

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ,
МОЛОДЕЖИ И СПОРТА УКРАИНЫ
ДОНЕЦКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
КАФЕДРА ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

**ТЕОРИЯ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ
С ПРИЛОЖЕНИЕМ К ЗАДАЧАМ
ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ**

Донецк 2012

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ,
МОЛОДЕЖИ И СПОРТА УКРАИНЫ
ДОНЕЦКИЙ НАЦИОНАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
ФАКУЛЬТЕТ МАТЕМАТИКИ И ИНФОРМАЦИОННЫХ ТЕХНОЛОГИЙ
КАФЕДРА ТЕОРИИ ВЕРОЯТНОСТЕЙ И МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ

**ТЕОРИЯ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ
С ПРИЛОЖЕНИЕМ К ЗАДАЧАМ
ЭКОНОМИЧЕСКОЙ ДИНАМИКИ**

(для студентов специальности 6.040205 «Статистика»)

Рекомендовано к изданию Ученым советом
факультета математики
и информационных технологий
Донецкого национального университета
Протокол №112 от 26 января 2012 г.

Донецк ДонНУ 2012

УДК 517.977

ББК 22.161.6я73

Теория оптимального управления с приложением к задачам экономической динамики (для студентов специальности 6.040205 «Статистика») / сост. А.Л. Зуев. — Донецк: ДонНУ, 2012. — 78 с.

В учебном пособии изложены основы математической теории управления детерминированными системами. Приведены задачи оптимального управления моделями экономической динамики, которые описываются системами обыкновенных дифференциальных уравнений. После каждого раздела сформулированы контрольные вопросы и творческие задания для лучшего восприятия теоретического материала студентами. В заключительной части издания представлены упражнения для самостоятельной работы.

Для студентов факультета математики и информационных технологий специальности 6.040205 «Статистика».

Составитель: А.Л. Зуев, д-р физ.-мат. наук

Отв. за выпуск: Б.В. Бондарев, д-р физ.-мат. наук, проф.

©Зуев А.Л., 2012

©ДонНУ, 2012

Содержание

Введение	5
1 Динамические модели в экономике	7
1.1 Оптимальное распределение капитальных вложений	7
1.2 Динамическая модель Леонтьева с непрерывным временем .	8
1.3 Контрольные вопросы	10
1.4 Творческие задания	10
2 Управляемость линейных систем	11
2.1 Ранговый критерий управляемости	12
2.2 Декомпозиция Калмана	16
2.3 Каноническая форма Бруновского	17
2.4 Контрольные вопросы	20
2.5 Творческие задания	20
3 Задача стабилизации	21
3.1 Стабилизация управляемых систем	22
3.2 Необходимые и достаточные условия стабилизируемости . .	23
3.3 Контрольные вопросы	24
3.4 Творческие задания	25
4 Наблюдаемость линейных систем	25
4.1 Наблюдатель Луенбергера	30
4.2 Стабилизация линейных систем с наблюдателем	32
4.3 Контрольные вопросы	34
4.4 Творческие задания	34
5 Основы теории оптимального управления	35
5.1 Принцип максимума Понтрягина	36
5.2 Оптимальное управление односекторной моделью экономики	42

5.3	Оптимальное по быстродействию управление в линейных системах	45
5.4	Принцип динамического программирования Беллмана	49
5.5	Вывод уравнений Беллмана	51
5.6	Задача о линейном регуляторе	54
5.7	Линейный регулятор на бесконечном промежутке	58
5.8	Линейный регулятор и стабилизация	61
5.9	Контрольные вопросы	62
5.10	Творческие задания	63
6	Элементы геометрической теории нелинейных систем	64
6.1	Ранговое условие достижимости	64
6.2	Задача точной линеаризации	68
6.3	Контрольные вопросы	70
6.4	Творческие задания	71
7	Задания для самостоятельной работы	71
	Список использованной литературы	77

Введение

Основы математической теории оптимального управления были заложены в середине XX века работами школ Л.С. Понтрягина [1] и Р. Беллмана [2]. Метод динамического программирования Беллмана и принцип максимума Понтрягина с успехом применяются для синтеза оптимальных режимов управления многочисленными техническими объектами, в том числе космическими и летательными аппаратами, манипуляционными роботами, системами промышленной автоматики.

Круг приложений теории оптимального управления постоянно расширяется по мере распространения математических моделей в социальных науках. Однако такое распространение сдерживается сложностью математического описания процессов в обществе. В частности, в работе нобелевского лауреата по экономике Я. Тинбэрхэна и Х. Боса отмечается, что «полное (во всех своих деталях) функционирование хозяйства той или иной страны и деятельность населяющих ее людей могут быть описаны с помощью математической модели, гораздо более сложной и изощренной по сравнению с тем, что мы знаем в действительности. Отрицать возможность получения такой модели — значит отрицать возможность научного исследования общества» [3, с. 21]. «Такая модель, или их комбинация на различных этапах работы, имеет очевидные преимущества, присущие систематическому исследованию. Известными преимуществами модели являются ясность и последовательность, то есть отсутствие внутренних противоречий. Кроме того, анализ с помощью математики позволяет при относительно небольших дополнительных затратах произвести альтернативные расчеты, которые дают нам возможность судить по крайней мере о некоторых доверительных интервалах или о пределах надежности и результатах альтернативных вариантов хозяйственной политики» [3, с. 24].

