0$, выполнено свойство

$$\lim_{t \to +\infty} y(t) = y_E$$

для всех решений дифференциального уравнения (1.7)?

## 2 Управляемость линейных систем

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j(t) + \sum_{k=1}^{m} b_{ik} u_k(t), \quad i = 1, 2, ..., n, \tag{2.1}$$

где функции $x_1(t)$, $x_2(t)$, ..., $x_n(t)$ характеризуют состояние системы, а $u_1(t)$, $u_2(t)$, ..., $u_m(t)$ описывают управляющие воздействия в момент времени $t$. Для удобства обозначений перепишем систему (2.1) в векторном виде

$$\dot{x} = Ax + Bu, \tag{2.2}$$

где $x = (x_1, x_2, ..., x_n)^* \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния системы (фазовый вектор), $u = (u_1, u_2, ..., u_m)^* \in \mathbb{R}^m$ — управление, матрицы с постоянными коэффициентами $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ik})$ имеют размерности $n \times n$ и $n \times m$, соответственно. Звездочка обозначает операцию транспонирования.

## 2.1 Ранговый критерий управляемости

Для произвольного $T > 0$ введем класс допустимых управлений $\mathcal{U}_T$, состоящий из всех ограниченных измеримых функций $u(t) \in \mathbb{R}^m$ на отрезке $t \in [0, T]$. Ключевым свойством системы (2.2) является свойство управляемости [7, 11].

**Определение 2.1.** Система (2.2) называется *управляемой*, если для произвольных $x^{(0)}, x^{(1)} \in \mathbb{R}^n$ существуют такие $T > 0$, $u \in \mathcal{U}_T$, что система (2.2) с $u = u\,(t)$ имеет решение $x\,(t)$, удовлетворяющее краевым условиям $x\,(0) = x^{(0)}$, $x\,(T) = x^{(1)}$.

Для исследования решений системы (2.2) определим матричную функцию

$$e^{tA} = I + tA + \frac{t^2}{2}A^2 + ... = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}A^k \qquad (2.3)$$

Ряд (2.3) сходится для всех $t \in \mathbb{R}$ и допускает почленное дифференцирование и интегрирование (см. [6]).

**Лемма 2.1.** *Пусть $T > 0$, $u \in \mathcal{U}_T$, $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$. Тогда задача Коши*

$$\begin{aligned} &\dot{x(t)} = Ax(t) + Bu\,(t)\,,\ t \in [0, T]\,,\\ &x\,(0) = x^{(0)} \end{aligned}$$

*имеет единственное решение*

$$x\left(t; x^{(0)}, u\right) = e^{tA}x^{(0)} + \int\limits_0^t e^{(t-s)A}Bu\,(s)\,ds,\ t \in [0, T] \qquad (2.4)$$

*Доказательство.* Почленным дифференцированием ряда (2.3) получаем, что функция $\tilde{x}\,(t) = e^{tA}x^{(0)}$ является решением однородного дифференциального уравнения $\tilde{x} = A\tilde{x}$ :

$$\dot{\tilde{x}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{kt^{k-1}}{k!}A^k x^{(0)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}A^{k+1}x^{(0)} = A\left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k!}A^k x^{(0)}\right) = A\tilde{x}\,(t)\,.$$

Далее применим метод вариации произвольных постоянных.

Пусть $x(t) = e^{tA}c(t)$. Подставляя $x(t)$ в (2.2), находим

$$\dot{c}(t) = e^{-tA}Bu(t),$$

или

$$c(t) = c^{(0)} + \int\limits_0^t e^{-sA}Bu(s)\,ds.$$

Из условия $x(0) = x^{(0)}$ находим $c^{(0)} = x^{(0)}$. $\square$

**Теорема 2.1 (Критерий управляемости Калмана).** *Управляемость системы* (2.2) *эквивалентна условию*

$$rank\left(B, AB, A^2B, \ldots, A^{n-1}B\right) = n.$$

*Доказательство.* 1. Покажем, что из управляемости системы (2.2) следует, что $rank\left(B, AB, A^2B, \ldots, A^{n-1}B\right) = n$.

Предположим, что $rank\left(B, AB, A^2B, \ldots, A^{n-1}B\right) < n$, то есть строки матрицы $K = \left(B, AB, A^2B, \ldots, A^{n-1}B\right)$ линейно зависимы:

$$\text{существует строка } v \in \mathbb{R}^n: \; vB = vAB = \ldots = vA^{n-1}B = 0, \; v \neq \bar{0} \quad (2.5)$$

Тогда по теореме Гамильтона–Кэли [6, с. 87]:

$$A^n = c_{n-1}A^{n-1} + c_{n-2}A^{n-2} + ... + c_0I, \quad (2.6)$$

где $c_j$ — коэффициенты характеристического уравнения матрицы $A$.

Из (2.5) и (2.6) следует, что $vA^nB = 0$.

$$vA^{n+1}B = 0, \; vA^{n+k}B = 0, \; \forall k = 1, 2, \ldots.$$

Из (2.3),

$$ve^{tA}B = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} vA^kB = 0 \quad (2.7)$$

Положим $x^{(0)} = 0$ и применим формулу (2.4):

$$x(t; 0, u) = \int\limits_0^t e^{(t-s)A}Bu(s)\,ds.$$

С помощью формулы (2.7) получим

$$vx\,(t;0,u) = \int\limits_0^t ve^{(t-s)A}Bu\,(s)\,ds = 0,$$

что эквивалентно условию $x\,(t) \perp v$ для всех $u \in L_\infty\,[0,\infty)$, то есть система (2.2) неуправляема — пришли к противоречию.

2. Покажем, что из условия $rank\,(K) = n$ следует управляемость системы (2.2). Рассмотрим множество

$$R_0 = \{x\,(1) : x\,(0) = 0, x\,(t) \text{ – решение системы (2.2)} \quad \text{с} \quad u \in \mathcal{U}_1\}\,.$$

Поскольку при $x^{(0)} = 0$ формула (2.4) задает линейное отображение из $L^\infty[0,T]$ в $\mathbb{R}^n$, то $R_0$ — линейное подпространство в $\mathbb{R}^n$.

Докажем, что $R_0 = \mathbb{R}^n$. Предположим противное: пусть $\dim\,(R_0) < n$. Тогда существует ненулевой вектор $v \in \mathbb{R}^n$, для которого

$$\int\limits_0 ve^{(1-s)A}Bu\,(s)\,ds = 0\ \forall u \in L_\infty\,[0,1]\,.$$

Следовательно, по основной лемме вариационного исчисления,

$$ve^{(1-s)A}B \equiv 0\ \forall\ s \in [0,1] \Rightarrow \frac{d^n}{ds^k}\left(ve^{(1-s)A}B\right)\Bigg|_{s=1} = 0,\ \ k = 0,1,2,\ldots \quad (2.8)$$

Из (2.8) следует, что $\pm vA^{n-1}B = 0$. Отсюда вытекает, что $rank\,(K) < n$ — пришли к противоречию.

Таким образом, $R_0 = R^n$. Если $x\,(0) = x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$, то

$$x\left(t, x^{(0)}, u\right) = e^{tA}x^{(0)} + y,$$

где $y \in R_0 = \mathbb{R}^n$, и множество $\{y : u \in L_\infty\,[0,1]\} = \mathbb{R}^n$, что доказывает управляемость системы (2.2). □

**Пример 2.1.** *Исследовать на управляемость систему*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = u. \end{cases}$$

В рассматриваемом случае

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, K = (B, AB) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\det K = -1 \neq 0$, следовательно, $\operatorname{rank} K = 2$ и система управляема по теореме 2.1.

**Пример 2.2.** *Исследовать при каких значениях параметров* $\omega_1, \omega_2, \beta_1, \beta_2$ *система*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \omega_1 x_2, \\ \dot{x}_2 = -\omega_1 x_1 + \beta_1 u, \\ \dot{x}_3 = \omega_2 x_4, \\ \dot{x}_4 = -\omega_2 x_3 + \beta_2 u \end{cases}$$

*управляема.*

Составим матрицу $K = (B, AB, A^2B, A^3B)$,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \omega_1 & 0 & 0 \\ -\omega_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_2 \\ 0 & 0 & -\omega_2 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta_1 \\ 0 \\ \beta_2 \end{pmatrix},$$

$$AB = \begin{pmatrix} \beta_1\omega_1 \\ 0 \\ \beta_2\omega_2 \\ 0 \end{pmatrix}, A^2B = \begin{pmatrix} 0 \\ -\beta_1\omega_1^2 \\ 0 \\ -\beta_2\omega_2^2 \end{pmatrix}, A^3B = \begin{pmatrix} 0 \\ -\beta_1\omega_1^3 \\ 0 \\ -\beta_2\omega_2^3 \end{pmatrix}$$

$$K = \begin{pmatrix} 0 & \omega_1\beta_1 & 0 & -\omega_1^3\beta_1 \\ \beta_1 & 0 & -\omega_1^2\beta_1 & 0 \\ 0 & \omega_2\beta_2 & 0 & -\omega_2^3\beta_1 \\ \beta_2 & 0 & -\omega_2^2\beta_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

По теореме 2.1, рассматриваемая система управляема тогда и только тогда, когда определитель матрицы $K$ отличен от нуля, то есть при

$$\beta_1^2 + \beta_2^2 + \omega_1^2 + \omega_2^2 \neq 0 \text{ и } |\omega_1| \neq |\omega_2|.$$

## 2.2 Декомпозиция Калмана

**Теорема 2.2.** *Для линейной системы с управлением*

$$\dot{x} = Ax + Bu,\ x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m \tag{2.9}$$

*существует единственное $C$ — линейное подпространство $\mathbb{R}^n$, обладающее следующими свойствами:*

*1) $C$ — инвариантное подпространство для (2.9);*

*2) если систему (2.9) рассматривать в $C$, то она управляема (в $C$).*

*Доказательство.* Обозначим

$$C = \left\{ \int\limits_0^T e^{(T-s)A} Bu\left(s\right) ds : T > 0, u \in L^\infty \left[0, T\right] \right\} \tag{2.10}$$

Покажем, что $C$ — линейное подпространство $\mathbb{R}^n$.

Линейность $C$ следует из линейности интеграла и пространства $L^\infty$.

Обозначим через $k$ размерность $C$, $0 \leq k \leq n$. При $k = 0$ утверждение теоремы выполняется, поэтому будет рассматривать случай, когда $k > 0$. Поскольку $C$ — подпространство в $\mathbb{R}^n$, то существует линейная замена координат $(x_1, x_2, ..., x_n) \to (\bar{x}_1, \bar{x}_2, ..., \bar{x}_n)$, при которой множество $C$ задается как

$$C = \{x : \bar{x}_{k+1} = \bar{x}_{k+2} = ... = \bar{x}_n = 0\} \tag{2.11}$$

Обозначим $\bar{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_k \end{pmatrix}, \bar{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} \bar{x}_{k+1} \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{pmatrix}$. Тогда система (2.9) примет вид:

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}^{(1)} = A_{11}\bar{x}^{(1)} + A_{12}\bar{x}^{(2)} + B_1 u, \\ \dot{\bar{x}}^{(2)} = A_{22}\bar{x}^{(2)} \end{cases} \tag{2.12}$$

Множество $C$ инвариантно по построению. Тогда из формулы (2.11) следует, что $x_{k+1}\left(t\right) \equiv x_{k+2}\left(t\right) \equiv ... \equiv x_n\left(t\right) \equiv 0$, если

$$x_{k+1}\left(0\right) = x_{k+2}\left(0\right) = ... = x_n\left(0\right) = 0.$$

Отсюда вытекает, что $\dot{\bar{x}}_{k+1}(t) = \dot{\bar{x}}_{k+2}(t) = ... = \dot{\bar{x}}_n(t) = 0$ для всех $t \geq 0$ при условии, что $\bar{x}_{k+1}(0) = \bar{x}_{k+2}(0) = ... = \bar{x}_n(0) = 0$, то есть $\bar{x}^{(2)} = 0, \dot{\bar{x}}^{(2)} = 0$. Следовательно, второе уравнение системы (2.12) не зависит ни от $\bar{x}^{(1)}$, ни от $u$.

Если существует инвариантное множество $C'$, $0 \in C'$, то $C' \supset C$. С другой стороны, если существует множество $C'$, $0 \in C'$, на котором система (2.12) управляема, то $C' \subset C$. Отсюда следует, что множество $C$, удовлетворяющее обоим условиям теоремы, определено единственным образом. $\square$

**Следствие 2.1 (Декомпозиция Калмана).** *Пусть $C$ — множество, определяемое формулой* (2.10) *для системы* (2.9)*. Тогда существует линейное преобразование координат, которое вектору $x$ ставит в соответствие вектор $\bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{x}^{(1)} \\ x^{(2)} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ так, что подпространство $C$ определяется уравнением $\bar{x}^{(2)} = 0$, а система* (2.9) *записывается в виде*

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}^{(1)} = A_{11}\bar{x}^{(1)} + A_{12}\bar{x}^{(2)} + B_1 u, \\ \dot{\bar{x}}^{(2)} = A_{22}\bar{x}^{(2)}. \end{cases}$$

$\dim(C) = rank\left(B_1, A_{11}B_1, ..., A_{11}^{n-1}B_1\right) = rank\left(B, AB, ..., A^{n-1}B\right).$

**Определение 2.2.** Множество $C$ называется *подпространством управляемости* системы (2.9).

## 2.3 Каноническая форма Бруновского

**Теорема 2.3.** *Пусть система*

$$\dot{x} = Ax + bu, \; x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^1 \tag{2.13}$$

*управляема. Тогда существует преобразование*

$$\bar{x} = Dx, \bar{u} = \alpha u + \beta_1 x_1 + ... + \beta_n x_n, |D| \neq 0, \alpha \neq 0, \tag{2.14}$$

*которое приводит систему* (2.13) *к виду:*

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}_1 = \bar{x}_2, \\ \dot{\bar{x}}_2 = \bar{x}_3, \\ \vdots \\ \dot{\bar{x}}_{n-1} = \bar{x}_n, \\ \dot{\bar{x}}_n = \bar{u} \end{cases} \tag{2.15}$$

*Доказательство.* Определим вектор $c = (c_1, c_2, ..., c_n)$ из условий

$$cb = cAb = ... = cA^{n-2}b = 0, \tag{2.16}$$

$$cA^{n-1}b \neq 0 \tag{2.17}$$

Существование такого $c$ вытекает из условия управляемости: поскольку $rank\left(b, Ab, ..., A^{n-1}b\right) = n$, то $rank\left(b, Ab, ..., A^{n-2}b\right) = n-1$ Отсюда следует, что существует $c \neq 0$, такой, что

$$cb = cAb = ... = cA^{n-2}b = 0.$$

Такой вектор $c$ удовлетворяет условию (2.17), ибо в противном случае

$$c\left(b, Ab, ..., A^{n-1}b\right) = 0,\ c \neq 0,$$

то есть $c$ — собственный вектор матрицы $\left(b, Ab, ..., A^{n-1}b\right)$, соответствующий собственному значению $\lambda = 0$, тогда $\det\left(b, Ab, ..., A^{n-1}b\right) = 0$, что противоречит условию управляемости.

Полагаем

$$\begin{cases} \bar{x}_1 = cx \\ \bar{x}_2 = cAx, \\ \vdots \\ \bar{x}_n = cA^{n-1}x, \end{cases} \quad \text{то есть } D = \begin{pmatrix} c \\ cA \\ \vdots \\ cA^{n-1} \end{pmatrix},$$

невырожденность $D$ следует из управляемости.

Дифференцируя $\bar{x}$, получаем:

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}_1 = c\dot{x} = cAx + cbu = \ \{\text{по условию } (2.16)\} \ = \bar{x}_2, \\ \dot{\bar{x}}_2 = cA\dot{x} = cA^2x + cAbu = \{\text{по условию } (2.16)\ \} = \bar{x}_3, \\ \vdots \\ \dot{\bar{x}}_{n-1} = cA^{n-2}\dot{x} = cA^{n-1}x + cA^{n-2}bu = \{\ \text{по условию } (2.16)\ \} = \bar{x}_n, \\ \dot{\bar{x}}_n = cA^{n-1}\dot{x} = cA^nx + cA^{n-1}bu \end{cases} \tag{2.18}$$

Обозначим $\bar{u} = \alpha u + \beta x$, где $\alpha = cA^{n-1}b \neq 0$ по условию (2.17), а $\beta = cA^n$.

Тогда система (2.18) имеет вид (2.15) и эквивалентна системе (2.13).

□

**Определение 2.3.** Система (2.15) называется *канонической формой Бруновского* (стандартной канонической формой управляемой системы)

**Пример 2.3.** *Привести к канонической форме Бруновского следующую систему:*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - x_2, \\ \dot{x}_2 = x_2 + x_3, \\ \dot{x}_3 = u. \end{cases}$$

Обозначим $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ненулевой вектор $c = (c_1, c_2, c_3)$ найдём из условия (2.16): $cb = cAb = 0$. Отсюда $c_2 = c_3 = 0, c_1 \neq 0$. Положим $c_1 = 1$, тогда $c = (1, 0, 0)$.

$$D = \begin{pmatrix} c \\ cA \\ cA^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix},\ \alpha = cA^2b = -1, \beta = cA^3 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Замена переменных:

$$\bar{x} = Dx, \bar{u} = -u + x_1 - 3x_2 - 2x_3.$$

Каноническая форма Бруновского:

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}_1 = \bar{x}_2, \\ \dot{\bar{x}}_2 = \bar{x}_1, \\ \dot{\bar{x}}_3 = \bar{u}. \end{cases}$$

## 2.4 Контрольные вопросы

1. Сколько строк и сколько столбцов имеет матрица в ранговом условии управляемости Калмана, если состояние системы $x \in \mathbb{R}^n$, а управление $u \in \mathbb{R}^m$?