В основу данного пособия положены лекции по дисциплине «Оптимальное управление в задачах экономической динамики», которые читают-

ся автором студентам 5 курса специальности «Статистика» на факультете математики и информационных технологий ДонНУ.

Изложение построено следующим образом. В первом разделе вводятся дифференциальные уравнения, описывающие макроэкономические модели с управлением. Для таких моделей ставится задача оптимизации баланса между потреблением и накоплением производственных фондов. В последующих разделах изложены основные результаты математической теории управления детерминированными системами, которые описываются обыкновенными дифференциальными уравнениями. Во втором — приводится ранговый критерий управляемости и вводится в рассмотрение стандартная каноническая форма управляемой системы. В третьем разделе рассматривается задача стабилизации, которая состоит в определении управления с обратной связью для обеспечения асимптотически устойчивого равновесия системы. В четвертом разделе изучается задача наблюдения при неполной информации о состоянии системы. Описывается схема синтеза динамического наблюдателя и показано применение подсистемы наблюдения для стабилизации при неполных измерениях состояния. В пятом разделе освещены основные методы решения задач оптимального управления. Принцип максимума Понтрягина приводится с общим интегральным функционалом качества, а также для случая задачи оптимального быстродействия. Приведен эвристический вывод уравнения Беллмана и доказана теорема об оптимальном управлении в терминах функции Беллмана. Детально рассмотрена задача оптимального управления линейными системами с квадратичным функционалом качества. В шестом разделе предлагается введение в нелинейную теорию управления с использованием алгебр Ли. После каждого раздела приводятся контрольные вопросы и творческие задания для лучшего восприятия теоретического материала. В заключительной части пособия даны задания для самостоятельной работы студентов.

Автор выражает благодарность Грушковой Виктории Васильевне за техническую помощь при подготовке данного пособия.

1 Динамические модели в экономике

В данном разделе приведены некоторые модели управляемых экономических процессов, которые описываются системами обыкновенных дифференциальных уравнений [4, Гл. 3], [5]. Методы решения задач управления такими системами будут изложены в последующих разделах.

1.1 Оптимальное распределение капитальных вложений

Обозначим через $K(t)$ величину основных производственных фондов в году t . Если проследить их изменение за промежуток времени Δt , то

$$\Delta K = K(t + \Delta t) - K(t).$$

Рост основных производственных фондов происходит за счет капитальных вложений. Однако за счет физического и морального износа количество их уменьшается с течением времени. Обозначим через $V(t)$ интенсивность ввода основных производственных фондов, т.е. количество вводимых фондов за единицу времени, например за год. Будем считать, что величина выбытия фондов в году t пропорциональна $K(t)$ и равна $\mu K(t)$, то есть величина $\mu K(t)$ — это интенсивность выбытия основных производственных фондов. Так как мы рассматриваем промежуток времени Δt , то за этот промежуток времени будет введено $V(t)\Delta t$ единиц новых фондов, а количество выводимых из производства фондов составит $\mu K(t)\Delta t$ единиц. Таким образом, уравнение баланса основных производственных фондов будет иметь вид

$$K(t + \Delta t) - K(t) = V(t)\Delta t - \mu K(t)\Delta t.$$

Поделим обе части этого равенства на Δt и устремим $\Delta t \rightarrow 0$. Получим:

$$\frac{dK}{dt} = -\mu K(t) + V(t) \quad (1.1)$$

Обыкновенное дифференциальное уравнение (1.1) является моделью роста основных производственных фондов отрасли. Этот экономический

процесс можно рассматривать как управляемый, если считать $V(t)$ управлением, а $K(t)$ — состоянием. На переменные состояния и управления следует наложить естественные ограничения:

$$K(t_0) = K^0, \quad K(t) \geq 0, \quad V(t) \in [V_{\min}, V_{\max}], \quad t \in [t_0, t_1], \quad (1.2)$$

где K^0 — заданное начальное значение основных фондов, V_{\min}, V_{\max} — известные постоянные или зависящие от времени функции. Для оценки протекающего процесса введем в рассмотрение критерий качества:

$$\mathcal{J}(K^0, V) = \alpha \int_{t_0}^{t_1} V(t) dt - \beta K(t_1) \rightarrow \min \quad (1.3)$$

Теперь можно сформулировать задачу оптимального управления: требуется найти пару $(K(t), V(t))$, которая удовлетворяет уравнению (1.1), условиям (1.2) и доставляет минимум критерию качества (1.3). Так как функционал $\mathcal{J}(K^0, V)$ состоит из двух слагаемых, то его минимизация означает, во-первых, экономию капиталовложений, а во-вторых, максимизацию основных фондов в конце рассматриваемого отрезка времени. Положительные числа α и β — это весовые коэффициенты. Если $\alpha > \beta$, то приоритет отдается первому требованию, если $\alpha < \beta$, то второму.

1.2 Динамическая модель Леонтьева с непрерывным временем

Предположим, что состояние n отраслей экономики в каждый момент времени t характеризуется вектором

$$X(t) = \begin{pmatrix} X_1(t) \\ X_2(t) \\ \vdots \\ X_n(t) \end{pmatrix}.$$

Будем считать, что время t измеряется в годах, а валовый выпуск продукта j -й отрасли за промежуток времени от t до $t + \Delta t$ равен $X_j(t)\Delta t$ с

точностью до величины более высокого порядка малости относительно Δt . Тогда открытая динамическая модель Леонтьева может быть представлена в виде [9, с. 217]:

$$X_i(t) = \sum_{j=1}^n a_{ij} X_j(t) + \sum_{j=1}^n b_{ij} \frac{dX_j(t)}{dt} + C_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (1.4)$$

Система межотраслевых балансовых соотношений (1.4) показывает, как $X_i(t)$ распадается на три составляющие.

Первая составляющая, $\sum_{j=1}^n a_{ij} X_j(t)$ — это производственные затраты, которые пропорциональны выпуску продукции (a_{ij} — коэффициенты прямых затрат). Вторая составляющая, $\sum_{j=1}^n b_{ij} \frac{dX_j}{dt}$, описывает прирост основных производственных фондов за единицу времени. В такой модели предполагается, что амортизационные отчисления отсутствуют, и все валовые капитальные вложения идут на ввод в действие новых основных производственных фондов. При этом считается, что капиталовложения пропорциональны приросту выпуска продукции в текущий момент времени. Третья составляющая, $C_i(t)$ — это непроемленное потребление продукта i -й отрасли в единицу времени.

Предположим, что рассматривается развитие экономики на отрезке времени от $t \in [0, \tau]$ (за τ лет). Будем считать в дифференциальных уравнениях (1.4) функции $C_1(t), C_2(t), \dots, C_n(t)$ управляющим воздействием. Предполагается, что задано начальное состояние экономической системы $X_i(0) = X_i^0$ и ограничения

$$X_i(t) \geq 0, \quad C_i(t) \in [C_{\min}^i, C_{\max}^i], \quad t \in [0, \tau], \quad (1.5)$$

для каждой отрасли, $i = 1, 2, \dots, n$. Оптимальное управление экономикой должно быть организовано так, чтобы потребление было как можно больше, и в то же время в конечный момент времени τ обеспечивалась высокая интенсивность выпуска продукции, что означает накопление производственного потенциала. Критерий качества процесса, соответствующий

этим требованиям, может быть выражен функционалом

$$\mathcal{J} = \sum_{i=1}^n \left\{ \alpha_i \int_0^{\tau} C_i(t) dt + \beta_i X_i(\tau) \right\} \rightarrow \max, \quad (1.6)$$

где α_i и β_i — положительные весовые коэффициенты. Если предпочтение отдается потреблению, то $\alpha_i > \beta_i$, а если предпочтение отдается накоплению производственного потенциала, то $\alpha_i < \beta_i$.

Таким образом, задача оптимального управления экономикой состоит в нахождении функций управления $C_1(t), C_2(t), \dots, C_n(t)$ и соответствующих им решений $X_1(t), X_2(t), \dots, X_n(t)$ системы дифференциальных уравнений (1.4) на отрезке $t \in [0, \tau]$, которые удовлетворяют начальным условиям $X_i(0) = X_i^0$, ограничениям (1.5) и доставляют максимум функционалу (1.6). Для решения поставленной задачи применяются методы, изложенные в разделе 5.

1.3 Контрольные вопросы

1. Какое балансовое соотношение положено в основу модели Леонтьева?
2. Каким ограничениям удовлетворяет управляющее воздействие в модели Леонтьева?
3. Каким образом учитывается баланс между потреблением и накоплением фондов в функционале качества задачи об оптимальном распределении капитальных вложений?
4. Каков экономический смысл функции управления в задаче об оптимальном распределении капитальных вложений?

1.4 Творческие задания

Задание 1. (*Модель Кейнса с непрерывным временем*) Рассмотрим обыкновенное дифференциальное уравнение [4, с. 59]:

$$\frac{1}{1-c} \frac{dy(t)}{dt} + y(t) = \frac{C+I}{1-c}, \quad (1.7)$$

где $y(t)$ — валовой внутренний продукт (ВВП), t — время (например, измеряемое в годах от начального отсчета $t = 0$), $C \geq 0$ — минимальный объем фонда потребления, $c \in (0, 1)$ — склонность к потреблению, $I \geq 0$ — валовые частные внутренние инвестиции.