2. Всякую ли линейную систему можно привести к канонической форме Бруновского?

3. Верно ли, что при приведении системы к канонической форме Бруновского имеется взаимно-однозначное соответствие между состоянием $x$ исходной системы и $\bar{x}$ в канонической форме?

4. Верно ли, что при приведении системы к канонической форме Бруновского имеется взаимно-однозначное соответствие между управлением $u$ исходной системы и $\bar{u}$ в канонической форме?

5. Сформулируйте теорему Гамильтона—Кэли.

## 2.5 Творческие задания

**Задание 1.** Обобщая пример 2.2, рассмотрим систему дифференциальных уравнений для произвольного $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} &\dot{x}_{2j-1} = \omega_j x_{2j}, \\ &\dot{x}_{2j} = -\omega_j x_{2j-1} + \beta_j u, \quad j = 1, 2, ..., n, \end{aligned} \tag{2.19}$$

где $x = (x_1, x_2, ..., x_{2n-1}, x_{2n})^* \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния, $u \in \mathbb{R}$ — управление.

Требуется найти необходимые и достаточные условия на параметры $\omega_j$ и $\beta_j$, при которых система (2.19) управляема.

**Задание 2.** Построить преобразование, которое приводит систему (2.19) к канонической форме Бруновского.

## 3 Задача стабилизации

Пусть
$$\dot{x} = Ax + Bu,\ x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m \tag{3.1}$$

Задача стабилизации [7] состоит в нахождении такой матрицы $D$ размерности $m \times n$, чтобы система (3.1) с управлением
$$u(t) = Dx(t) \tag{3.2}$$
имела асимптотически устойчивое решение $x = 0$.

**Определение 3.1.** Система (3.1) называется *стабилизируемой*, если задача стабилизации разрешима.

Систему (3.1), (3.2) можно записать в виде
$$\dot{x} = (A + BD)\,x \tag{3.3}$$
Обозначим $C = A + BD$. Тогда задача стабилизации сводится к определению матрицы $D$, для которой матрица $C$ удовлетворяет условиям теоремы об асимптотической устойчивости [8, с. 89].

**Теорема 3.1.** *Рассмотрим систему дифференциальных уравнений*
$$\dot{x} = Cx, \tag{3.4}$$
*где $C$ — $n \times n$-матрица.*

*Для асимптотической устойчивости решения $x = 0$ системы* (3.4) *необходимо и достаточно чтобы выполнялось условие:*
$$\mathrm{Re}\,(\lambda_k) < 0,\ \forall \lambda_k : \det\,(C - \lambda_k I) = 0.$$

## 3.1 Стабилизация управляемых систем

**Теорема 3.2.** *Если система*

$$\dot{x} = Ax + bu,\ x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^1 \tag{3.5}$$

*управляема, то она стабилизируема.*

*Доказательство.* Приведем систему (3.5) к канонической форме Бруновского с помощью теоремы 2.3:

$$\bar{x} = \tilde{D}x, \bar{u} = \alpha u + \beta x, \tag{3.6}$$

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}_1 = \bar{x}_2, \\ \dot{\bar{x}}_2 = \bar{x}_3, \\ \vdots \\ \dot{\bar{x}}_n = \bar{u} \end{cases} \tag{3.7}$$

В систему (3.7) подставим управление

$$\bar{u} = k\bar{x},\ k = (k_1, ..., k_n)\,.$$

Тогда получим систему:

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}_1 = \bar{x}_2, \\ \dot{\bar{x}}_2 = \bar{x}_3, \\ \vdots \\ \dot{\bar{x}}_n = k_1\bar{x}_1 + k_2\bar{x}_2 + ... + k_n\bar{x}_n, \end{cases}$$

или

$$y^{(n)} - k_n y^{(n-1)} - k_{n-1} y^{(n-2)} - ... - k_1 y = 0 \tag{3.8}$$

Запишем характеристическое уравнение для системы (3.8):

$$\lambda^n - k_n \lambda^{n-1} - ... - k_2\lambda - k_1 = 0 \tag{3.9}$$

Поскольку коэффициенты $(k_1, ..., k_n)$ могут быть выбраны произвольно, то возможно подобрать их так, чтобы для всех корней уравнения (3.9) выполнялось условие $\mathrm{Re}\,(\lambda) < 0$. В частности, можно выбрать $\lambda_k = -1\ \left(\forall k = \overline{1, n}\right)$.

Действительно, для этого необходимо и достаточно, чтобы

$$\lambda^n - k_n\lambda^{n-1} - ... - k_1 = (\lambda+1)^n = \sum_{j=0}^{n} C_n^j \lambda^j,$$

тогда

$$k_i = -C_n^{i-1}.$$

При таком выборе $k_i$ решение $\bar{x} = 0$ системы (3.3) с управлением $\bar{u} = k\bar{x}$ устойчиво асимптотически. Тем же свойством обладает система (3.1) при использовании преобразования (3.6) с управлением $\bar{u} = k\bar{x}$.

При этом, $u = \frac{1}{\alpha}(\bar{u} - \beta x) = \alpha^{-1}(k\bar{x} - \beta x) = \alpha^{-1}\left(k\tilde{D} - \beta\right)x$. Таким образом, управление $u = Dx$, где $D = \alpha^{-1}\left(k\tilde{D} - \beta\right)$, решает задачу стабилизации системы (3.1). □

## 3.2 Необходимые и достаточные условия стабилизируемости

**Теорема 3.3.** *Рассмотрим систему* (3.1) *и обозначим через $C$ её пространство управляемости, $\mathbb{R}^n = C \oplus N$, где $N$ — неуправляемое подпространство.*

*Система* (3.1) *стабилизируема только тогда, когда* $\mathrm{Re}(\lambda) < 0$ *для всех $\lambda$ — собственных значений матрицы $A$, соответствующих собственным векторам $A$ из неуправляемого подпространства $N$.*

**Пример 3.1.** *Построить стабилизирующее управление $u = Dx$ для системы*

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= -x_2 + 2x_3,\\
\dot{x}_2 &= x_1 + x_2,\\
\dot{x}_3 &= -x_3 + u.
\end{aligned}$$

Положим $u = d_1x_1 + d_2x_2 + d_3x_3$ и решим характеристическое уравнение системы с управлением $u = Dx$, то есть

$$\begin{cases}
\dot{x}_1 = -x_2 + 2x_3,\\
\dot{x}_2 = x_1 + x_2,\\
\dot{x}_3 = d_1x_1 + d_2x_2 + (d_3 - 1)\,x_3.
\end{cases}$$

Характеристическое уравнение:

$$|\lambda I-(A+BD)| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & -2 \\ -1 & \lambda-1 & 0 \\ -d_1 & -d_2 & \lambda+1-d_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda^3 - d_3\lambda^2 - \lambda\left(d_3+2d_1\right) + 1 - 2d_1 - 2d_2 - d_3 = 0.$$

Подберем $d_1, d_2, d_3$ так, чтобы все корни характеристического уравнения равнялись $-1$, то есть чтобы $\lambda I-(A+BD) = (\lambda+1)^3 = \lambda^3+3\lambda^2+3\lambda+1$:

$$d_1 = -3, d_2 = -1,5, d_3 = -3.$$

Таким образом, исходная система стабилизируема управлением $u = Dx$, где $D = (-3; -1,5; -3)$.

**Пример 3.2.** *Построить стабилизирующее управление $u = Dx$ для системы*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + x_3 + u, \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2, \\ \dot{x}_3 = -x_3 + x_2. \end{cases}$$

С управлением $u = d_1x_1 + d_2x_2 + d_3x_3$ система примет вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = d_1x_1 + \left(d_2+1\right)x_2 + \left(d_3+1\right)x_3, \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2, \\ \dot{x}_3 = -x_3 + x_2. \end{cases}$$

Характеристическое уравнение:

$$|\lambda I-(A+BD)| = \lambda^3 + \lambda^2\left(2-d_1\right) + \left(-2d_1-d_2\right)\lambda - d_1 - d_2 - d_3 - 2 = 0.$$

Система стабилизируема управлением $u = Dx$, где $D = (-1; -1; -1)$.

### 3.3 Контрольные вопросы

1. Верно ли, что всякая управляемая система стабилизируема?

2. Верно ли, что всякая стабилизируемая система управляема?

3. Верно ли, что $Re(\lambda_j) < 0$, $j = \overline{1,n}$, для всех собственных значений $n \times n$-матрицы $A = (a_{ij})$, если $a_{ij} < 0$ для всех $i, j = \overline{1,n}$?

### 3.4 Творческие задания

**Задание 1.** Доказать, что необходимым и достаточным условием стабилизируемости системы

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x \in \mathbb{R}^n,\ u \in \mathbb{R}^m \tag{3.10}$$

является существование положительно-определенной квадратичной формы

$$V(x) = \langle Qx, x \rangle = \sum_{i,j=1}^{n} q_{ij} x_i x_j,$$

обладающей свойством:

$$\forall x \neq 0\ \exists u \in \mathbb{R}^m :\ \dot{V}(x, u) < 0.$$

Здесь $\dot{V}(x, u)$ обозначает производную функции $V(x)$ в силу системы (3.10):

$$\dot{V}(x, u) = \langle \nabla V(x), Ax + Bu \rangle = \langle 2Qx, Ax + Bu \rangle .$$

Функция $V(x)$, обладающая указанными выше свойствами, называется *функцией Ляпунова* системы (3.10).

**Задание 2.** Построить функцию Ляпунова для системы

$$\begin{aligned} &\dot{x}_1 = x_1 + 2x_2, \\ &\dot{x}_2 = -2x_1 + x_2 + u, \quad x = (x_1, x_2)^* \in \mathbb{R}^2,\ u \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

# 4 Наблюдаемость линейных систем

Предположим, что задана линейная система с выходом

$$\dot{x} = Ax + Bu,\ x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m, \tag{4.1}$$

$$y = Hx,\ y \in \mathbb{R}^r,\ (m \leq n, r \leq n)\,, \tag{4.2}$$

где $x$ — состояние системы, $u$ — управление(вход), $y$ — выход.

Предположим, что $\hat{u} \in L^\infty [0, +\infty)$, и обозначим $x(t; x_0, \hat{u})$ — решение задачи Коши для системы (4.1) с управлением $u = \hat{u}(t)\,, x(0; x_0, u) = x_0$.

**Определение 4.1.** Система (4.1), (4.2) *наблюдаема*, если для произвольных $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ таких, что $x_1 \neq x_2$, и для любого управления $\hat{u} \in L^{\infty}[0, +\infty)$ существует $t > 0 : Hx(t, x_1, \hat{u}) \neq Hx(t, x_2, \hat{u})$.

Геометрический смысл понятия наблюдаемости иллюстрирует рис. 4.1 для случая $n = 3$, $r = 2$.

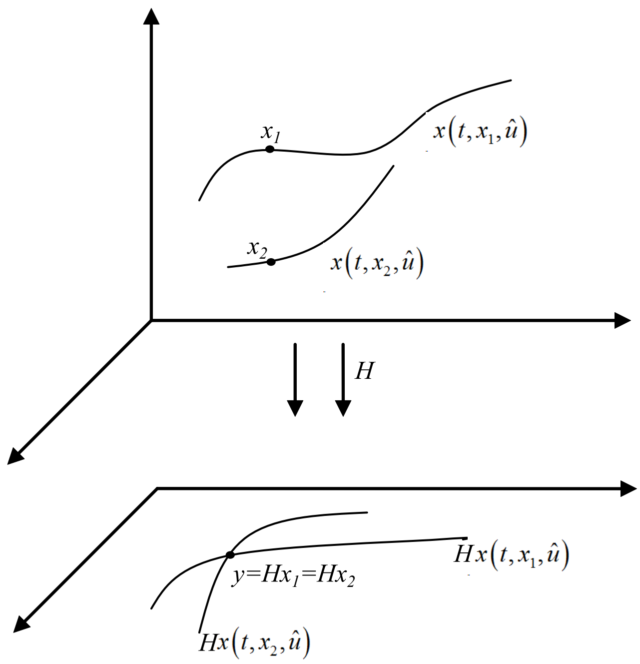


Рис. 4.1 — Геометрическая иллюстрация свойства наблюдаемости

Поскольку $r < n$, то отображение $H$ вырождено и различным *точкам* $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^3$ соответствует одна и та же проекция $y = Hx_1 = Hx_2 \in \mathbb{R}^2$. При этом *траекториям* $x(t, x_1, \hat{u})$ и $x(t, x_2, \hat{u})$ соответствуют разные проекции $Hx(t, x_1, \hat{u}), Hx(t, x_2, \hat{u})$.

**Лемма 4.1.** *Наблюдаемость системы* (4.1), (4.2) *эквивалентна выполнению условия*

$$\forall x_0 \neq 0, \exists t > 0 : Hx(t, x_0, 0) \neq 0 \tag{4.3}$$

*Доказательство.* Покажем,что из наблюдаемости системы (4.1), (4.2) следует свойство (4.3). Для этого положим $x_1 = x_0, x_2 = 0, \hat{u}(t) \equiv 0$. Тогда существует $t$: $Hx(t, x_0 0) \neq Hx(t, 0, 0) = 0$ (по определению 5.1).

Докажем теперь, что из свойства (4.3) следует наблюдаемость в смысле определения 5.1. Предположим противное: пусть существуют $x_1 \neq x_2$, $\hat{u} \in L_\infty[0, +\infty)$: $Hx(t, x_1, \hat{u}) \equiv Hx(t, x_2, \hat{u})$. Положим $x_0 = x_1 - x_2 \neq 0$ и подставим $\tilde{x}(t) = x(t, x_1, \hat{u}) - x(t, x_2, \hat{u})$ в систему (4.1):

$$\dot{\tilde{x}} = Ax(t, x_1, \hat{u}) + B\hat{u} - Ax(t, x_2, \hat{u}) - B\hat{u} = A\tilde{x}(t),$$

то есть $\tilde{x}(t) = x(t, x_0 0)$. Тогда, по предположению,

$$Hx(t, x_0, 0) = Hx(t, x_1, \hat{u}) - Hx(t, x_2, \hat{u}) \equiv 0,$$

что противоречит свойству (4.3). □

**Теорема 4.1 (Критерий наблюдаемости Калмана).** *Система* (4.1), (4.2) *наблюдаема тогда и только тогда, когда выполняется условие:*

$$rank \begin{pmatrix} H \\ HA \\ \vdots \\ HA^{n-1} \end{pmatrix} = n \tag{4.4}$$

*Доказательство.* Зафиксируем произвольное $t > 0$ и рассмотрим следующую $(n \times n)$ матрицу:

$$R_t = \int\limits_0^t e^{sA^T} H^T H e^{sA} ds.$$

Нужно доказать, что $(R_t x_0, x_0) = \|Hx(\cdot, x_0, 0)\|^2$,

$$\|Hx(\cdot, x_0, 0)\|^2 = \int\limits_0^t (Hx(s, x_0, 0), Hx(s, x_0, 0))\, ds =$$
$$= \int\limits_0^t \left(He^{sA}x_0, He^{sA}x_0\right) ds = \int\limits_0^t \left(e^{sA^T} H^T H e^{sA} x_0, x_0\right) ds = (R_t x_0, x_0).$$

Поскольку, по лемме 5.1, наблюдаемость системы (4.1), (4.2) эквивалентна свойству (4.3), то, используя аналитичность $R_t$, приходим к выводу, что для наблюдаемости системы (4.1), (4.2) необходимо и достаточно выполнение условия $(R_t x_0, x_0) > 0, \forall x_0 \neq 0$, что, в свою очередь, эквивалентно положительной определенности матрицы $R_t$, или условию

$$\operatorname{rank} R_t = n,\ (R_t x_0, x_0) \geq 0.$$

Осталось показать, что условие $rank R_t = n$ эквивалентно условию (4.4).

1. Покажем, что из того, что $rank R_t = n$ следует условие (4.4). Предположим противное: пусть, $rank \begin{pmatrix} H \\ HA \\ \vdots \\ HA^{n-1} \end{pmatrix} < n$, тогда существует $x_0 \neq 0$, для которого

$$Hx_0 = HAx_0 = ... = HA^{n-1}x_0 = 0 \tag{4.5}$$

По теореме Гамильтона-Кэли,

$$A^n + p_{n-1}A^{n-1} + ... + p_0 I = 0,$$

где $p_{n-1}, ..., p_0 \in \mathbb{R}$ — коэффициенты характеристического многочлена матрицы $A$. Тогда из (4.5) следует, что $HA^n x_0 = 0, HA^{n+1}x_0 = 0, ...$.

Итак, $HA^k x_0 = 0$ при всех $k = 0, 1, 2, ...$. Поскольку $e^{sA} = \sum\limits_0^\infty \frac{s^n A^n}{k!}$, то $He^{sA}x_0 \equiv 0$,

$$R_t = \int\limits_0^t e^{sA^T} H^T He^{sA} x_0 dx = 0, x_0 \neq 0.$$

Следовательно, $rank\,(R_t) < n$.