Для фиксированных значений параметров C, c, I , найти стационарное решение уравнения (1.7) вида $y(t) \equiv y_E$ (равновесное состояние модели Кейнса). Исследовать поведение решений $y(t)$ в окрестности точки $y = y_E$.

Задание 2. Для случая $C = \text{const}$, $c = \text{const}$, $I = I(t)$, требуется записать общее решение дифференциального уравнения (1.7) методом вариации произвольных постоянных. При каких условиях на функцию $I(t)$, $t \geq 0$, выполнено свойство

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(t) = y_E$$

для всех решений дифференциального уравнения (1.7)?

2 Управляемость линейных систем

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx_i(t)}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{ij}x_j(t) + \sum_{k=1}^m b_{ik}u_k(t), \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (2.1)$$

где функции $x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)$ характеризуют состояние системы, а $u_1(t), u_2(t), \dots, u_m(t)$ описывают управляющие воздействия в момент времени t . Для удобства обозначений перепишем систему (2.1) в векторном виде

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad (2.2)$$

где $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^* \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния системы (фазовый вектор), $u = (u_1, u_2, \dots, u_m)^* \in \mathbb{R}^m$ — управление, матрицы с постоянными коэффициентами $A = (a_{ij})$ и $B = (b_{ik})$ имеют размерности $n \times n$ и $n \times m$, соответственно. Звездочка обозначает операцию транспонирования.

2.1 Ранговый критерий управляемости

Для произвольного $T > 0$ введем класс допустимых управлений \mathcal{U}_T , состоящий из всех ограниченных измеримых функций $u(t) \in \mathbb{R}^m$ на отрезке $t \in [0, T]$. Ключевым свойством системы (2.2) является свойство управляемости [7, 11].

Определение 2.1. Система (2.2) называется *управляемой*, если для произвольных $x^{(0)}, x^{(1)} \in \mathbb{R}^n$ существуют такие $T > 0$, $u \in \mathcal{U}_T$, что система (2.2) с $u = u(t)$ имеет решение $x(t)$, удовлетворяющее краевым условиям $x(0) = x^{(0)}$, $x(T) = x^{(1)}$.

Для исследования решений системы (2.2) определим матричную функцию

$$e^{tA} = I + tA + \frac{t^2}{2}A^2 + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}A^k \quad (2.3)$$

Ряд (2.3) сходится для всех $t \in \mathbb{R}$ и допускает почленное дифференцирование и интегрирование (см. [6]).

Лемма 2.1. Пусть $T > 0$, $u \in \mathcal{U}_T$, $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$. Тогда задача Коши

$$\begin{aligned} \dot{x}(t) &= Ax(t) + Bu(t), \quad t \in [0, T], \\ x(0) &= x^{(0)} \end{aligned}$$

имеет единственное решение

$$x(t; x^{(0)}, u) = e^{tA}x^{(0)} + \int_0^t e^{(t-s)A}Bu(s) ds, \quad t \in [0, T] \quad (2.4)$$

Доказательство. Почленным дифференцированием ряда (2.3) получаем, что функция $\tilde{x}(t) = e^{tA}x^{(0)}$ является решением однородного дифференциального уравнения $\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x}$:

$$\dot{\tilde{x}} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{kt^{k-1}}{k!}A^kx^{(0)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!}A^{k+1}x^{(0)} = A \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{k!}A^kx^{(0)} \right) = A\tilde{x}(t).$$

Далее применим метод вариации произвольных постоянных.

Пусть $x(t) = e^{tA}c(t)$. Подставляя $x(t)$ в (2.2), находим

$$\dot{c}(t) = e^{-tA}Bu(t),$$

или

$$c(t) = c^{(0)} + \int_0^t e^{-sA}Bu(s) ds.$$

Из условия $x(0) = x^{(0)}$ находим $c^{(0)} = x^{(0)}$. \square

Теорема 2.1 (Критерий управляемости Калмана). *Управляемость системы (2.2) эквивалентна условию*

$$\text{rank}(B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B) = n.$$

Доказательство. 1. Покажем, что из управляемости системы (2.2) следует, что $\text{rank}(B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B) = n$.

Предположим, что $\text{rank}(B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B) < n$, то есть строки матрицы $K = (B, AB, A^2B, \dots, A^{n-1}B)$ линейно зависимы:

$$\text{существует строка } v \in \mathbb{R}^n : vB = vAB = \dots = vA^{n-1}B = 0, v \neq \bar{0} \quad (2.5)$$

Тогда по теореме Гамильтона–Кэли [6, с. 87]:

$$A^n = c_{n-1}A^{n-1} + c_{n-2}A^{n-2} + \dots + c_0I, \quad (2.6)$$

где c_j — коэффициенты характеристического уравнения матрицы A .

Из (2.5) и (2.6) следует, что $vA^nB = 0$.

$$vA^{n+1}B = 0, vA^{n+k}B = 0, \forall k = 1, 2, \dots$$

Из (2.3),

$$ve^{tA}B = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} vA^k B = 0 \quad (2.7)$$

Положим $x^{(0)} = 0$ и применим формулу (2.4):

$$x(t; 0, u) = \int_0^t e^{(t-s)A}Bu(s) ds.$$

С помощью формулы (2.7) получим

$$vx(t; 0, u) = \int_0^t ve^{(t-s)A}Bu(s) ds = 0,$$

что эквивалентно условию $x(t) \perp v$ для всех $u \in L_\infty[0, \infty)$, то есть система (2.2) неуправляема — пришли к противоречию.

2. Покажем, что из условия $\text{rank}(K) = n$ следует управляемость системы (2.2). Рассмотрим множество

$$R_0 = \{x(1) : x(0) = 0, x(t) \text{ — решение системы (2.2) с } u \in \mathcal{U}_1\}.$$

Поскольку при $x^{(0)} = 0$ формула (2.4) задает линейное отображение из $L^\infty[0, T]$ в \mathbb{R}^n , то R_0 — линейное подпространство в \mathbb{R}^n .

Докажем, что $R_0 = \mathbb{R}^n$. Предположим противное: пусть $\dim(R_0) < n$. Тогда существует ненулевой вектор $v \in \mathbb{R}^n$, для которого

$$\int_0^1 ve^{(1-s)A}Bu(s) ds = 0 \quad \forall u \in L_\infty[0, 1].$$

Следовательно, по основной лемме вариационного исчисления,

$$ve^{(1-s)A}B \equiv 0 \quad \forall s \in [0, 1] \Rightarrow \left. \frac{d^k}{ds^k} \left(ve^{(1-s)A}B \right) \right|_{s=1} = 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (2.8)$$

Из (2.8) следует, что $\pm vA^{n-1}B = 0$. Отсюда вытекает, что $\text{rank}(K) < n$ — пришли к противоречию.

Таким образом, $R_0 = \mathbb{R}^n$. Если $x(0) = x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$, то

$$x(t, x^{(0)}, u) = e^{tA}x^{(0)} + y,$$

где $y \in R_0 = \mathbb{R}^n$, и множество $\{y : u \in L_\infty[0, 1]\} = \mathbb{R}^n$, что доказывает управляемость системы (2.2). \square

Пример 2.1. Исследовать на управляемость систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = u. \end{cases}$$

В рассматриваемом случае

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, K = (B, AB) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\det K = -1 \neq 0$, следовательно, $\text{rank } K = 2$ и система управляема по теореме 2.1.

Пример 2.2. Исследовать при каких значениях параметров $\omega_1, \omega_2, \beta_1, \beta_2$ система

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \omega_1 x_2, \\ \dot{x}_2 = -\omega_1 x_1 + \beta_1 u, \\ \dot{x}_3 = \omega_2 x_4, \\ \dot{x}_4 = -\omega_2 x_3 + \beta_2 u \end{cases}$$

управляема.

Составим матрицу $K = (B, AB, A^2B, A^3B)$,

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \omega_1 & 0 & 0 \\ -\omega_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_2 \\ 0 & 0 & -\omega_2 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ \beta_1 \\ 0 \\ \beta_2 \end{pmatrix},$$

$$AB = \begin{pmatrix} \beta_1 \omega_1 \\ 0 \\ \beta_2 \omega_2 \\ 0 \end{pmatrix}, A^2B = \begin{pmatrix} 0 \\ -\beta_1 \omega_1^2 \\ 0 \\ -\beta_2 \omega_2^2 \end{pmatrix}, A^3B = \begin{pmatrix} 0 \\ -\beta_1 \omega_1^3 \\ 0 \\ -\beta_2 \omega_2^3 \end{pmatrix}$$

$$K = \begin{pmatrix} 0 & \omega_1 \beta_1 & 0 & -\omega_1^3 \beta_1 \\ \beta_1 & 0 & -\omega_1^2 \beta_1 & 0 \\ 0 & \omega_2 \beta_2 & 0 & -\omega_2^3 \beta_2 \\ \beta_2 & 0 & -\omega_2^2 \beta_2 & 0 \end{pmatrix}.$$

По теореме 2.1, рассматриваемая система управляема тогда и только тогда, когда определитель матрицы K отличен от нуля, то есть при

$$\beta_1^2 + \beta_2^2 + \omega_1^2 + \omega_2^2 \neq 0 \text{ и } |\omega_1| \neq |\omega_2|.$$

2.2 Декомпозиция Калмана

Теорема 2.2. Для линейной системы с управлением

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m \quad (2.9)$$

существует единственное C — линейное подпространство \mathbb{R}^n , обладающее следующими свойствами:

- 1) C — инвариантное подпространство для (2.9);
- 2) если систему (2.9) рассматривать в C , то она управляема (в C).

Доказательство. Обозначим

$$C = \left\{ \int_0^T e^{(T-s)A} Bu(s) ds : T > 0, u \in L^\infty [0, T] \right\} \quad (2.10)$$

Покажем, что C — линейное подпространство \mathbb{R}^n .