2. Покажем теперь, что из условия (4.4) следует, что $rank\,(R_t) = n$. Предположим противное: пусть $rank\,(R_t) < n$, то есть существует $x_0 \neq 0$ для которого $R_t x_0 = 0$. Тогда

$$0 = (R_t x_0, x_0) = \int\limits_0^t \left\|Ae^{sA}x_0\right\|^2 ds.$$

Следовательно, $He^{sA}x_0 \equiv 0$ и

$$\frac{d^k}{ds^k}\left(He^{sA}x_0\right)\Big|_{s=0} = 0, \forall k = 0, 1, 2...$$

Отсюда следует, что $Hx_0 = HAx_0 = ... = HA^{n-1}x_0 = 0$, что противоречит условию (4.4). □

**Теорема 4.2 (теорема двойственности).** *Рассмотрим две системы:*

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Hx \end{cases}, \ x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^r, \tag{4.6}$$

$$\begin{cases} \dot{z} = A^T z + H^T v \\ w = B^T z \end{cases}, z \in \mathbb{R}^n, v \in \mathbb{R}^n, w \in \mathbb{R}^n, \tag{4.7}$$

*где $x, z$ — состояния, $u, v$ — управления, $y, w$ — выходы систем* (4.6), (4.7) *соответственно.*

*Тогда управляемость системы* (4.6) *эквивалентна наблюдаемости систем* (4.7), *наблюдаемость системы* (4.6) *эквивалентна управляемости системы* (4.7).

*Доказательство.* Утверждение теоремы следует из проверки ранговых условий управляемости для матриц $(A, B)$ и наблюдаемости $(A, H)$ :

По теореме 2.1, управляемость системы (4.6) эквивалентна условию $rank\left(B, AB, ..., A^{n-1}B\right) = n$, что равносильно условию

$$rank \begin{pmatrix} B^T \\ B^T A^T \\ \vdots \\ B^T \left(A^{n-1}\right)^T \end{pmatrix} = n$$

и, по теореме 4.1, эквивалентно наблюдаемости системы (4.7).

Аналогично, по теореме 4.1, наблюдаемость системы (4.6) эквивалентна условию $rank \begin{pmatrix} H \\ HA \\ \vdots \\ HA^{n-1} \end{pmatrix} \Leftrightarrow rank\left(H^T, A^T H^T, \left(A^T\right)^{n-1} H^T\right) = n$, что, по теореме 2.1, эквивалентно управляемости системы (4.7). □

**Замечание 4.1.** Систему (4.7) будем называть *двойственной* к системе (4.6).

**Пример 4.1.** *Выяснить, наблюдаема ли следующая система:*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + x_3, \\ \dot{x}_3 = u, \end{cases}$$
$$y = x_1,$$

*где* $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ *— состояние,* $u \in \mathbb{R}^1$ *— управление,* $y \in \mathbb{R}^1$ *— выход.*

Здесь

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \, H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \, rank \begin{pmatrix} H \\ HA \\ HA^2 \end{pmatrix} = rank \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3.$$

Таким образом, рассматриваемая система наблюдаема по теореме 4.1.

## 4.1 Наблюдатель Луенбергера

Рассмотрим систему с выходом

$$\dot{x} = Ax + Bu, \; x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m \tag{4.8}$$

$$y = Hx, \; y \in \mathbb{R}^r \tag{4.9}$$

**Теорема 4.3.** *Предположим, что система* (4.8), (4.9) *наблюдаема. Тогда существует* $(n \times r)$ *матрица* $F$, *такая, что решения системы* (4.8) *и системы*

$$\dot{z} = (A - FH)\, z + Bu + Fy, z \in \mathbb{R}^n \tag{4.10}$$

*удовлетворяют условию*

$$\lim_{t \to \infty} \|x\,(t) - z\,(t)\| = 0, \forall u \in L_\infty\,[0, +\infty)\,, \forall x\,(0)\,, z\,(0) \in \mathbb{R}^n \tag{4.11}$$

**Замечание 4.2.** Система (4.10) называется *наблюдателем Луенбергера* для системы (4.8), (4.9).

**Определение 4.2.** *Спектром* матрицы $M \in Mat\,(n \times n)$ называется совокупность всех ее собственных значений:

$$\sigma\,(M) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \det\,(M - \lambda I) = 0\}\,.$$

**Определение 4.3.** Матрица $M \in Mat\,(n \times n)$ называется *гурвицевой* (см. [15]), если

$$\sigma\,(M) \subseteq \mathbb{C}_{-} = \{\lambda : \operatorname{Re}\lambda < 0\}\,.$$

*Доказательство* теоремы 4.3. Пусть $u \in L^{\infty}; x\,(0)\,, z\,(0) \in \mathbb{R}^{n}$, обозначим $e\,(t) = x\,(t) - z\,(t)$, где $x\,(t)\,, z\,(t)$ — компоненты решения системы (4.8), (4.10). Тогда

$$\dot{e}\,(t) = Ax + Bu - Az + FHz - Bu - Fy = (A - FH)\,e\,(t) \qquad (4.12)$$

По теореме Ляпунова (теорема 3.1) решение $e = 0$ системы (4.12) асимптотически устойчиво, если матрица $(A - FH)$ гурвицева. Докажем существование такой $F$, с которой матрица $(A - FH)$ будет гурвицевой.

Из наблюдаемости системы (4.8), (4.9) по теореме двойственности 4.2 следует управляемость $\left(A^{T}, H^{T}\right)$, откуда, по теоремам 3.2, 3.3, следует стабилизируемость системы

$$\dot{\xi} = A^{T}\xi + H^{T}v.$$

Это означает, что существует матрица $F^{T}$ такая, что $A^{T} - H^{T}F^{T}$ — гурвицева матрица, то есть $A - FH$ — также гурвицева. □

**Замечание 4.3.** *Построение наблюдателя Луенбергера для системы* (4.8), (4.9) *сводится к нахождению* $(n \times r)$ *матрицы* $F$*, для которой*

$$\sigma\,(A - FH) \subseteq \mathbb{C}_{-}.$$

**Пример 4.2.** *Построить наблюдатель Луенбергера для следующей системы:*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + x_3, \\ \dot{x}_3 = u, \end{cases}$$
$$y = x_1.$$

Для данной системы

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}, A - FH = \begin{pmatrix} -z_1 & 1 & 0 \\ -1 - z_2 & 0 & 1 \\ -z_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\det\left(A - FH - \lambda I\right) = \lambda^3 + \lambda^2 z_1 - \lambda\left(1 + z_2\right) + z_3 = 0.$$

Нетрудно убедиться, что при $z_1 = 3, z_2 = -4, z_3 = 1$ все решения уравнения $\det\left(A - FH - \lambda I\right) = 0$ будут равны $-1$.

Таким образом, $F = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

## 4.2 Стабилизация линейных систем с наблюдателем

**Теорема 4.4.** *Пусть управление $u = Kx$, $K \in Mat\left(m \times n\right)$, решает задачу стабилизации системы* (4.8). *Предположим также, что система* (4.8) *с выходом* (4.9) *наблюдаема, и система* (4.10) *является наблюдателем Луенбергера для системы* (4.8), (4.9) *при некоторой матрице $F \in mat\left(n \times r\right)$.*

*Тогда решение $x = 0, z = 0$ расширенной системы* (4.8), (4.9),(4.10) *с $u = Kz$ асимптотически устойчиво.*

*Доказательство.* Запишем систему (4.8), (4.10) с $u = Kz$ в переменных $x, e$ $\left(e = x - z\right)$:

$$\dot{e} = Ax + BKz - Az + FHz - BKz - FHx = Ae - FHe = \left(A - FH\right)e;$$
$$\dot{x} = Ax + BKz = Ax + BK\left(x - e\right) = \left(A + BK\right)x - BKe.$$

Полученная система может быть записана в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} x \\ e \end{pmatrix}^{\cdot} = \tilde{A} \begin{pmatrix} x \\ e \end{pmatrix},$$

где $\tilde{A} = \begin{pmatrix} A + BK & -BK \\ 0 & A - FH \end{pmatrix}$ — блочная матрица $((2n) \times (2n))$. Поскольку матрица $\tilde{A}$ — блочно-треугольная, то её спектр представляется как

$$\sigma\left(\tilde{A}\right) = \sigma\left(A + BK\right) \cup \sigma\left(A - FH\right) \tag{4.13}$$

По условию теоремы, матрица $K$ решает задачу стабилизации системы (4.8), то есть $A + BK$ — гурвицева матрица; система (4.10) — наблюдатель Луенбергера, то есть $A - FH$ — гурвицева. Отсюда на основании (4.13) следует, что $\tilde{A}$ — гурвицева, то есть решение $x = 0, z = 0$ системы (4.8), (4.10) с $u = kz$ асимптотически устойчиво по Ляпунову. □

**Замечание 4.4.** *По теореме 4.4, построение стабилизирующего управления с использованием наблюдателя сводится к поиску пары матриц $K \in mat\,(m \times n)$ и $F \in mat\,(m \times r)$, для которых матрицы $A + BK$, $A - FH$ являются гурвицевыми. При выполнении ранговых критериев управляемости и наблюдаемости такие матрицы всегда существуют.*

Задачи стабилизации с обратной связью по состоянию $(u = Kx)$ и с наблюдателем $(u = Kz)$ иллюстрируют схемы на рис. 4.2 и 4.3.

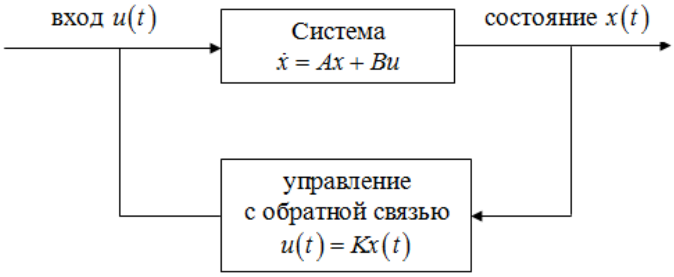


Рис. 4.2 — Стабилизация с обратной связью по состоянию

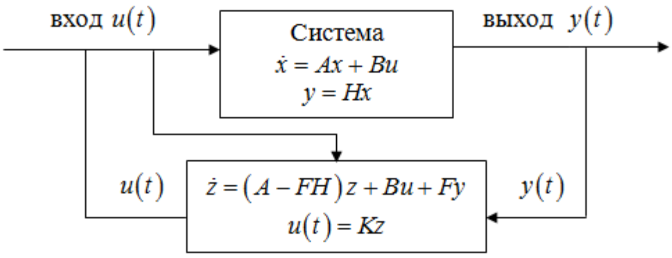


Рис. 4.3 — Стабилизация с наблюдателем в цепи обратной связи

## 4.3 Контрольные вопросы

1. Сколько строк и сколько столбцов имеет матрица в ранговом условии наблюдаемости Калмана, если состояние системы $x \in \mathbb{R}^n$, а выход $y \in \mathbb{R}^r$?

2. Всякая ли система наблюдаема?

3. Верно ли, что наблюдатель Луенбергера обеспечивает экспоненциальную сходимость $z(t)$ к $x(t)$ при $t \to -\infty$?

4. Верно ли, что наблюдатель Луенбергера обеспечивает экспоненциальную сходимость $z(t)$ к $x(t)$ при $t \to +\infty$?

## 4.4 Творческие задания

**Задание 1.** Найти необходимые и достаточные условия наблюдаемости системы

$$\begin{aligned} &\dot{x}_1 = u, \\ &\dot{x}_2 = ax_3, \\ &\dot{x}_3 = -ax_2 + bu, \\ &y = x_2, \qquad x = (x_1, x_2, x_3)^* \in \mathbb{R}^3,\ u \in \mathbb{R},\ y \in \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{4.14}$$

где $a$ и $b$ — константы.

**Задание 2.** Построить наблюдатель Луенбергера для системы (4.14).

**Задание 3.** Для системы (4.14) решить задачу стабилизации с наблюдателем по теореме 4.4.

# 5 Основы теории оптимального управления

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x, u), \tag{5.1}$$

где $x \in X \subseteq \mathbb{R}^n$, $u \in U \subseteq \mathbb{R}^m$, $f \in C^1(X \times U)$. Введем класс $\mathcal{F}$ *допустимых управлений* [1, с. 85], состоящий из всех измеримых ограниченных функций $u(t) \in U$ на отрезке $t \in [t_0, t_1]$. Обозначим через $x(t_0; \xi_0, u)$ решение системы (5.1), соответствующее управлению $u \in \mathcal{F}$ и начальным условиям $x(t_0; \xi_0, u) = \xi_0$,

$$x : [t_0, t_1] \times X \times \mathcal{F} \to X.$$

Предположим, что задан функционал

$$\mathcal{J}(\xi_0, u) = \int_{t_0}^{t_1} f_0(x(t, \xi_0, u), u(t))\, dt, \tag{5.2}$$

где функция $f_0 : X \times U \to \mathbb{R}$ удовлетворяет условиям существования интеграла (5.2) для любого начального состояния $\xi_0 \in X$ и допустимого управления $u \in \mathcal{F}$.

Сформулируем *основную задачу оптимального управления* [1, с. 17]: пусть в фазовом пространстве $X$ заданы точки $\xi_0 \in X$ и $\xi_1 \in X$. Требуется среди всех допустимых управлений $u = u(t)$, удовлетворяющих условию $x(t_1; \xi_0, u) = \xi_1$, найти такое, для которого функционал $\mathcal{J}(\xi_0, u)$ принимает наименьшее возможное значение.

Время $t_1$ может быть фиксированным или свободным. Управление $u = u(t)$, решающее задачу оптимального управления, называется *оптимальным управлением*, а соответствующая ему кривая $x(t; \xi_0, u)$ называется *оптимальной траекторией*. Функционал $\mathcal{J}(\xi_0, u)$ называется *функционалом качества* или *функционалом цены*.

## 5.1 Принцип максимума Понтрягина

Для формулировки условий оптимальности добавим к переменным состояния $x = (x_1, ..., x_n)^*$ искусственную переменную $x_0$ из дифференциального уравнения

$$\frac{dx_0}{dt} = f_0\left(x, u\right),$$

где $f_0$ — подынтегральное выражение в формуле (5.2). Обозначим

$$f\left(x, u\right) = \begin{pmatrix} f_1\left(x, u\right) \\ f_2\left(x, u\right) \\ \vdots \\ f_n\left(x, u\right) \end{pmatrix}.$$

Тогда для решения задачи Коши

$$\begin{aligned} &\dot{x}_i = f_i\left(x, u\right), \quad i = \overline{0, n},\ t \in \left[t_1, t_2\right], \\ &x_0|_{t=t_0} = 0,\ x|_{t=t_0} = \xi_0, \end{aligned}$$

выполнено свойство

$$x_0|_{t=t_1} = \int\limits_{t_0}^{t_1} f_0\left(x\left(t; \xi_0, u\right), u\left(t\right)\right) dt = \mathcal{J}\left(\xi_0, u\right).$$

Введем *сопряженные переменные* $p_0$, $p_1$, ... , $p_n$ и рассмотрим *функцию Гамильтона*:

$$H\left(p_0, ..., p_n, x_1, ..., x_n, u\right) = \sum_{j=0}^{n} p_j f_j\left(x, u\right) \tag{5.3}$$

С помощью функции $H$ запишем *гамильтонову систему* дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad i = 0, 1, 2, ..., n \tag{5.4}$$

Эта система содержит $2n+2$ обыкновенных дифференциальных уравнения относительно функций $x_0(t)$, $x_1(t)$,..., $x_n(t)$ и $p_0(t)$, $p_1(t)$, ..., $p_n(t)$.

**Теорема 5.1. (Принцип максимума Понтрягина [1, с. 25])** *Пусть для допустимого управления* $u = \tilde{u}(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, *выполнено условие* $x(t_1; \xi_0, \tilde{u}) = \xi_1$. *Для оптимальности управления* $\tilde{u}(t)$ *и траектории* $\tilde{x}(t) = x(t; \xi_0, \tilde{u})$ *необходимо существование такой непрерывной вектор-функции*

$$p(t) = (p_0(t), p_1(t), ..., p_n(t)) \neq 0,$$

*что* $x = \tilde{x}(t)$, $p(t)$, $u = \tilde{u}(t)$ *удовлетворяют системе* (5.4) *и выполнены следующие условия:*

1. $H(p(t), \tilde{x}(t), \tilde{u}(t)) = \sup\limits_{u \in U} H(p(t), \tilde{x}(t), u)$, $t \in [t_0, t_1]$;
2. $p_0(t_1) \leq 0$, $\sup\limits_{u \in U} H(p(t_1), \tilde{x}(t_1), u) = 0$.

*Если* $x = \tilde{x}(t)$, $p(t)$, $u = \tilde{u}(t)$ *удовлетворяют системе* (5.4) *и условию 1., то* $p_0(t) \equiv \mathrm{const}$, $\sup\limits_{u \in U} H(p(t), \tilde{x}(t), u) \equiv \mathrm{const}$, *т.е. условие 2. можно проверять для произвольного* $t \in [t_0, t_1]$.

Если допустимое управление $u = \tilde{u}(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, и соответствующая траектория $x = \tilde{x}(t)$ удовлетворяют системе (5.4), краевым условиям $\tilde{x}(t_0) = \xi_0$, $\tilde{x}(t_1) = \xi_1$ и условиям 1.—2. теоремы 5.1 с некоторой непрерывной функцией $p(t) = (p_0(t), p_1(t), ..., p_n(t)) \neq 0$, то такое $\tilde{u}(t)$ будем называть *экстремальным управлением* (*экстремалью*) [10, с. 43]. Так как принцип максимума Понтрягина описывает необходимые условия оптимальности, то каждое оптимальное управление должно быть экстремальным.