Линейность C следует из линейности интеграла и пространства L^∞ .

Обозначим через k размерность C , $0 \leq k \leq n$. При $k = 0$ утверждение теоремы выполняется, поэтому будем рассматривать случай, когда $k > 0$. Поскольку C — подпространство в \mathbb{R}^n , то существует линейная замена координат $(x_1, x_2, \dots, x_n) \rightarrow (\bar{x}_1, \bar{x}_2, \dots, \bar{x}_n)$, при которой множество C задается как

$$C = \{x : \bar{x}_{k+1} = \bar{x}_{k+2} = \dots = \bar{x}_n = 0\} \quad (2.11)$$

Обозначим $\bar{x}^{(1)} = \begin{pmatrix} \bar{x}_1 \\ \vdots \\ \bar{x}_k \end{pmatrix}$, $\bar{x}^{(2)} = \begin{pmatrix} \bar{x}_{k+1} \\ \vdots \\ \bar{x}_n \end{pmatrix}$. Тогда система (2.9) примет вид:

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}^{(1)} = A_{11}\bar{x}^{(1)} + A_{12}\bar{x}^{(2)} + B_1u, \\ \dot{\bar{x}}^{(2)} = A_{22}\bar{x}^{(2)} \end{cases} \quad (2.12)$$

Множество C инвариантно по построению. Тогда из формулы (2.11) следует, что $x_{k+1}(t) \equiv x_{k+2}(t) \equiv \dots \equiv x_n(t) \equiv 0$, если

$$x_{k+1}(0) = x_{k+2}(0) = \dots = x_n(0) = 0.$$

Отсюда вытекает, что $\dot{\bar{x}}_{k+1}(t) = \dot{\bar{x}}_{k+2}(t) = \dots = \dot{\bar{x}}_n(t) = 0$ для всех $t \geq 0$ при условии, что $\bar{x}_{k+1}(0) = \bar{x}_{k+2}(0) = \dots = \bar{x}_n(0) = 0$, то есть $\bar{x}^{(2)} = 0, \dot{\bar{x}}^{(2)} = 0$. Следовательно, второе уравнение системы (2.12) не зависит ни от $\bar{x}^{(1)}$, ни от u .

Если существует инвариантное множество $C', 0 \in C'$, то $C' \supset C$. С другой стороны, если существует множество $C', 0 \in C'$, на котором система (2.12) управляема, то $C' \subset C$. Отсюда следует, что множество C , удовлетворяющее обоим условиям теоремы, определено единственным образом. \square

Следствие 2.1 (Декомпозиция Калмана). Пусть C — множество, определяемое формулой (2.10) для системы (2.9). Тогда существует линейное преобразование координат, которое вектору x ставит в соответствие вектор $\bar{x} = \begin{bmatrix} \bar{x}^{(1)} \\ \bar{x}^{(2)} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^n$ так, что подпространство C определяется уравнением $\bar{x}^{(2)} = 0$, а система (2.9) записывается в виде

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}^{(1)} = A_{11}\bar{x}^{(1)} + A_{12}\bar{x}^{(2)} + B_1u, \\ \dot{\bar{x}}^{(2)} = A_{22}\bar{x}^{(2)}. \end{cases}$$

$$\dim(C) = \text{rank}(B_1, A_{11}B_1, \dots, A_{11}^{n-1}B_1) = \text{rank}(B, AB, \dots, A^{n-1}B).$$

Определение 2.2. Множество C называется подпространством управляемости системы (2.9).

2.3 Каноническая форма Бруновского

Теорема 2.3. Пусть система

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^1 \tag{2.13}$$

управляема. Тогда существует преобразование

$$\bar{x} = Dx, \bar{u} = \alpha u + \beta_1 x_1 + \dots + \beta_n x_n, |D| \neq 0, \alpha \neq 0, \tag{2.14}$$

которое приводит систему (2.13) к виду:

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}_1 = \bar{x}_2, \\ \dot{\bar{x}}_2 = \bar{x}_3, \\ \vdots \\ \dot{\bar{x}}_{n-1} = \bar{x}_n, \\ \dot{\bar{x}}_n = \bar{u} \end{cases} \quad (2.15)$$

Доказательство. Определим вектор $c = (c_1, c_2, \dots, c_n)$ из условий

$$cb = cAb = \dots = cA^{n-2}b = 0, \quad (2.16)$$

$$cA^{n-1}b \neq 0 \quad (2.17)$$

Существование такого c вытекает из условия управляемости: поскольку $\text{rank}(b, Ab, \dots, A^{n-1}b) = n$, то $\text{rank}(b, Ab, \dots, A^{n-2}b) = n - 1$. Отсюда следует, что существует $c \neq 0$, такой, что

$$cb = cAb = \dots = cA^{n-2}b = 0.$$

Такой вектор c удовлетворяет условию (2.17), ибо в противном случае

$$c(b, Ab, \dots, A^{n-1}b) = 0, \quad c \neq 0,$$

то есть c — собственный вектор матрицы $(b, Ab, \dots, A^{n-1}b)$, соответствующий собственному значению $\lambda = 0$, тогда $\det(b, Ab, \dots, A^{n-1}b) = 0$, что противоречит условию управляемости.