Важным частным случаем задачи оптимального управления является задача оптимального быстродействия, которую при $t_0 = 0$ сформулируем следующим образом.

*Задача оптимального быстродействия*: для заданных начального и конечного положений $\xi_0, \xi_1 \in X$ системы (5.1) требуется найти минимальное время $t_1$ и допустимое управление $\tilde{u} \in \mathcal{F}$, для которых $x(t_1; \xi_0, \tilde{u}) = \xi_1$.

Для такой задачи определим функционал

$$\mathcal{J}(\xi_0, u) = \int_0^{t_1} 1\, dt = t_1.$$

Данный функционал представляется в виде (5.2) с $f_0(x, u) = 1$, а соответствующая функция Гамильтона равна

$$H = p_0 + \sum_{j=1}^{n} p_j f_j(x, u).$$

Нетрудно видеть, что никакая из частных производных $\partial H / \partial x_j$ с $j \geq 1$ не зависит от $p_0$, поэтому дифференциальные уравнения (5.4) относительно $p_1$, $p_2$,...,$p_n$ можно рассматривать независимо от $p_0$. Таким образом, можно ввести новую функцию Гамильтона

$$h(p_1, ..., p_n, x, u) = \sum_{j=1}^{n} p_j f_j(x, u) \tag{5.5}$$

и сформулировать частный случай принципа максимума Понтрягина для задачи оптимального быстродействия [1, с. 26].

**Теорема 5.2. (Принцип максимума Понтрягина для задачи оптимального быстродействия)** *Пусть $u = \tilde{u}(t), t_0 \leq t \leq t_1,$ – такое допустимое управление, что $x(t_1; \xi_0, \tilde{u}) = \xi_1$. Для оптимальности (по быстродействию) управления $\tilde{u}(t)$ и траектории $\tilde{x}(t) = x(t; \xi_0, \tilde{u})$ необходимо существование такой непрерывной вектор-функции*

$$p(t) = (p_1(t), ..., p_n(t)) \neq 0,$$

*что $x = \tilde{x}(t)$, $p(t)$, $u = \tilde{u}(t)$ удовлетворяют гамильтоновой системе*

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial h}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial h}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, ..., n, \tag{5.6}$$

*и выполнены следующие условия:*

1. $h(p(t), \tilde{x}(t), \tilde{u}(t)) = \sup_{u \in U} h(p(t), \tilde{x}(t), u)$, $t \in [0, t_1]$;

*2.* $\sup\limits_{u\in U} h\left(p\left(t_1\right), \tilde{x}\left(t_1\right), u\right) \geq 0.$

*Если* $x = \tilde{x}(t)$, $p(t)$, $u = \tilde{u}(t)$ *удовлетворяют системе* (5.6) *и условию 1., то* $\sup\limits_{u\in U} h\left(p\left(t\right), \tilde{x}\left(t\right), u\right) \equiv \text{const}$*, т.е. условие 2. можно проверять для произвольного* $t \in [t_0, t_1]$.

В качестве примера рассмотрим задачу о быстрейшем попадании в начало координат [1, с. 29].

**Пример 5.1 (Наибыстрейшая остановка).** *Рассмотрим движение материальной точки массы* $m = 1$ *под действием управляющей силы по второму закону Ньютона:*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = u, \end{cases} \qquad |u| \leq 1, \tag{5.7}$$

*где* $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, $x_1$ *— координата точки,* $x_2$ *— скорость,* $u$ *— управление (сила).*

*Необходимо для заданных* $\xi_0 = \begin{pmatrix} \xi_{01} \\ \xi_{02} \end{pmatrix}$ *и* $\xi_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ *найти управление* $u\left(t\right), t \in \left[0; t_1\right]$, *переводящее систему* (5.7) *из* $\xi_0$ *в* $\xi_1$ *за минимальное время* $t_1$.

Воспользуемся теоремой 5.2. Определим функцию Гамильтона:

$$h\left(p_1, p_2, x_1, x_2, u\right) = p_1 f_1 + p_2 f_2 = p_1 x_2 + p_2 u.$$

Запишем систему уравнений Гамильтона (5.6):

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{\partial h}{\partial p_1} = x_2, \dot{x}_2 = \frac{\partial h}{\partial p_2} = u, \\ \dot{p}_1 = -\frac{\partial h}{\partial x_1} = 0, \dot{p}_2 = -\frac{\partial h}{\partial x_2} = -p \end{cases} \tag{5.8}$$

Интегрируя уравнения (5.8) относительно $p\left(t\right)$, получим:

$$p_1\left(t\right) = p_1^0 = const,$$
$$p_2\left(t\right) = -p_1^0 t + p_2^0.$$

Если $u(t)$ — оптимальное управление, то должно выполняться первое свойство теоремы 5.2:

$$h(p(t), x(t), \tilde{u}(t)) = p_1 x_2 + p_2 \tilde{u} = \sup_{u \in [-1,1]} (p_1 x_2 + p_2 u) = p_1 x_2 + |p_2|.$$

Отсюда

$$\tilde{u}(t) = sign(p_2(t)) = sign\left(-p_1^0 t + p_2^0\right).$$

Следовательно,

1) оптимальное управление $\tilde{u}(t) = \pm 1$;

2) оптимальное управление $\tilde{u}$ либо сохраняет свое значение, либо переходит с $-1$ в $+1$ (с $+1$ в $-1$) ровно один раз.

Поэтому каждая оптимальная траектория состоит не более чем из двух частей — траекторий системы (5.7) с $u = +1$ или $u = -1$.

Изобразим эти траектории на плоскости $(x_1, x_2)$.

1. Пусть $u \equiv +1$, тогда

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = 1, \end{cases} \tag{5.9}$$

$\begin{cases} x_1 = \frac{t^2}{2} + x_2^0 t + x_1^0 \\ x_2 = t + x_2^0 \end{cases}$ — параболы, расположенные симметрично оси $Ox_1$.

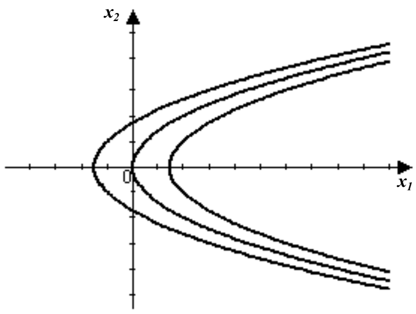


Рис. 5.1 — Траектории системы (5.9)

2. Пусть $u \equiv -1$, тогда

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -1, \end{cases} \tag{5.10}$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-t^2}{2} + x_2^0 t + x_1^0 \\ x_2 = -t + x_2^0 \end{cases}$$ — семейство парабол, повернутых в другую сторону.

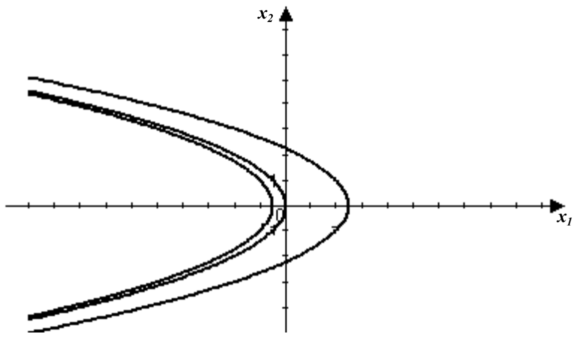


Рис. 5.2 — Траектории системы (5.10)

Изобразим множество точек, которые переводятся в $(0, 0)$ посредством управлений без переключений.

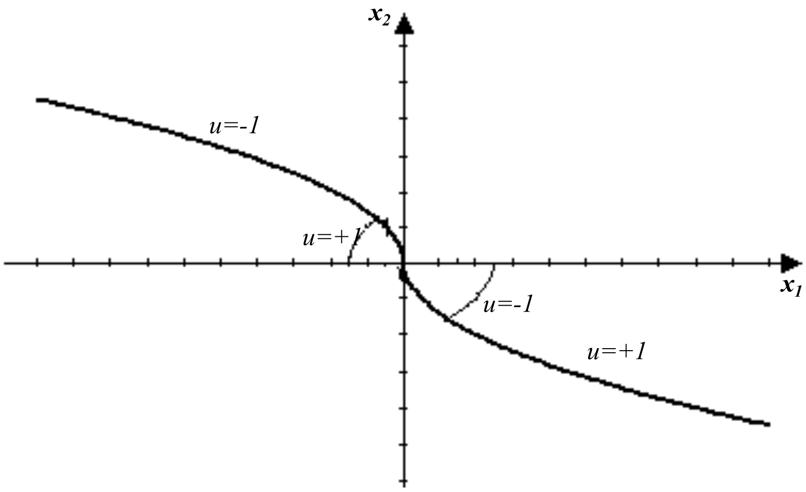


Рис. 5.3 — Кривая переключений в задаче оптимального быстродействия

Обозначим

$$\Gamma_- : x_1 = -\frac{x_2^2}{2}, x_2 > 0,$$
$$\Gamma_+ : x_1 = -\frac{x_2^2}{2}, x_2 < 0,$$

$G_-$ — часть плоскости левее $\Gamma_+ \cup \Gamma_-$,

$G_+$— часть плоскости правее $\Gamma_+ \cup \Gamma_-$.

Согласно теореме 5.2, если $\tilde{u}(t)$ — оптимальное управление, то

$$\tilde{u}(t) = \begin{cases} +1, \text{если} x(t) \in G_- \cup \Gamma_+, \\ -1, \text{если} x(t) \in G_+ \cup \Gamma_-. \end{cases}$$

## 5.2 Оптимальное управление односекторной моделью экономики

Для иллюстрации приложения принципа максимума Понтрягина к задачам экономической динамики, рассмотрим балансовое соотношение модели Леонтьева (1.4) для случая одной отрасли ($n = 1$):

$$X(t) = aX(t) + b\frac{dX(t)}{dt} + C(t), \quad t \in [0, \tau], \tag{5.11}$$

где $0 < a < 1$ и $b > 0$ — константы, управление $C(t)$ удовлетворяют ограничениям

$$U : C_{\min} \leq C(t) \leq C_{\max}, \quad C_{\min} \geq 0 \tag{5.12}$$

Перепишем дифференциальное уравнение (5.11) в нормальной форме:

$$\frac{dX}{dt} = \frac{1-a}{b}X - \frac{1}{b}C, \quad t \in [0, \tau] \tag{5.13}$$

Для заданного начального состояния $X(0) = X^0 \geq 0$, задачу максимизации функционала качества (1.6) сведем к минимизации интегрального функционала:

$$-\mathcal{J} = -\alpha \int_0^\tau C(t)dt - \beta X(\tau) = -\beta X^0 - \int_0^\tau \left\{ \alpha C(t) + \beta \frac{dX(t)}{dt} \right\} dt \to \min .$$

Подставив в этот интеграл производную $dX/dt$ из уравнения (5.13), получим эквивалентную форму записи критерия качества (1.6):

$$\bar{\mathcal{J}}(X^0, C) = \frac{1}{b} \int_0^\tau \{(a-1)\beta X(t) + (\beta - \alpha b)C(t)\} \, dt \to \min \tag{5.14}$$

Итак, задача оптимального управления состоит в том, чтобы для заданного $X^0 \geq 0$ найти допустимое управление $C = \tilde{C}(t)$ и соответствующее решение $X(t)$ уравнения (5.13) на отрезке $t \in [0, \tau]$ таким образом, чтобы $X(0) = X^0$ и при $C = \tilde{C}(t)$ достигался минимум функционала (5.14) в классе всех допустимых управлений, удовлетворяющих ограничениям (5.12).

Для решения задачи (5.13), (5.14) применим теорему 5.1. Составим функцию Гамильтона:

$$H(p_0, p_1, X, C) = \frac{p_0}{b} \{(a-1)\beta X + (\beta - \alpha b)C\} + \frac{p_1}{b} \{(1-a)X - C\} .$$

Система дифференциальных уравнений Гамильтона (5.4) примет вид

$$\dot p_0 = -\frac{\partial H}{\partial X_0} = 0, \quad \dot p_1 = -\frac{\partial H}{\partial X} = \frac{a-1}{b}p_1 + \frac{(1-a)\beta}{b}p_0,$$

$$\dot X_0 = \frac{\partial H}{\partial p_0} = \frac{(a-1)\beta}{b}X + \left(\frac{\beta}{b} - \alpha\right)C, \quad \dot X = \frac{\partial H}{\partial p_1} = \frac{1-a}{b}X - \frac{1}{b}C \quad (5.15)$$

Решая эти уравнения относительно сопряженных переменных $p_0$ и $p_1$, с учетом условия 2. теоремы 5.1 получим:

$$p_1(t) = ke^{\frac{a-1}{b}t} - \beta p_0, \quad p_0 = \text{const} \le 0, \qquad (5.16)$$

где $k$ — константа интегрирования. Если $\tilde C(t)$ — оптимальное управление в задаче (5.13), (5.14), то при ограничениях (5.12) условие максимальности гамильтониана $H$ (условие 1. теоремы 5.1) приводит к формуле

$$\tilde C(t) = \begin{cases} C_{\min}, & p_1(t) > p_0(\beta - \alpha b), \\ C_{\max}, & p_1(t) < p_0(\beta - \alpha b) \end{cases} \qquad (5.17)$$

Если $p_1(t) = p_0(\beta - \alpha b)$, то $\tilde C(t)$ может принимать любое значение из отрезка $[C_{\min}, C_{\max}]$. Для исключения из формулы (5.17) неизвестных констант $p_0$ и $k$ воспользуемся условием 2. теоремы 5.1. Возможны два случая.

*Случай* $p_0 = 0$. Поскольку должно выполняться условие

$$p(t) = (p_0(t), p_1(t)) \ne 0,$$

то $k \ne 0$ в формуле (5.16) и функция $p_1(t)$ сохраняет знак, т.е. $\tilde C(t) \equiv \text{const}$ в рассматриваемом случае. Если $p_1(t) > 0$, то $\tilde C \equiv C_{\min}$ и условие 2. теоремы 5.1 дает

$$\max_{C\in[C_{\min}, C_{\max}]} H\left(p_0, p_1, X(t), C\right) = \max_{C\in[C_{\min}, C_{\max}]} \frac{(1-a)X(t) - C}{b} = 0, \qquad (5.18)$$

что выполнено только при $X(t) \equiv X^0 = \frac{C_{\min}}{1-a}$. Аналогично, если $p_1(t) < 0$, то $\tilde C \equiv C_{\max}$ и условие (5.18) выполняется только при $X(t) \equiv X^0 = \frac{C_{\max}}{1-a}$.

Таким образом, если $X^0 = \frac{C_{\min}}{1-a}$, то экстремальным управлением является $\tilde C(t) \equiv C_{\min}$, если $X^0 = \frac{C_{\max}}{1-a}$, то $\tilde C(t) \equiv C_{\max}$. При этом экстремальной траекторией является особая точка $X(t) \equiv X^0$.

*Случай* $p_0 < 0$. Обозначим $\tilde{p}(t) = -p_1(t)/p_0$, тогда из (5.16) следует

$$\tilde{p}(t) = \tilde{k}e^{\frac{a-1}{b}t} + \beta \tag{5.19}$$

Выражение (5.17) запишем следующим образом:

$$\tilde{C}(t) = \begin{cases} C_{\min}, & \tilde{p}(t) > \alpha b - \beta, \\ C_{\max}, & \tilde{p}(t) < \alpha b - \beta \end{cases} \tag{5.20}$$

Пусть $C = \tilde{C}(t)$ и $X(t)$ — оптимальное управление и оптимальная траектория задачи (5.13), (5.14) для начального условия $X(0) = X^0 > 0$. Согласно теореме 5.1, соответствующее решение гамильтоновой системы (5.15) обладает свойством

$$\max_{C \in [C_{\min}, C_{\max}]} H(p_0, p_1(t), X(t), C) = 0, \quad \forall t \in [0, \tau].$$

Отсюда, с учетом представлений (5.19) и (5.20), при $t = 0$ получаем:

$$-\frac{b}{p_0} \max_C H(p_0, -p_0\tilde{p}(0), X^0, C) = (1-a)(\tilde{k} + 2\beta)X^0 +$$

$$+ \max_{C \in [C_{\min}, C_{\max}]} \Big\{ (\alpha b - \tilde{k} - 2\beta)C \Big\} = 0.$$

Это условие распадается на три:

$$\tilde{k} = -2\beta, \quad \tilde{k} = -2\beta + \alpha b, \tag{5.21}$$

или

$$\tilde{k} = -2\beta - \frac{\alpha b C_{\min}}{(1-a)X^0 - C_{\min}}, \quad \tilde{k} > -2\beta + \alpha b, \tag{5.22}$$

или

$$\tilde{k} = -2\beta - \frac{\alpha b C_{\max}}{(1-a)X^0 - C_{\max}}, \quad \tilde{k} < -2\beta + \alpha b \tag{5.23}$$

В рассматриваемом случае знаменатели в формулах (5.22) и (5.23) отличен от нуля, ибо случаи $X^0 = C_{\min}/(1-a)$ и $X^0 = C_{\max}/(1-a)$ были рассмотрены выше. В соответствии с экономическим содержанием задачи будем предполагать, что $(1-a)X^0 - C > 0$ при всех $C \in [C_{\min}, C_{\max}]$, поскольку в балансовом соотношении (5.11) левая часть и каждое из слагаемых в правой части должны быть положительными. Отсюда следует, что при естественных предположениях ($b > 0$, $\alpha > 0$, $C_{\min} \geq 0$) что условия (5.21), (5.22) не выполняются, но справедливо условие (5.23).

Итак, экстремальное управление $C = \tilde{C}(t)$ в задаче (5.13), (5.14) с начальным условием $X(0) = X^0$ задается формулой (5.20), где функция $\tilde{p}(t)$ и константа $\tilde{k}$ определены в (5.19) и (5.23).

При достаточно общих предположениях экстремальные управления являются оптимальными (см. [13]). Условия существования оптимальных управлений приводятся в следующем пункте для класса линейных задач быстродействия.

## 5.3 Оптимальное по быстродействию управление в линейных системах

Пусть

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x \in \mathbb{R}^n, u \in U \subseteq \mathbb{R}^m \tag{5.24}$$

Рассмотрим задачу оптимального быстродействия с целевым множеством: для заданных точки $\xi \in \mathbb{R}^n$ и множества $G \subseteq \mathbb{R}^n, G \neq \varnothing$, требуется найти $t_1 > 0$ и допустимое управление $\tilde{u} : [0, t_1] \to U$, для которых решение системы (5.24) удовлетворяет условию $x(t, \xi_0, \tilde{u}) \in G$, и для всякого допустимого управления $u : [0, t_2] \to U$ выполнено: если $x(t_2, \xi_0, \tilde{u}) \in G$, то $t_2 \geq t_1$.

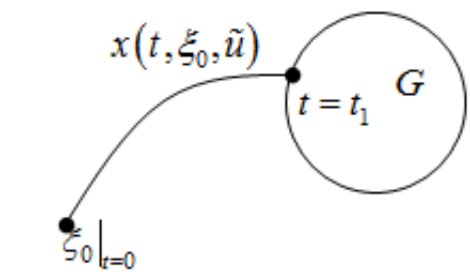


Рис. 5.4 — Траектория, достигающая целевого множества $G$

**Определение 5.1.** *Множеством достижимости* системы (5.24) из $\xi_0 \in \mathbb{R}^n$ за время $t_1$ называется следующее множество:

$$A_{t_1}(\xi_0) = \{x(t_1, \xi_0, u): \quad u:[0, t_1] \to U - \text{допустимое управление}\}.$$

**Определение 5.2.** [7, с. 86] Задача оптимального быстродействия для системы (5.24) с начальным состоянием $\xi_0 \in \mathbb{R}^n$ называется *нормальной* при $t = t_1$, если для произвольного $\xi_1 \in \partial A_{t_1}(\xi_0)$ и для любых допустимых управлений $u_1, u_2 : [0, t_1] \to U$ выполнено свойство: если

$$x(t, \xi_2, u_1) = x(t, \xi_0, u_2) = \xi_1,$$

то $u_1(t) = u_2(t)$ почти всюду на отрезке $t \in [0, t_1]$.

**Теорема 5.3.** *Пусть $U$ — выпуклый компакт, $\xi_0 \in \mathbb{R}^n$, $G \subseteq \mathbb{R}^n$ — компактное целевое множество.*

*Если существует допустимое управление $u : [0, t_1] \to U$, для которого $x(t_1, \xi_0, u) \in G$, то существует оптимальное по быстродействию управление $\tilde{u} : \left[0, \tilde{t}_1\right] \to U$, для которого $x\left(\tilde{t}_1, \xi_0, \tilde{u}\right) \in G; \tilde{t}_1 \leq t_1$.*

**Теорема 5.4.** *Пусть $U$ — выпуклый многогранник в $\mathbb{R}^m$. Задача оптимального быстродействия для системы (5.24) с $\xi_0 \in \mathbb{R}^n$ нормальна для произвольного $t_1 > 0$, если $B\omega, AB\omega, ..., A^{n-1}B\omega$ линейно независимы для любого $\omega \neq 0$, направленного вдоль ребра $u$.*

**Пример 5.2 (Управляемый гармонический осциллятор).** *Пусть*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 + u, \end{cases} \qquad |u| \leq 1 \tag{5.25}$$

*Найти оптимальное управление, переводящее систему (5.25) из точки $\xi_0 = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ в точку $0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ за минимальное время.*

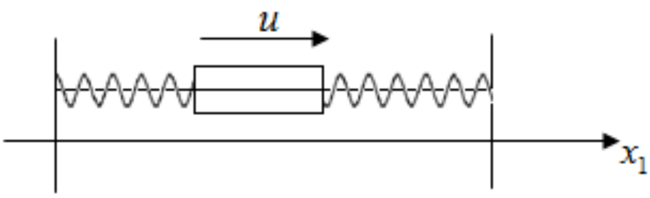


Рис. 5.5 — Гармонический осциллятор с управлением

Применим принцип максимума Понтрягина (теорема 5.2):

$$h(p_1, p_2, x_1, x_2, u) = p_1 f_1 + p_2 f_2 = p_1 x_2 - p_2 x_1 - p_2 u,$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + u, \\ \dot{p}_1 = p_2, \\ \dot{p}_2 = -p_1. \end{cases}$$

$$\tilde{u}(t) : h(p, x, \tilde{u}) = \max_{u \in [-1,1]} h(p, x, u).$$

Отсюда

$$\tilde{u}(t) = \operatorname{sign}(p_2(t)) = \operatorname{sign}(c \sin(t + \alpha)), \tag{5.26}$$

$p_2 = c \sin(t + \alpha), c \neq 0.$

Пусть $\tau > 0$ — время первого переключения в управлении (5.26), то есть $\sin(\tau + \alpha) = 0, \sin(\tau + \alpha) \neq 0$ при $t \in (0, \tau)$. Тогда

$$\tilde{u}(t) = \begin{cases} \tilde{u}(0), \text{ если } t \in (0, \tau] \cup (\tau + \pi, \tau + 2\pi] \cup ..., \\ -\tilde{u}(0), \text{ если } t \in (\tau, \tau + \pi] \cup (\tau + 2\pi, \tau + 3\pi] \cup .... \end{cases}$$

Итак, оптимальное управление обладает следующими свойствами:

1) $\tilde{u}(t) = \pm 1$;

2) время первого переключения $\tau < \pi$;

3) время между соседним переключениями равно $\pi$;

4) оптимальные траектории системы (5.25) состоят из кусков траекторий систем

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 - 1; \end{cases} \qquad (\Sigma_-)$$

и

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + 1. \end{cases} \qquad (\Sigma_+)$$

Запишем интеграл системы $(\Sigma_-)$:

$$(x_1 + 1)^2 + x_2^2 = C,$$

и системы $(\Sigma_+)$:

$$(x_1 - 1)^2 + x_2^2 = C.$$

Таким образом, траекториями без переключений являются дуги окружностей с центрами в точках $(1, 0)$ и $(0, 1)$ (см. рис. 5.6.)

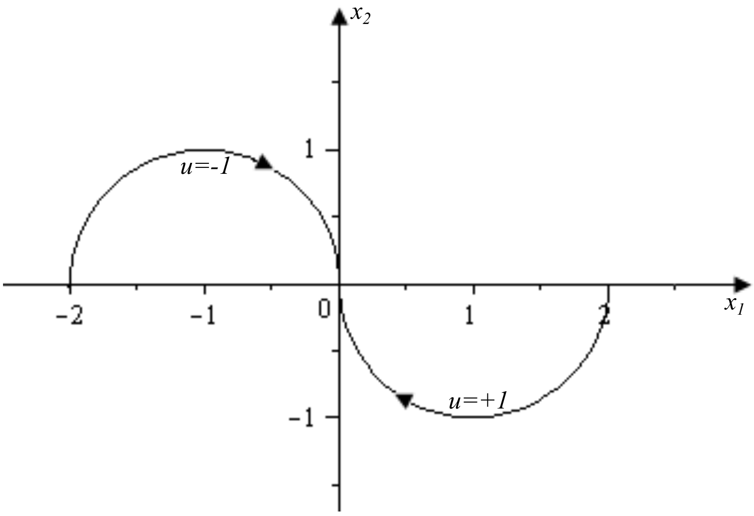


Рис. 5.6 — Траектории без переключений, ведущие в точку $(0, 0)$

Время движения по каждой из полуокружностей в точности равно $\pi$, поэтому окружности не продолжаются за точки $(-2, 0)$ и $(0, 2)$, так как время между переключениями не превышает $\pi$.

Кривая переключений: $\Gamma = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} (\Gamma_n^+ \bigcup \Gamma_n^-)$, где

$$\Gamma_n^+ = \left\{ (x_1, x_2) : (x_1 - 2n + 1)^2 + x_2^2 = 1, x_2 \leq 0 \right\},$$

$$\Gamma_n^- = \left\{ (x_1, x_2) : (x_1 + 2n - 1)^2 + x_2^2 = 1, x_2 \geq 0 \right\}.$$

Подробное рассмотрение этого примера содержится в книге [1], с. 34.

**Определение 5.3.** Оптимальное управление $u(t)$, определяемое в виде функции фазового вектора $u(t) = \tilde{u}(x(t))$, называется *оптимальным синтезом.*

**Определение 5.4.** Пусть $U$ — выпуклый многогранник в $\mathbb{R}^m$. *Релейным управлением* называется управление $u : [0, T] \to U$ следующего вида:

$$u(t) = u_k \text{ при } \tau_{k-1} \leq t < \tau_k, k = \overline{1, n},$$

когда $0 = \tau_0 < \tau_1 < ... < \tau_k < ... < \tau_n = T, u_k \in \partial U.$

**Замечание 5.1.** *В задаче оптимального по быстродействию управления $h(p, x, u)$ — линейная по $u$ функция, то есть для всех $t \geq 0$,*

$$\max_{u \in U} h(p(t), x(t), u)$$

*достигается при $u \in \partial U$, следовательно, оптимальное управление всегда является релейным для задачи оптимального быстродействия.*

## 5.4 Принцип динамического программирования Беллмана

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений:

$$\dot{x} = f(x, u), x \in E \subseteq \mathbb{R}^n, u \in U \subseteq \mathbb{R}^m, \tag{5.27}$$

где $E$ — некоторая область, $f \in C^1(E \times U)$.

Обозначим $x(t, x_0, u)$ — решение задачи Коши для уравнения (5.27) с допустимым управлением $u$, $x|_{t=0} = x_0$. Предположим, что задан функционал

$$\mathcal{J}_T(x_0, u) = \int_0^T g(x(t, x_0, u), u(t))\, dt + G(x(T, x_0, u)), \tag{5.28}$$

где $g(x, u) \geq 0, g, G$ — непрерывные функции.

**Задача оптимального управления:** [10] Для заданных начального состояния $x_0 \in E$, множества $M \subseteq E$, времени $T > 0$, найти допустимое управление $\tilde{u} : [0, T] \to U$, удовлетворяющее следующим условиям:

1) $x(t, x_0, \tilde{u}) \in E, \forall t \in [0, T]$;

2) $x(T, x_0, \tilde{u}) \in M$;

3) $\mathcal{J}_T(x_0, \tilde{u}) \le \mathcal{J}_T(x_0, u)$ для любого допустимого $u$: $[0, T] \to U$, удовлетворяющего условиям 1) и 2).

**Теорема 5.5 (Принцип динамического программирования Беллмана).** *Если $\tilde{u} : [0, T] \to U$ — оптимальное управление для задачи* (5.27), (5.28) *с начальным условием $x_0 \in E$, то для любого $\tau \in [0, T]$ управление $\hat{u}(t) = \tilde{u}(t - \tau), t \in [0, T - \tau)$ является оптимальным для системы* (5.27) *с начальным состоянием $\hat{x}_0 = x(\tau, x_0, \hat{u})$ и функционалом $\mathcal{J}_{T-\tau}(\hat{x}_0, u)$.*

*Доказательство* проведем методом от противного. Пусть существует $\tau \in [0, T]$ и $\bar{u} : [0, T - \tau] \to U$, для которых

$$\mathcal{J}(\hat{x}_0, \hat{u}) > \mathcal{J}(\hat{x}_0, \bar{u}), \tag{5.29}$$

то есть $\hat{u}$ не оптимально на $[0, T - \tau]$. Тогда определим управление

$$u(t) = \begin{cases} \tilde{u}(t), 0 \le t \le \tau, \\ \bar{u}(t - \tau), \tau \le t \le T. \end{cases}$$

Запишем значения $\mathcal{J}_T(x_0, u)$ и $\mathcal{J}_T(x_0, \tilde{u})$:

$$\mathcal{J}_T(x_0, \tilde{u}) = \int_0^\tau g(x(t, x_0, \tilde{u}), \tilde{u}(t))\, dt + \int_0^{T-\tau} g(x(s, \hat{x}_0, \hat{u}), \hat{u}(s))\, ds +$$
$$+G(x(T - \tau, \hat{x}_0, \hat{u})) = \int_0^\tau g(x(t, x_0, \tilde{u}), \tilde{u}(t))\, dt + \mathcal{J}_{T-\tau}(\hat{x}_0, \hat{u}).$$

Аналогично,

$$\mathcal{J}_T(x_0, u) = \int_0^\tau g(x(t, x_0, \tilde{u}), \tilde{u}(t))\, dt + \mathcal{J}_{T-\tau}(\hat{x}_0, \bar{u}).$$

Тогда из предположения (5.29) следует, что $\mathcal{J}_T(x_0, \tilde{u}) > \mathcal{J}_T(x_0, u)$, что противоречит оптимальности $\hat{u}(t)$. $\square$

## 5.5 Вывод уравнений Беллмана

Предположим, что задача оптимального управления для системы (5.27) с функционалом (5.28) имеет решение при всех $(T, x_0) : T > 0, x_0 \in E$. Тогда определим функцию Беллмана:

$$W(T, x_0) = \inf \mathcal{J}_T(x_0, u), \tag{5.30}$$

где $x(t, x_0, u) \in M, u : [0, T] \to U$ — допустимое управление.

Для $v \in V$ определим функцию $z_v(t), t \geq 0$ как решение задачи Коши:

$$z_v(0) = x_0, \dot{z}_v(t) = f(z_v(t), v).$$

Пусть $\tilde{u}_\xi : [0, T] \to U$ — оптимальное управление для задачи (5.27), (5.28) с начальным условием $x|_{t=0} = \xi$. Введём функцию управления

$$u_v : [0, T+h] \to U, \quad u_v(t) = \begin{cases} v, t \in [0, h], \\ \tilde{u}_{z_v(h)}(t-h), t > h. \end{cases}$$

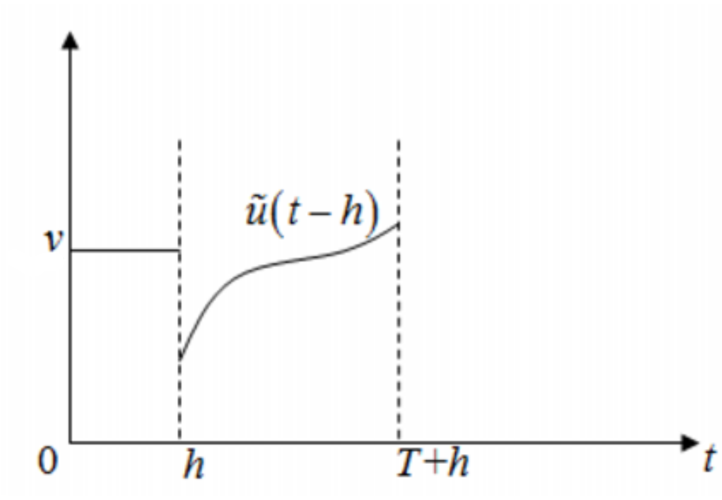


Рис. 5.7 — График функции $u_v(t)$

Рассмотрим $\mathcal{J}_{T+h}(x_0, u_v)$:

$$\begin{gathered}\mathcal{J}_{T+h}(x_0, u_v) = \int\limits_0^h g(z_v(t), v)\, dt + \int\limits_h^{T+h} g(z_v(t), v)\, dt + G|_{t=T+h} = \\ = \int\limits_0^h g(z_v(t), v)\, dt + W(T, z_v(h))\end{gathered} \tag{5.31}$$

Используя принцип Беллмана для $\tau = h$ и теорему о среднем для

$$\int\limits_0^h g\left(x\left(t\right), u\left(t\right)\right) dt,$$

из (5.31) получаем:

$$W\left(T+h, x_0\right) = \inf \mathcal{J}_{T+h}\left(\xi_0, u\right) = \inf \mathcal{J}_{T+h}\left(x_0, u_v\right) + \bar{o}\left(h\right) \tag{5.32}$$

Из формул (5.32), (5.31) следует:

$$\frac{W\left(T+h, x_0\right) - W\left(T, x_0\right)}{h} =$$

$$= \frac{\inf\limits_v \left(\int\limits_0^h g\left(z_v\left(t\right), v\right) dt + W\left(T, z_v\left(h\right)\right) - W\left(T, x_0\right)\right)}{h} + \bar{o}\left(h\right) \tag{5.33}$$

Воспользуемся разложением в ряд Тейлора:

$z_v\left(h\right) = x_0 + f\left(x_0, v\right) h + \bar{o}\left(h\right),$

$\int\limits_0^h g\left(z_v\left(t\right), v\right) dt = hg\left(x_0, v\right) + \bar{o}\left(h\right)$ при $h \to 0$.