Полагаем

$$\begin{cases} \bar{x}_1 = cx \\ \bar{x}_2 = cAx, \\ \vdots \\ \bar{x}_n = cA^{n-1}x, \end{cases} \quad \text{то есть } D = \begin{pmatrix} c \\ cA \\ \vdots \\ cA^{n-1} \end{pmatrix},$$

невырожденность D следует из управляемости.

Дифференцируя \bar{x} , получаем:

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}_1 = c\dot{x} = cAx + cbu = \{ \text{по условию (2.16)} \} = \bar{x}_2, \\ \dot{\bar{x}}_2 = cA\dot{x} = cA^2x + cAbu = \{ \text{по условию (2.16)} \} = \bar{x}_3, \\ \vdots \\ \dot{\bar{x}}_{n-1} = cA^{n-2}\dot{x} = cA^{n-1}x + cA^{n-2}bu = \{ \text{по условию (2.16)} \} = \bar{x}_n, \\ \dot{\bar{x}}_n = cA^{n-1}\dot{x} = cA^n x + cA^{n-1}bu \end{cases} \quad (2.18)$$

Обозначим $\bar{u} = \alpha u + \beta x$, где $\alpha = cA^{n-1}b \neq 0$ по условию (2.17), а $\beta = cA^n$.

Тогда система (2.18) имеет вид (2.15) и эквивалентна системе (2.13).

□

Определение 2.3. Система (2.15) называется *канонической формой Бруновского* (стандартной канонической формой управляемой системы)

Пример 2.3. Привести к канонической форме Бруновского следующую систему:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1 - x_2, \\ \dot{x}_2 = x_2 + x_3, \\ \dot{x}_3 = u. \end{cases}$$

Обозначим $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$. Ненулевой вектор $c = (c_1, c_2, c_3)$

найдем из условия (2.16): $cb = cAb = 0$. Отсюда $c_2 = c_3 = 0$, $c_1 \neq 0$. Положим $c_1 = 1$, тогда $c = (1, 0, 0)$.

$$D = \begin{pmatrix} c \\ cA \\ cA^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix}, \quad \alpha = cA^2b = -1, \quad \beta = cA^3 = \begin{pmatrix} 1 & -3 & -2 \end{pmatrix}.$$

Замена переменных:

$$\bar{x} = Dx, \quad \bar{u} = -u + x_1 - 3x_2 - 2x_3.$$

Каноническая форма Бруновского:

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}_1 = \bar{x}_2, \\ \dot{\bar{x}}_2 = \bar{x}_1, \\ \dot{\bar{x}}_3 = \bar{u}. \end{cases}$$

2.4 Контрольные вопросы

1. Сколько строк и сколько столбцов имеет матрица в ранговом условии управляемости Калмана, если состояние системы $x \in \mathbb{R}^n$, а управление $u \in \mathbb{R}^m$?

2. Всякую ли линейную систему можно привести к канонической форме Бруновского?

3. Верно ли, что при приведении системы к канонической форме Бруновского имеется взаимно-однозначное соответствие между состоянием x исходной системы и \bar{x} в канонической форме?

4. Верно ли, что при приведении системы к канонической форме Бруновского имеется взаимно-однозначное соответствие между управлением u исходной системы и \bar{u} в канонической форме?

5. Сформулируйте теорему Гамильтона—Кэли.

2.5 Творческие задания

Задание 1. Обобщая пример 2.2, рассмотрим систему дифференциальных уравнений для произвольного $n \geq 1$:

$$\begin{aligned} \dot{x}_{2j-1} &= \omega_j x_{2j}, \\ \dot{x}_{2j} &= -\omega_j x_{2j-1} + \beta_j u, \quad j = 1, 2, \dots, n, \end{aligned} \tag{2.19}$$

где $x = (x_1, x_2, \dots, x_{2n-1}, x_{2n})^* \in \mathbb{R}^n$ — вектор состояния, $u \in \mathbb{R}$ — управление.

Требуется найти необходимые и достаточные условия на параметры ω_j и β_j , при которых система (2.19) управляема.

Задание 2. Построить преобразование, которое приводит систему (2.19) к канонической форме Бруновского.

3 Задача стабилизации

Пусть

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m \quad (3.1)$$

Задача стабилизации [7] состоит в нахождении такой матрицы D размерности $m \times n$, чтобы система (3.1) с управлением

$$u(t) = Dx(t) \quad (3.2)$$

имела асимптотически устойчивое решение $x = 0$.

Определение 3.1. Система (3.1) называется *стабилизируемой*, если задача стабилизации разрешима.