Переходя к пределу в (5.33) при $h \to 0$ получим:

$$\frac{\partial W}{\partial T} = \inf_{v \in U} \left\{ g\left(x_0, v\right) + \left\langle \frac{\partial W}{\partial x}, f\left(x_0, v\right) \right\rangle \right\}.$$

Получено *уравнение Беллмана*:

$$\frac{\partial W\left(t, x\right)}{\partial t} = \inf_{u \in U} \left\{ g\left(x, u\right) + \left\langle \frac{\partial W}{\partial x}, f\left(x, u\right) \right\rangle \right\} \tag{5.34}$$

**Теорема 5.6.** *Предположим, что* $W \in C^1\left(\left[0, T\right] \times E\right)$ *— решение дифференциального уравнения*

$$\frac{\partial W\left(t, x\right)}{\partial t} = \inf_{u \in U} \left\{ g\left(x, u\right) + \left\langle \frac{\partial W}{\partial x}, f\left(x, u\right) \right\rangle \right\}, \quad \left(t, x\right) \in \left[0, T\right] \times E,$$

*с граничными условиями*

$$W\left(0, x\right) = G\left(x\right),\ x \in E \tag{5.35}$$

*Тогда:*

1) *если* $u \in L_\infty[0,T] \to U, x(t,x_0,u) \in E, \forall t \in [0,T]$, *то*

$$\mathcal{J}_T(x_0,u) \geq W(T,x) \tag{5.36}$$

2) *если существует функция* $\hat{v} : [0,T] \times E \to U$ *такая, что*

$$g(x,\hat{v}(t,x)) + \langle W_x(t,x), f(x,\hat{v}(t,x))\rangle \leq g(x,u) + \langle W_x(t,x), f(x,u)\rangle, \tag{5.37}$$

*где* $t \in (0,T), x \in E, u \in V,$ *и* $\hat{x}(t) \in E$ — *решение задачи Коши:*

$$\frac{d}{dt}\hat{x}(t) = f(\hat{x}(t), \hat{v}(T-t,\hat{x}(t))), \hat{x}(0) = x_0, t \in [0,T], \tag{5.38}$$

*то* $\hat{u}(t) = \hat{v}(T-t,\hat{x}(t))$ — *оптимальное управление для задачи* (5.27), (5.28), *при этом*

$$\mathcal{J}_T(x_0,\hat{u}) = W(x_0,T).$$

*Доказательство.* 1) обозначим $w(t) = W(T-t, x(t,x_0,u)), t \in [0,T]$. Тогда

$$\dot{w}(t) = -W_t(T-t, x(t,x_0,u)) + \langle W_x(T-t,x), f(x,u(t))\rangle.$$

Отсюда

$$w(T) - w(0) = \int_0^T \dot{w}(t)\,dt = \int_0^T \{-W_t(T-t,x) + \langle W_x(T-t,x), f(x,u(t))\rangle +$$
$$g(x,u(t)) - g(x,u(t))\}\,dt \geq \{\text{ из уравнения Беллмана (5.34) }\} \geq$$
$$\geq -\int_0^T f(x(t,x_0,u),u(t))\,dt \tag{5.39}$$

С другой стороны,

$$w(T) - w(0) = W(0, x(T,x_0,u)) - W(T,x_0) = G(x(T,x_0,u)) - W(T,x_0) \tag{5.40}$$

Из (5.39), (5.40) следует:

$$G(x(T,x_0,u)) + \int_0^T g(x(t,x_0,u),u(t))\,dt = \mathcal{J}_T(x_0,u) \geq w(T) - w(0) +$$
$$+W(T,x) + v(0) - v(T) = W(t,x),$$

то есть $\mathcal{J}_T(x_0 u) \geq W(T, x)$.

2) пусть $u = \hat{u}(t)$. Применим формулу вида (5.39) для $\hat{x}(t) = x(t, x_0, \hat{u})$:

$$w(T) - w(0) = G(\hat{x}(T)) - W(T, x_0) = \int_0^T \dot{w}(t)\, dt =$$
$$= \int_0^T \{-W_t(T-t, x(t)) + \langle W_x(T-t, \hat{x}(t)), f(\hat{x}(t), \hat{u}(t))\rangle +$$
$$+ g(\hat{x}(t), \hat{u}(t)) - g(\hat{x}(t), \hat{u}(t))\}\, dt = \{\text{ применяем формулу (5.37) }\} =$$
$$= -\int_0^T g(\hat{x}(t), \hat{u}(t))\, dt.$$

Тогда

$$\mathcal{J}_T(x_0, \hat{u}) = \int_0^T g(\hat{x}(t), \hat{u}(t))\, dt + G(\hat{x}(T)) = W(T, x_0) -$$
$$-G(\hat{x}(T)) + G(\hat{x}(T)) = W(T, x_0),$$

что и доказывает оптимальность $\hat{u}(t)$. $\square$

### 5.6 Задача о линейном регуляторе

Пусть в задаче оптимального управления $M = E = \mathbb{R}^n$, $U = \mathbb{R}^m$, а система дифференциальных уравнений является линейной:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x \in \mathbb{R}^n,\ u \in \mathbb{R}^m, \tag{5.41}$$

при этом функционал $\mathcal{J}_T(x_0, u)$ квадратичен:

$$\mathcal{J}_T(x_0, u) = \int_0^T \{\langle Qx(t), x(t)\rangle + \langle Ru(t), u(t)\rangle\}\, dt + \langle P_0 x(T), x(T)\rangle \to \min \tag{5.42}$$

Предполагается, что матрицы $Q, R, P_0$ — симметричны, $R$ — матрица положительно определенной квадратичной формы, $Q, P_0$ — матрицы неотрицательно определенных квадратичных форм.

Задача оптимального управления (5.41), (5.42) называется *задачей о линейном регуляторе.*

**Теорема 5.7.** *Рассмотрим матричное уравнение Риккати:*

$$\dot{P} = Q + PA + A^*P - PBR^{-1}B^*P, \quad P(0) = P_0, \tag{5.43}$$

*с неизвестной* $n \times n$*-матрицей* $P(t), t \in [0,T]$.

*Существует единственная* $P(t)$ *— симметричная неотрицательно определенная матрица, удовлетворяющая* (5.43), *при этом решение задачи* (5.41), (5.42) *представимо в виде:*

$$\hat{u}(t) = -R^{-1}B^*P(T-t)\,\hat{x}(t), \quad t \in [0,T], \tag{5.44}$$

*где* $\hat{x}(t)$ *— решение задачи Коши:*

$$\begin{aligned} &\tfrac{d}{dt}\hat{x}(t) = \left(A - BR^{-1}B^*P(T-t)\right)\hat{x}(t), \quad t \in [0,T], \\ &\hat{x}(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n \end{aligned} \tag{5.45}$$

*(Здесь* $u = \hat{u}(t)$ *— оптимальное управление,* $x = \hat{x}(t)$ *— оптимальная траектория).*

*Доказательство.* Рассмотрим функцию Беллмана вида

$$W(t,x) = \langle P(t)\,x, x\rangle$$

и покажем, что $W(t,x)$ удовлетворяет условиям теоремы 5.6.

Подставим $\langle P(t)\,x, x\rangle$ в уравнение Беллмана (5.34):

$$\left\langle \dot{P}x, x\right\rangle = \inf_{u\in\mathbb{R}^m} \left\{\langle Qx, x\rangle + \langle Ru, u\rangle + 2\langle P_x, Ax + Bu\rangle\right\}, \tag{5.46}$$

здесь $2P_x = \frac{\partial W}{\partial x}$.

$$\begin{aligned} &\tfrac{\partial W}{\partial x_i} = \tfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\sum_{k,j=1}^{n} p_{kj}(t)\,x_k x_j\right) = \sum_{k,j=1}^{n} p_{kj}\tfrac{\partial}{\partial x_i}(x_k x_j) = \sum_{j=1}^{n} p_{ij}x_j + \\ &+ \sum_{k=1}^{n} p_{ki}x_k = \sum_{j=1}^{n}(p_{ij} + p_{ji})\,x_j = 2\sum_{j=1}^{n} p_{ij}x_j = 2(Px)_i \end{aligned}$$

для симметричной матрицы $P$. Перепишем (5.46) в виде:

$$\left\langle \dot{P}x, x\right\rangle = \langle Qx, x\rangle + 2\langle Px, Ax\rangle + \inf_{u}\psi_x(u),$$

где $\psi_x(u) = \langle Ru, u\rangle + 2\langle Px, Bu\rangle$.

По условию теоремы, $R$ — положительно определенная матрица, следовательно, квадратичная функция $\psi_x(u)$ имеет единственный минимум для всех $x \in \mathbb{R}^n$.

Найдем критические точки функции $\psi_k(u)$ из условия $\frac{\partial \psi_x}{\partial u} = 0$ :

$$\frac{\partial \psi_x}{\partial u} = 2Ru + 2\frac{\partial}{\partial u}\langle B^*Px, u\rangle = 2(Ru + B^*Px) = 0.$$

Отсюда получаем:

$$u = -R^{-1}B^*Px, \tag{5.47}$$

где матрица $R_{-1}$ существует в силу положительной определенности матрицы $R$.

Таким образом, $u$ в (5.47) реализует минимум $\psi_x(u)$. Тогда уравнение Беллмана примет вид:

$$\left\langle \dot{P}x, x\right\rangle = \langle Qx, x\rangle + 2\langle Px, Ax\rangle + \left\langle B^*Px, R^{-1}B^*Px\right\rangle - 2\left\langle Px, BR^{-1}B^*Px\right\rangle \tag{5.48}$$

Слагаемое $2\langle Px, Ax\rangle$ можно записать как

$$2\langle Px, Ax\rangle = 2\langle x, PAx\rangle = \langle x, (PA + A^*P)x\rangle.$$

Перепишем (5.48) в виде квадратичной формы по $x$ с симметричной матрицей в левой части:

$$\begin{gathered}\left\langle \dot{P}x, x\right\rangle = \langle Qx, x\rangle + \langle (PA + A^*P)x, x\rangle + \left\langle Px, BR^{-1}B^*Px\right\rangle - \\ -2\left\langle Px, BR^{-1}B^*Px\right\rangle = \left\langle \left(Q + PA + A^*P - PBR^{-1}B^*P\right)x, x\right\rangle\end{gathered} \tag{5.49}$$

Приравнивая коэффициенты квадратичной формы (5.49) по $x$, получим уравнение (5.43) на $P(t)$. Граничное условие $P(0) = P_0$ соответствует условию $W(0, x) = \langle P_0x, x\rangle$ (то есть выполнено (5.35)). Тогда функция $\hat{v}(t, x) = -R^{-1}B^*Px$ удовлетворяет условию из второй части теоремы 5.6, а значит $\hat{u}(t) = -R^{-1}B^*P(T-t)\hat{x}(t)$ — оптимальное управление для задачи (5.41), (5.42) по теореме 5.6. $\square$

**Пример 5.3.** *Пусть*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = u, \end{cases} \quad x_0 = x\left(0\right) = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \tag{5.50}$$

$$\begin{gathered} \mathcal{J}_T\left(x_0 u\right) = \int\limits_0^T \left(x_1^2\left(t\right) + x_2^2\left(t\right) + u^2\left(t\right)\right) dt + \sqrt{3}\left(x_1^2\left(T\right) + x_2^2\left(T\right)\right) + \\ 2x_1\left(T\right) x_2\left(T\right) \to \min \end{gathered} \tag{5.51}$$

*Решить задачу линейного регулятора* (5.50), (5.51).

В данном примере

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, R = 1, P_0 = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \dot{P} = &\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{pmatrix} - \\ &- \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & p_1 \\ 0 & p_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ p_1 & p_2 \end{pmatrix} - \\ &- \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & p_1 \\ 0 & p_2 + 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ p_1 & p_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p_2^2 & p_2 p_3 \\ p_2 p_3 & p_3^2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 - p_2^2 & p_1 - p_2 p_3 \\ -p_2 p_3 + p & 2p_2 + 1 - p_3^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Таки образом,получаем следующую систему:

$$\begin{cases} \dot{p}_1 = 1 - p_2^2, & p_1\left(0\right) = \sqrt{3}, \\ \dot{p}_2 = p_1 - p_2 p_3, & p_2\left(0\right) = 1, \\ \dot{p}_3 = 1 + 2p_2 - p_3^2, & p_3\left(0\right) = \sqrt{3}. \end{cases}$$

Частное решение системы:

$$p_1 = \sqrt{3},$$
$$p_2 = 1,$$
$$p_3 = \sqrt{3}.$$

Составим уравнение на $\hat{x}(t)$ :

$$A - BR^{-1}B^*P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1 = \hat{x}_2, \\ \dot{\hat{x}}_2 = -\hat{x}_1 - \sqrt{3}\hat{x}_2, \end{cases}$$

$$\hat{x}_1(0) = \hat{x}_1^0, \hat{x}_2(0) = \hat{x}_2^0.$$

Решая полученную систему дифференциальных уравнений, находим оптимальную траекторию:

$$\hat{x}_1(t) = e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}t}\left(\hat{x}_1^0 \cos\tfrac{t}{2} + \left(2\hat{x}_2^0 + \sqrt{3}\hat{x}_1^0\right)\sin\tfrac{t}{2}\right),$$
$$\hat{x}_2(t) = e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}t}\left(\hat{x}_2^0 \cos\tfrac{t}{2} - \left(2\hat{x}_1^0 + \sqrt{3}\hat{x}_2^0\right)\sin\tfrac{t}{2}\right).$$

Оптимальное управление:

$$\hat{u}(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_1(t) \\ \hat{x}_2(t) \end{pmatrix} =$$

$$= e^{\frac{\sqrt{3}}{2}t}\left(\left(\hat{x}_2^0 + \sqrt{3}\hat{x}_1^0\right)\sin\frac{t}{2} - \left(\hat{x}_1^0 + \sqrt{3}\hat{x}_2^0\right)\cos\frac{t}{2}\right).$$

### 5.7 Линейный регулятор на бесконечном промежутке

Рассмотрим задачу оптимального управления

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m, \tag{5.52}$$

$$x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n,$$

$$\mathcal{J}(x_0, u) = \int\limits_0^\infty \{\langle Qx(t), x(t)\rangle + \langle Ru(t), u(t)\rangle\}\,dt + \langle P_0 x(T), x(T)\rangle \to \min \tag{5.53}$$

Предположим, что $Q$ — симметричная неотрицательно определенная матрица, $R$ — симметричная положительно определенная матрица. Рассмотрим алгебраическое уравнение Риккати:

$$Q + PA + A^*P - PBR^{-1}B^*P = 0, \tag{5.54}$$

где $P \in mat\,(n \times n)$ — неизвестная симметричная неотрицательно определенная матрица.

**Определение 5.5.** Решение $\tilde{P}$ уравнения (5.54) называется *минимальным*, если

$$\left\langle \tilde{P}x, x \right\rangle \leq \langle Px, x \rangle, \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

для любого $P$ — решения уравнения (5.54).

**Теорема 5.8.** *Если существует неотрицательно определенная симметричная матрица $P$, являющаяся решением уравнения* (5.54), *то существует и единственно минимальное решение $\tilde{P}$ уравнения* (5.54), *при этом управление*

$$\tilde{u}(t) = -R^{-1}B^*\tilde{P}x(t), \quad t \geq 0 \tag{5.55}$$

*решает задачу* (5.52), (5.53); *кроме того,*

$$\inf_{u \in U} \mathcal{J}(x_0, u) = \left\langle \tilde{P}x_0, x_0 \right\rangle.$$

*Доказательство.* Пусть $P_i(t), i = 1, 2,$ — решения дифференциального уравнения Риккати:

$$\dot{P}_i = Q + P_iA + A^*P_i - P_iBR^{-1}B^*P_i \tag{5.56}$$

Докажем, что если $\langle P_1(0)x, x \rangle \leq \langle P_2(0)x, x \rangle$, то

$$\langle P_1(t)x, x \rangle \leq \langle P_2(t)x, x \rangle, \forall t \geq 0 \tag{5.57}$$

Для этого рассмотрим формулы при $i = 1, 2:$

$$\mathcal{J}_t^i(x_0, u) = \int\limits_0^t \{\langle Qx(s), x(s) \rangle + \langle Pu(s), u(s) \rangle\} ds + \langle P_i(0)x(t), x(t) \rangle.$$

Если $\langle P_1(0)x, x \rangle \leq \langle P_2(0)x, x \rangle, \forall x$, то $\mathcal{J}_t^1(x_0, u) \leq \mathcal{J}_t^2(x_0, u), \forall x_0, \forall u$. Тогда

$$\inf_u \mathcal{J}_t^1(x_0, u) \leq \inf_u \mathcal{J}_t^2(x_0, u) \tag{5.58}$$

По теореме 5.7, $\inf\limits_u \mathcal{J}_t^i(x_0, u) = \langle P_i(t) x_0, x_0 \rangle$, что вместе с неравенством (5.58) доказывает (5.57).

Положим $P_1(t)$ — решение уравнения (5.56) с начальным условием $P_1(0) = 0$; $P_2(t) \equiv P$ — решение уравнения (5.57).

По формуле (5.57), $0 \le \langle P_1(t) x_0, x_0 \rangle \le \langle P x_0, x_0 \rangle$; по построению функционала $\mathcal{J}_t^1(x_0, u)$ : $\langle P x_0, x_0 \rangle$ — монотонно неубывает по $t \ge 0$. Следовательно, существует $\lim\limits_{t \to +\infty} \langle P_1(t) x_0, x_0 \rangle = \left\langle \tilde{P} x_0, x_0 \right\rangle$, при этом

$$\left\langle \tilde{P} x_0, x_0 \right\rangle \le \langle P_1 x_0, x_0 \rangle, \forall x_0 \in \mathbb{R}^n,$$

то есть $\tilde{P}$ — минимальное решение алгебраического уравнения Риккати (5.54), так как $\lim\limits_{t \to +\infty} P_1(t) = 0$.

Пусть $\tilde{u}(t)$ задано формулой (5.55), тогда по теореме 5.7:

$$\left\langle \tilde{P} x_0, x_0 \right\rangle = \int\limits_0^T \{\langle Q x(s), x(s) \rangle + \langle R \tilde{u}(s), \tilde{u}(s) \rangle\} ds + \left\langle \tilde{P} x(T), x(T) \right\rangle,$$

то есть

$$\int\limits_0^T \{\langle Q x(s), x(s) \rangle + \langle R \tilde{u}(s), \tilde{u}(s) \rangle\} ds \le \left\langle \tilde{P} x_0, x_0 \right\rangle.$$

Отсюда при $T \to \infty$ получаем:

$$\mathcal{J}(x_0, \tilde{u}) \le \left\langle \tilde{P} x_0, x_0 \right\rangle \tag{5.59}$$

С другой стороны,

$$\mathcal{J}_T^1(x_0, \tilde{u}) = \int\limits_0^T \{\langle Q x(s), x(s) \rangle + \langle R \tilde{u}(s), \tilde{u}(s) \rangle\} ds \ge \langle P_1(T) x_0, x_0 \rangle,$$

$$\begin{aligned} &\mathcal{J}(x_0, u) = \int\limits_0^{+\infty} \{\langle Q x(s), x(s) \rangle + \langle R u(s), u(s) \rangle\} ds \ge \mathcal{J}_1(x_0, \tilde{u}) \ge \\ &\ge \lim_{T \to +\infty} \langle P_1(T) x_0, x_0 \rangle = \left\langle \tilde{P} x_0, x_0 \right\rangle \end{aligned} \tag{5.60}$$

Из (5.59), (5.60) следует, что $\mathcal{J}(x_0, u) = \left\langle \tilde{P} x_0, x_0 \right\rangle$, то есть $\tilde{u}$ — оптимальное управление, поскольку $\tilde{P}$ — минимальное решение. $\square$

## 5.8 Линейный регулятор и стабилизация

**Определение 5.6.** Пара матриц $A \in mat\,(n \times n)\,, C \in mat\,(p \times n)$ называется *детектируемой*, если существует матрица $L \in mat\,(n \times p)$, с которой матрица $A + LC$ гурвицева.

**Теорема 5.9.** *1) если система* (5.52) *стабилизируема, то уравнение Риккати* (5.54) *имеет решение;*

*2) если $Q = C^*C$ и пара $(A, C)$ детектируема, то уравнение* (5.54) *имеет не более одного решения; если $P$ — решение уравнения* (5.54)*, то управление*

$$\tilde{u}\,(t) = -R^{-1}B^*P$$

*решает задачу стабилизации системы* (5.52)*.*

**Теорема 5.10.** *Если система*

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m \\ y = Cx, y \in \mathbb{R}^p \end{cases} \tag{$\Sigma$}$$

*управляема и наблюдаема, $Q = C^*C$, то существует единственное решение $P$ уравнения* (5.54)*. При этом управление*

$$\tilde{u}\,(t) = -R^{-1}B^*Px\,(t)$$

*решает задачу стабилизации системы* ($\Sigma$)*, т.е. матрица $A - BR^{-1}B^*P$ — гурвицева.*

**Пример 5.4.** *Решить задачу о линейном регуляторе:*

$$\dot{x} = u, \quad x \in \mathbb{R}^1, u \in \mathbb{R}^1, \tag{5.61}$$

$$\mathcal{J}_T\,(x_0, u) = \int\limits_0^T \left(x^2 + u^2\right) dt + kx^2\,(T) \to \min \tag{5.62}$$

*при заданном $x\,(0) = x_0 \in \mathbb{R}, k = const > 0$.*

Воспользуемся теоремой 5.7:

$$Q = 1, R = 1, A = 0, B = 1,$$

$$\dot{P} = 1 - P^2,$$

$$P = 1 - \frac{2}{1 + e^{2t} \left| \frac{1+k}{1-k} \right|}.$$

Отсюда получаем оптимальное управление:

$$\hat{u}(t) = -1 + \frac{2}{1 + e^{2(T-t)} \left| \frac{1+k}{1-k} \right| x(t)}.$$

**Пример 5.5.** *Решить задачу о линейном регуляторе:*

$$\dot{x} = x + u, \quad x \in \mathbb{R}^1, u \in \mathbb{R}^1,$$

$$\mathcal{J}_T(x_0, u) = \int\limits_0^T \left( x^2 + 2u^2 \right) dt + kx^2(T) \to \min,$$

*при заданном* $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}, k = const > 0$.

Здесь

$$\begin{aligned}
&A = 1, B = 1, Q = 1, R = 2, P_0 = k, \\
&\dot{P} = 1 + 2P - \tfrac{1}{2}P^2, \\
&P = 2 - \sqrt{6} - 2\sqrt{6}e^{\sqrt{6}t} \left| \tfrac{k-2+\sqrt{6}}{k-2-\sqrt{6}} \right|, \\
&\hat{u}(t) = -\tfrac{1}{2} \left( 2 - \sqrt{6} - 2\sqrt{6}e^{\sqrt{6}t} \left| \tfrac{k-2+\sqrt{6}}{k-2-\sqrt{6}} \right| \right) x(t).
\end{aligned}$$

## 5.9 Контрольные вопросы

1. Сколько дифференциальных уравнений содержит гамильтонова система в формулировке принципа максимума Понтрягина?

2. Верно, ли что оптимальное по быстродействию управление в линейных системах является кусочно-постоянной функцией?

3. Необходимо ли решать дифференциальное уравнение Риккати для задачи о линейном регуляторе на промежутке $t \in [0, +\infty)$?

4. Необходимо ли решать алгебраическое уравнение Риккати для задачи о линейном регуляторе на промежутке $t \in [0, +\infty)$?

5. При каких условиях на функционал качества можно гарантировать существование и единственность решения задачи о линейном регуляторе для управляемой и наблюдаемой системы?

### 5.10 Творческие задания

**Задание 1.** (*Оптимальное распределение капитальных вложений*). Применяя рассуждения, аналогичные проведенным в разделе 5.2, решить задачу об оптимальном распределении капитальных вложений (1.1)—(1.3).

**Задание 2.** (*Оптимальный разворот машины Дубинса*). Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \cos\theta, \\ \dot{x}_2 = \sin\theta, \\ \dot{\theta} = u, \quad u \in [-1, 1] \end{cases} \tag{5.63}$$

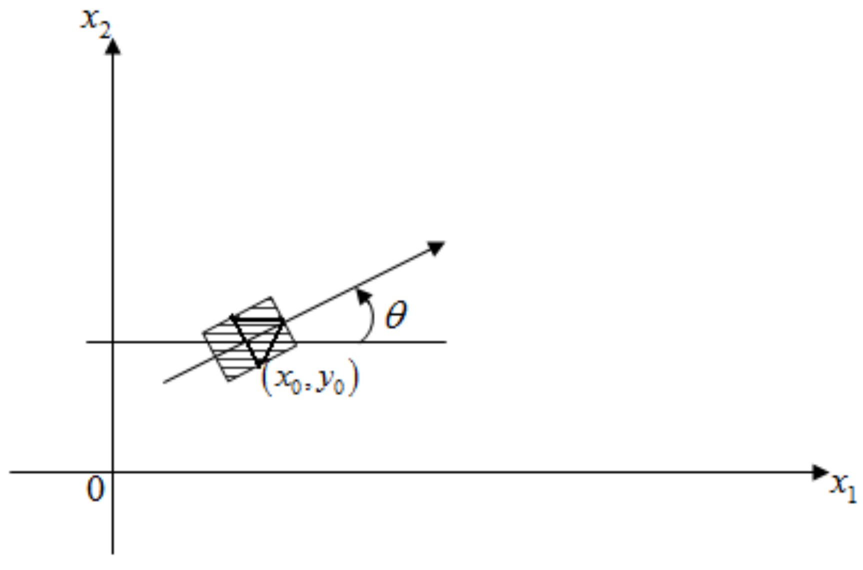


Рис. 5.8 — Машина Дубинса

Приведенная система описывает движение «машины Дубинса» [13] по плоскости $(x_1, x_2)$ (см. рис. 5.8). В этой модели переменные $x_1$ и $x_2$ обозначают координаты середины задней оси машины, $\theta$ — угол между продольной осью машины и осью $Ox_1$. Управление $u$ соответствует возможности поворота машины влево ($u > 0$) или вправо ($u < 0$).

Требуется найти функцию управления $u(t)$, $t \in [0, \tau]$, которая переводит систему (5.63) из начальной точки $x_1 = x_0$, $x_2 = y_0$, $\theta = 0$ в конечную точку $x_1 = x_2 = 0$, $\theta = \pi$ за минимальное время $\tau$.

**Задание 3.** (*Затухающий гармонический осциллятор*). Пусть

$$\dot{x}_1 = x_2, \ \dot{x}_2 = -x_1 - \kappa x_2 + u, \quad u \in [-1, 1], \tag{5.64}$$

где $\kappa = \text{const} > 0$.

Найти управление $u(t)$, $t \in [0, \tau]$, переводящее систему (5.64) из начального состояния $(x_1, x_2) = (x_1^0, x_2^0)$ в конечное $(x_1, x_2) = (0, 0)$ за минимальное время $\tau$.

# 6 Элементы геометрической теории нелинейных систем

Рассмотрим нелинейную систему дифференциальных уравнений:

$$\dot{x} = f(x, u), x \in D \subseteq \mathbb{R}^n, u \in U \subseteq \mathbb{R}^m, \tag{6.1}$$

где $D$ — область, $x$ — состояние (фазовый вектор), $u$ — управление. Обозначим $f_u(x) = f(x, u)$. Будем предполагать, что $f_u(x) \in C^\infty(D), \forall u \in U$ то есть $f_u(x) : D \to \mathbb{R}^n$ — гладкое векторное поле в $D$.

**Определение 6.1.** Система (6.1) называется *управляемой* в классе кусочно-постоянных управлений, если для всех $x_0, x_1 \in D$ существуют $T > 0$ и кусочно-постоянная функция $u : [0, T] \to U$, при которой система

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$$

имеет решение $x(t)$ такое, что $x(0) = x_0, x(T) = x_1, x(t) \in D, \forall t \in [0, T]$.

## 6.1 Ранговое условие достижимости

Для формулировки условий управляемости введем понятие *скобки Ли* векторных полей.

**Определение 6.2.** Пусть $g, h : D \to \mathbb{R}^n$ — векторные поля в $D$. *Скобкой Ли* векторных полей $g, h \in C^1(D)$ называется векторное поле

$$[g, h] = \frac{\partial h}{\partial x} g - \frac{\partial g}{\partial x} h,$$

где $\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial x}$ — матрицы Якоби.

Скобки Ли удовлетворяют следующим свойствам:

1) $[g, h] = -[h, g]$ *(антисимметричность)*;

2) $[f, [g, h]] + [g, [h, f]] + [h, [f, g]] = 0$ *(тождество Якоби)*.

**Определение 6.3.** *Алгеброй Ли* системы (6.1) называется минимальное линейной пространство векторных полей $Lie\{f_u\}$, которое содержит все $f_u$ и замкнуто относительно операции $[\cdot, \cdot]$, то есть выполнены следующие свойства:

1) $Lie\{f_u\} = f_u, \forall u \in U$;

2) если $g \in Lie\{f_u\}, h \in Lie\{f_u\}$, то $[g, h] \in Lie\{f_u\}$;

3) $Lie\{f_u\}$ — линейное пространство над $\mathbb{R}$, то есть если $g \in Lie\{f_u\}$, $h \in Lie\{f_u\}$, то $\alpha g + \beta h \in Lie\{f_u\}, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

**Определение 6.4.** [12, 14, 15] Система (6.1) удовлетворяет *ранговому условию достижимости* в точке $x_0 \in D$, если $\dim L(x_0) = n$, где

$$L(x_0) = \{g(x_0) : g \in Lie\{f_u\}\}.$$

**Определение 6.5.** Система (6.1) называется *симметричной по времени*, если для любого управления $u \in U$ существует управление $v \in U$ такое, что $f(x, u) = -f(x, v), \forall x \in D$.

**Определение 6.6.** Векторное поле $g : D \to \mathbb{R}^n$ называется *полным* в $D$, если все решения задачи Коши

$$\dot{x}(t) = g(x(t)), \quad x(0) = x_0 \in D,$$

можно доопределить для всех $t \in \mathbb{R}$.

**Теорема 6.1 (Теорема Чжоу–Рашевского).** *Предположим, что система (6.1) симметрична по времени. Если ранговое условие достижимости выполнено для всех $x_0 \in D$, то система (6.1) управляема.*

**Пример 6.1 (Парковка машины).** *Обозначим через $(x_1, x_2)$ координаты центра задней оси машины, и пусть $x_3$ — угол между продольной осью машины и $Ox_1$. Область $D'$ для маневра машины на плоскости $Ox_1x_2$ ограничена соседними припарковавшимися машинами $A$ и $B$, т.е. $D' = \mathbb{R}^2 \setminus (A \bigcup B)$.*

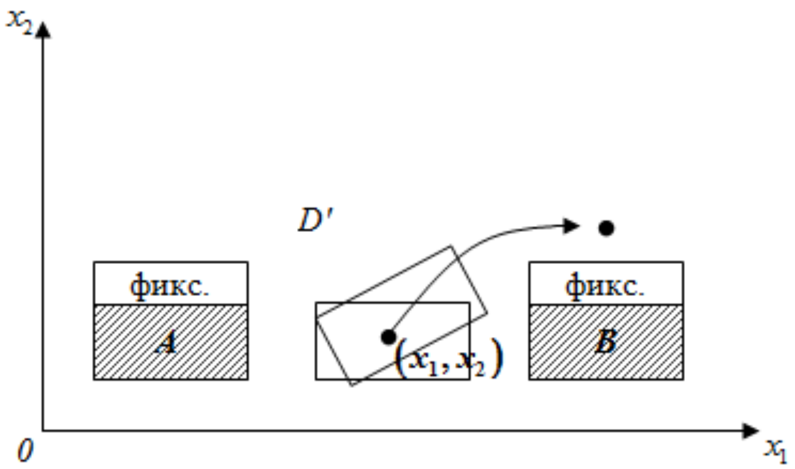


Рис. 6.1 — Иллюстрация задачи о парковке

*Условие движения колес без проскальзывания дает следующую систему уравнений:*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u_1 \cos x_3, \\ \dot{x}_2 = u_1 \sin x_3, \\ \dot{x}_3 = u_2, \end{cases} \tag{6.2}$$

*где $u_1$ — управление скоростью ($u_1 > 0$ — движение вперед, $u_1 < 0$ — назад); $u_2$ — управление поворотом ($u_2 > 0$ — поворот влево,$u_2 < 0$ — вправо).*

*Таким образом, задача парковки является частным случаем задачи управляемости в области $D = D' \times \mathbb{R}$.*

Для исследования управляемости системы (6.2) запишем ее в векторном виде:

$$\dot{x} = f(x,u) = u_1 f_1 + u_2 f_2, \tag{6.3}$$

где $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$, $f_1(x) = \begin{pmatrix} \cos x_3 \\ \sin x_3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $f_2(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Вычислим скобку Ли:

$$[f_1, f_2] = \frac{\partial f_2}{\partial x} f_1 - \frac{\partial f_1}{\partial x} f_2 = -\begin{pmatrix} 0 & 0 & -\sin x_3 \\ 0 & 0 & \cos x_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin x_3 \\ -\cos x_3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку $f_1 \in Lie\{f_u\}, f_2 \in Lie\{f_u\}, [f_1, f_2] \in Lie\{f_u\}$, то

$$L(x) \supseteq \{f_1(x), f_2(x), [f_1, f_2](x)\},$$

и для рангового условия достижимости достаточно, чтобы было выполнено

$$rank\{f_1(x), f_2(x), [f_1, f_2](x)\} = 3\,(= n),$$

$$\begin{vmatrix} \cos x_3 & 0 & \sin x_3 \\ \sin x_3 & 0 & -\cos x_3 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

то есть ранговое условие достижимости выполнено.

Система (6.3) является симметричной по времени, так как если для произвольного $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ положим $v = \begin{pmatrix} -u_1 \\ -u_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, то получим $f(x,u) = -f(x,v)$.

Таким образом, система (6.3) управляема по теореме Чжоу–Рашевского, то есть задача парковки имеет решение при любых (положительных) расстояниях между машинами. Движение по скобке Ли $[f_1, f_2]$ соответствует пределу малых движений вперед–влево–назад–вправо.

**Пример 6.2.** *Рассмотрим систему*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1^2 - x_2^2, \\ \dot{x}_2 = 2x_1 x_2 + u \end{cases} \tag{6.4}$$

*Выполнено ли ранговое условие достижимости для системы* (6.4) *в точке* $x = 0$*?*

Система (6.4) в векторном виде:

$$\dot{x} = f_0(x) + uf_1(x),$$

где $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, f_0(x) = \begin{pmatrix} x_1^2 - x_2^2 \\ 2x_1x_2 \end{pmatrix}, f_1(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

$$[f_0, f_1] = \frac{\partial f_1}{\partial x} f_0 - \frac{\partial f_0}{\partial x} f_1 = -\begin{pmatrix} 2x_1 & -2x_2 \\ 2x_2 & 2x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_2 \\ -2x_1 \end{pmatrix};$$

$f_0(0) = 0, [f_0, f_1](0) = 0$, поэтому для проверки недостаточно скобки первого порядка.

$$[[f_0, f_1], f_1] = \frac{\partial f_1}{\partial x}[f_0, f_1] - \frac{\partial [f_0, f_1]}{\partial x} f = -\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$rank\{f_1, [[f_0, f_1], f_1]\} = rank \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2, \forall x \in \mathbb{R}^2$, следовательно,

$$\dim L(x) = 2\,(= n),$$

то есть система (6.4) удовлетворяет ранговому условию достижимости.

## 6.2 Задача точной линеаризации

Рассмотрим частный случай нелинейной системы (6.1):

$$\dot{x} = f_0(x) + ug(x), \tag{6.5}$$

где $x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^1, (f_0, g) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ — гладкие векторные поля.

**Определение 6.7.** Система (6.5) *линеаризуема с обратной связью*, если существует диффеоморфизм $(x, u) \to (\tilde{x}, \tilde{u}), \tilde{x} = \varphi(x), \tilde{u} = \psi(x, u)$, который приводит систему (6.5) к линейной:

$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + B\tilde{u},$$

где $A$ — постоянная $n \times n$-матрица, $B$ — столбец.

**Теорема 6.2 (Теорема Якубчика–Респондека).** *Система* (6.5) *линеаризуема в окрестности точки* $x_0 \in \mathbb{R}^n$ *только тогда, когда выполнены два условия:*

*1)* $g(x), ad_{f_0} g(x), ..., ad_{f_0}^{n-1} g(x)$ *— линейно независимы при* $x = x_0$*;*

*2)* $\forall i, j : 0 \le i, j \le n-2$ *существуют гладкие функции* $\alpha_q^{ij}(x)$ :

$$\left[ad_{f_0}^i g, ad_{f_0}^j g\right] = \sum_{q=0}^{n-2} \alpha_q^{ij} ad_{f_0}^q g(x).$$

*Здесь* $ad_{f_0} g = [f_0, g], ad_{f_0}^{m+1} g = \left[f_0, ad_{f_0}^m g\right], \dots$ .

**Пример 6.3.** *Пусть*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + x_3^2 - 2u, \\ \dot{x}_3 = u \end{cases} \tag{6.6}$$

*Линеаризуема ли система* (6.6) *в окрестности точки* $x = 0$*?*

Проверим условия теоремы Якубчика–Респондека при $n = 3$:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, f_0(x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 + x_3^2 \\ 0 \end{pmatrix}, g(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$ad_{f_0} g = [f_0, g] = -\frac{\partial f_0}{\partial x} g = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2x_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2x_3 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$ad_{f_0}^2 g = \left[f_0, \begin{pmatrix} 2 \\ -2x_3 \\ 0 \end{pmatrix}\right] =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 + x_3^2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2x_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -2x_3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 2x_3 \\ -2 & -2x_3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 4 + 4x_3^2,$$

следовательно, первое условие теоремы 6.2 выполнено. Проверим второе условие для индексов $0 \le i, j \le n-2 = 1$. Достаточно рассмотреть случай $i = 0, j = 1$:

$$\left[ad_{f_0}^0 g, ad_{f_0}^1 g\right] = \left[g, \begin{pmatrix} 2 \\ -2x_3 \\ 0 \end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Условие 2) выполняется тогда и только тогда, когда

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \in span\left\{g, ad_{f_0} g\right\} = span\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2x_3 \\ 0 \end{pmatrix}\right\},$$

то есть при условии совместности системы линейных уравнений

$$\begin{cases} 0 = 0 \cdot \alpha_1 + 2 \cdot \alpha_2, \\ -2 = -2 \cdot \alpha_1 - 2x_3 \cdot \alpha_2, \\ 0 = 1 \cdot \alpha_1 + 0 \cdot \alpha_2 \end{cases} \tag{6.7}$$

Из первого и третьего уравнений системы (6.7) следует, что $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$; тогда второе уравнение имеет вид $-2 = 0$, то есть система (6.7) несовместна и второе условие теоремы 6.2 не выполняется. Следовательно, система (6.6) не является линеаризуемой в окрестности точки $x = 0$.

## 6.3 Контрольные вопросы

1. Дать определение скобки Ли.

2. Дать определение алегбры Ли.

3. Сформулировать ранговое условие достижимости.

4. Верно ли, что всякая нелинейная система вида $\dot{x} = f(x, u)$ является симметричной по времени?

## 6.4 Творческие задания

**Задание 1.** При каких значениях параметров $a_1$, $a_2$, $a_3$, система

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_1 x_2 x_3 + u, \\ \dot{x}_2 &= a_2 x_1 x_3, \\ \dot{x}_3 &= a_3 x_1 x_2, \qquad x = (x_1, x_2, x_3)^* \in \mathbb{R}^3,\ u \in \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{6.8}$$

удовлетворяет ранговому условию достижимости в точке $x_1 = x_2 = x_3 = 0$?

**Задание 2.** Является ли система дифференциальных уравнений (6.8) линеаризуемой в окрестности точки $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ в смысле определения 6.7?

# 7 Задания для самостоятельной работы

**Задание 1.** Исследовать на управляемость систему линейных дифференциальных уравнений с $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^* \in \mathbb{R}^4$, $u = (u_1, u_2)^* \in \mathbb{R}^2$:

1)

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 + 2x_2 - x_3 - u_1, \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + x_4 + u_1 + u_2, \\ \dot{x}_3 &= 5x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 + u_1 - 2u_2, \\ \dot{x}_4 &= -x_1 - x_2 - x_3 + x_4; \end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_2 + x_3 + x_4, \\ \dot{x}_2 &= 2x_1 - x_2 - x_3 - x_4 + 2u_1 + u_2, \\ \dot{x}_3 &= x_1 - x_2 + 3x_3 + 3x_4 + u_1 - u_2, \\ \dot{x}_4 &= -x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 - 2u_2; \end{aligned}$$

3)

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 - u_2, \\ \dot{x}_2 &= x_1 + x_3 + x_4 + 2u_1 + 2u_2, \\ \dot{x}_3 &= x_2 - x_3 - 5x_4 + u_2, \\ \dot{x}_4 &= 3x_1 + x_2 + x_3 - u_1 - 2u_2; \end{aligned}$$

4)

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4, \\
\dot{x}_2 &= -x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + u_1 + 2u_2, \\
\dot{x}_3 &= -x_1 - x_2 - x_3 - x_4 + u_2, \\
\dot{x}_4 &= 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 - u_1 - 2u_2;
\end{aligned}
$$

5)

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 - u_2, \\
\dot{x}_2 &= x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + u_1 + u_2, \\
\dot{x}_3 &= -2x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 - u_2, \\
\dot{x}_4 &= x_2 + 3x_3 + x_4 - u_1 + 2u_2.
\end{aligned}
$$

6)

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 - x_3 + 2x_4 + u_1, \\
\dot{x}_2 &= 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 - u_1 + 2u_2, \\
\dot{x}_3 &= -2x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + u_2, \\
\dot{x}_4 &= 3x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 - u_1;
\end{aligned}
$$

7)

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + u_1 + u_2, \\
\dot{x}_2 &= 2x_2 + 3x_3 + x_4 - u_1 + 3u_2, \\
\dot{x}_3 &= 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 - 2u_2, \\
\dot{x}_4 &= 3x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 - u_1;
\end{aligned}
$$

8)

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= -x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + u_1 + u_2, \\
\dot{x}_2 &= x_2 - 3x_3 + x_4 + u_2, \\
\dot{x}_3 &= 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 - 2u_2, \\
\dot{x}_4 &= 4x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 + u_1;
\end{aligned}
$$

9)

$$
\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 - x_3 + x_4 + u_2, \\
\dot{x}_2 &= 2x_1 - 3x_3 - x_4 + u_1 - u_2, \\
\dot{x}_3 &= x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + 2u_2, \\
\dot{x}_4 &= x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 - u_1;
\end{aligned}
$$

10)

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= -x_2 + x_3 - x_4 + 2u_1 + u_2,\\
\dot{x}_2 &= x_1 - 3x_3 + x_4 + u_1,\\
\dot{x}_3 &= 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 - 2u_2,\\
\dot{x}_4 &= 4x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 - u_1;
\end{aligned}$$

11)

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_1 - x_2 + x_3 + u_1,\\
\dot{x}_2 &= 2x_1 - 3x_3 - x_4 + u_1 - 2u_2,\\
\dot{x}_3 &= x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 2u_1,\\
\dot{x}_4 &= -x_1 - x_2 - 3x_3 - x_4 - u_1;
\end{aligned}$$

12)

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + 2u_1 - u_2,\\
\dot{x}_2 &= 2x_1 - 3x_2 + x_4 + u_1,\\
\dot{x}_3 &= x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 - 2u_1,\\
\dot{x}_4 &= x_1 + 4x_2 + x_3 + 4x_4 - u_1.
\end{aligned}$$

**Задание 2.** Построить преобразование, приводящее систему к канонической форме Бруновского:

1)

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_2 + 2x_3,\\
\dot{x}_2 &= -x_1 + x_2,\\
\dot{x}_3 &= x_2 + u;
\end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= x_1 - 2x_2 + x_3 + u,\\
\dot{x}_2 &= -x_1 + 2x_2 + 3x_3,\\
\dot{x}_3 &= x_1 - x_2 + 2u;
\end{aligned}$$

3)

$$\begin{aligned}
\dot{x}_1 &= 3x_1 + 4x_2 - x_3 - u,\\
\dot{x}_2 &= x_1 + x_2 + 3x_3 + u,\\
\dot{x}_3 &= -x_1 - x_2 - x_3 + 3u;
\end{aligned}$$

4)

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 2u,\\ \dot{x}_2 &= x_1 + x_2 - 2x_3,\\ \dot{x}_3 &= x_1 + x_2 + 2x_3 + 7u;\end{aligned}$$

5)

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 - 2x_3 + u,\\ \dot{x}_2 &= x_1 + x_2 + x_3,\\ \dot{x}_3 &= -3x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 5u.\end{aligned}$$

6)

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 - 2x_3 + u,\\ \dot{x}_2 &= x_1 + x_2 + x_3,\\ \dot{x}_3 &= -3x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 5u;\end{aligned}$$

7)

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1 - 3x_2 + x_3,\\ \dot{x}_2 &= 2x_1 + x_2 + 4x_3 + u,\\ \dot{x}_3 &= -x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 3u;\end{aligned}$$

8)

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= 2x_1 + 3x_2 + x_3 + u,\\ \dot{x}_2 &= x_1 - x_2 + x_3 - u,\\ \dot{x}_3 &= -x_1 + x_2 - 6x_3;\end{aligned}$$

9)

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= 2x_1 + 3x_2 + x_3 + u,\\ \dot{x}_2 &= x_1 - x_2 + x_3,\\ \dot{x}_3 &= -x_1 - x_2 + 5x_3;\end{aligned}$$

10)

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= 2x_1 + 3x_2 + x_3 + u,\\ \dot{x}_2 &= 4x_1 - x_2 + x_3 - u,\\ \dot{x}_3 &= -x_1 + x_2 - 6x_3 + u;\end{aligned}$$

11)

$$\dot{x}_1 = 2x_1 + 3x_2 + x_3 - u,$$
$$\dot{x}_2 = x_1 - 2x_2 + x_3,$$
$$\dot{x}_3 = -x_1 - x_2 + 5x_3 + u;$$

12)

$$\dot{x}_1 = 2x_1 + 3x_2 + 2x_3,$$
$$\dot{x}_2 = 4x_1 - x_2 + x_3 - u,$$
$$\dot{x}_3 = -x_1 + x_2 - x_3 + u.$$

**Задание 3.** Решить задачу о линейном регуляторе:

1)

$$\dot{x} = 2x + u, x\,(0) = x_0 \in \mathbb{R},$$
$$\mathcal{J}(x_0, u) = \int\limits_0^T \{x^2(t) + u^2(t)\}dt + x^2(T) \to \min;$$

2)

$$\dot{x} = -x - u, x\,(0) = x_0 \in \mathbb{R},$$
$$\mathcal{J}(x_0, u) = \int\limits_0^T \{2x^2(t) + u^2(t)\}dt + x^2(T) \to \min;$$

3)

$$\dot{x} = -x - u, x\,(0) = x_0 \in \mathbb{R},$$
$$\mathcal{J}(x_0, u) = \int\limits_0^T \{2x^2(t) + u^2(t)\}dt + x^2(T) \to \min;$$

4)

$$\dot{x} = -2x + u, x\,(0) = x_0 \in \mathbb{R},$$
$$\mathcal{J}(x_0, u) = \int\limits_0^T \{x^2(t) + u^2(t)\}dt + x^2(T) \to \min;$$

5)

$$\dot{x} = -4x + 2u, x\,(0) = x_0 \in \mathbb{R},$$

$$\mathcal{J}(x_0, u) = \int_0^T \{x^2(t) + 4u^2(t)\}dt + x^2(T) \to \min;$$

6)

$$\dot{x} = x + u, x\,(0) = x_0 \in \mathbb{R},$$

$$\mathcal{J}(x_0, u) = \int_0^T \{x^2(t) + u^2(t)\}dt + 9x^2(T) \to \min;$$

7)

$$\dot{x} = -3x + u, x\,(0) = x_0 \in \mathbb{R},$$

$$\mathcal{J}(x_0, u) = \int_0^T \{x^2(t) + 2u^2(t)\}dt + x^2(T) \to \min;$$

8)

$$\dot{x}_1 = x_2 + u, \dot{x}_2 = x_1, x(0) = x^0 \in \mathbb{R}^2,$$

$$\mathcal{J}(x^0, u) = \int_0^\infty \{{x_2}^2(t) + u^2(t)\}dt \to \min;$$

9)

$$\dot{x}_1 = x_1 - x_2, \dot{x}_2 = x_1 + u, x(0) = x^0 \in \mathbb{R}^2,$$

$$\mathcal{J}(x^0, u) = \int_0^\infty \{{x_1}^2(t) + 2x_1(t)x_2(t) + {x_2}^2(t) + u^2(t)\}dt \to \min;$$

10)

$$\dot{x}_1 = x_1 + x_2 - u, \dot{x}_2 = x_1, x(0) = x^0 \in \mathbb{R}^2,$$

$$\mathcal{J}(x^0, u) = \int_0^\infty \{{x_1}^2(t) - 2x_1(t)x_2(t) + {x_2}^2(t) + u^2(t)\}dt \to \min;$$

11)

$$\dot{x}_1 = x_2 + u, \dot{x}_2 = x_1 + x_2, x(0) = x^0 \in \mathbb{R}^2,$$

$$\mathcal{J}(x^0, u) = \int_0^\infty \{{x_1}^2(t) + u^2(t)\}dt \to \min;$$

12)

$$\dot{x}_1 = -x_2, \dot{x}_2 = -x_1 + x_2 + u, x(0) = x^0 \in \mathbb{R}^2,$$

$$\mathcal{J}(x^0, u) = \int\limits_0^\infty \{{x_1}^2(t) + 4x_1(t)x_2(t) + 4{x_2}^2(t) + u^2(t)\}dt \to \min .$$

## Список использованной литературы


1. Понтрягин Л.С. Математическая теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко. — 2-е изд. — М.: Наука, 1969. — 384 с.

2. Беллман Р. Динамическое программирование / Р. Беллман. — М.: Изд-во Иностранная литература, 1960. — 400 с.

3. Тинбэрхэн Я. Математические модели экономического роста / Я. Тинбэрхэн, Х. Бос. — М.: Прогресс, 1967. — 176 с.

4. Колемаев В.А. Математическая экономика / В.А. Колемаев. — М.: Юнити, 2002. — 399 с.

5. Трошина Н.Ю. Теория оптимального управления [Электронный ресурс]: учебно-методическое пособие / Н.Ю. Трошина. — Саратов: Саратовский государственный университет, 2008. — 117 с.

6. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц / Ф.Р. Гантмахер. — 4-е. изд. — М.: Наука, 1988. — 552 с.

7. Ли Э.Б. Основы теории оптимального управления / Э.Б. Ли, Л. Маркус. — М.: Наука, 1972. — 576 с.

8. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости / Б.П. Демидович. — М.: Наука, 1967. — 472 с.

9. Пономаренко О.І. Основи математичної економіки / О.І. Пономаренко, М.О. Перестюк, В.М. Бурим. — Київ: Інформтехніка, 1995. — 320 с.

10. Флеминг У. Оптимальное управление детерминированными и стохастическими системами / У. Флеминг, Р. Ришел. — М.: Мир, 1978. — 316 с.

11. Уонэм М. Линейные многомерные системы управления / М. Уонэм. — М.: Наука, 1980. — 376 с.

12. Брокетт Р. Нелинейные системы и дифференциальная геометрия / Р. Брокетт // ТИИЭР. — 1976. — Т. 64. — № 1. — С. 80-94.

13. Аграчев А.А. Геометрическая теория управления / А.А. Аграчев, Ю.Л. Сачков. — М.: Физматлит, 2004. — 392 с.

14. Mathematical Control Theory / [J. Zabczyk, G. Da Prato, B. Jakubczyk, et. al.]; ed. A.A. Agrachev. — Trieste: The Abdus Salam International Centre for Theoretical Physics, 2002. — 855 p. — (ICTP Lecture Notes Series: Vol. VIII).

15. Sontag E.D. Mathematical Control Theory / E.D. Sontag. — 2nd Ed. — New York: Springer, 1998. — 531 p.

Навчальне видання

Зуєв Олександр Леонідович

Теорія оптимального управління із застосуванням до задач економічної динаміки

Редактор Т.О. Важеніна

План вид. 2012 р., поз. № 73.