Систему (3.1), (3.2) можно записать в виде

$$\dot{x} = (A + BD)x \quad (3.3)$$

Обозначим $C = A + BD$. Тогда задача стабилизации сводится к определению матрицы D , для которой матрица C удовлетворяет условиям теоремы об асимптотической устойчивости [8, с. 89].

Теорема 3.1. *Рассмотрим систему дифференциальных уравнений*

$$\dot{x} = Cx, \quad (3.4)$$

где C — $n \times n$ -матрица.

Для асимптотической устойчивости решения $x = 0$ системы (3.4) необходимо и достаточно чтобы выполнялось условие:

$$\operatorname{Re}(\lambda_k) < 0, \quad \forall \lambda_k : \det(C - \lambda_k I) = 0.$$

3.1 Стабилизация управляемых систем

Теорема 3.2. *Если система*

$$\dot{x} = Ax + bu, \quad x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^1 \quad (3.5)$$

управляема, то она стабилизируема.

Доказательство. Приведем систему (3.5) к канонической форме Бруновского с помощью теоремы 2.3:

$$\bar{x} = \tilde{D}x, \bar{u} = \alpha u + \beta x, \quad (3.6)$$

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}_1 = \bar{x}_2, \\ \dot{\bar{x}}_2 = \bar{x}_3, \\ \vdots \\ \dot{\bar{x}}_n = \bar{u} \end{cases} \quad (3.7)$$

В систему (3.7) подставим управление

$$\bar{u} = k\bar{x}, \quad k = (k_1, \dots, k_n).$$

Тогда получим систему:

$$\begin{cases} \dot{\bar{x}}_1 = \bar{x}_2, \\ \dot{\bar{x}}_2 = \bar{x}_3, \\ \vdots \\ \dot{\bar{x}}_n = k_1\bar{x}_1 + k_2\bar{x}_2 + \dots + k_n\bar{x}_n, \end{cases}$$

или

$$y^{(n)} - k_n y^{(n-1)} - k_{n-1} y^{(n-2)} - \dots - k_1 y = 0 \quad (3.8)$$

Запишем характеристическое уравнение для системы (3.8):

$$\lambda^n - k_n \lambda^{n-1} - \dots - k_2 \lambda - k_1 = 0 \quad (3.9)$$

Поскольку коэффициенты (k_1, \dots, k_n) могут быть выбраны произвольно, то возможно подобрать их так, чтобы для всех корней уравнения (3.9) выполнялось условие $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$. В частности, можно выбрать $\lambda_k = -1$ ($\forall k = \overline{1, n}$).

Действительно, для этого необходимо и достаточно, чтобы

$$\lambda^n - k_n \lambda^{n-1} - \dots - k_1 = (\lambda + 1)^n = \sum_{j=0}^n C_n^j \lambda^j,$$

тогда

$$k_i = -C_n^{i-1}.$$

При таком выборе k_i решение $\bar{x} = 0$ системы (3.3) с управлением $\bar{u} = k\bar{x}$ устойчиво асимптотически. Тем же свойством обладает система (3.1) при использовании преобразования (3.6) с управлением $\bar{u} = k\bar{x}$.

При этом, $u = \frac{1}{\alpha} (\bar{u} - \beta x) = \alpha^{-1} (k\bar{x} - \beta x) = \alpha^{-1} (k\tilde{D} - \beta) x$. Таким образом, управление $u = Dx$, где $D = \alpha^{-1} (k\tilde{D} - \beta)$, решает задачу стабилизации системы (3.1). \square

3.2 Необходимые и достаточные условия стабилизируемости

Теорема 3.3. *Рассмотрим систему (3.1) и обозначим через C её пространство управляемости, $\mathbb{R}^n = C \oplus N$, где N — неуправляемое подпространство.*

Система (3.1) стабилизируема только тогда, когда $\operatorname{Re}(\lambda) < 0$ для всех λ — собственных значений матрицы A , соответствующих собственным векторам A из неуправляемого подпространства N .

Пример 3.1. *Построить стабилизирующее управление $u = Dx$ для системы*

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_2 + 2x_3, \\ \dot{x}_2 &= x_1 + x_2, \\ \dot{x}_3 &= -x_3 + u. \end{aligned}$$

Положим $u = d_1 x_1 + d_2 x_2 + d_3 x_3$ и решим характеристическое уравнение системы с управлением $u = Dx$, то есть

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = -x_2 + 2x_3, \\ \dot{x}_2 = x_1 + x_2, \\ \dot{x}_3 = d_1 x_1 + d_2 x_2 + (d_3 - 1) x_3. \end{cases}$$

Характеристическое уравнение:

$$|\lambda I - (A + BD)| = \begin{vmatrix} \lambda & 1 & -2 \\ -1 & \lambda - 1 & 0 \\ -d_1 & -d_2 & \lambda + 1 - d_3 \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda^3 - d_3\lambda^2 - \lambda(d_3 + 2d_1) + 1 - 2d_1 - 2d_2 - d_3 = 0.$$

Подберем d_1, d_2, d_3 так, чтобы все корни характеристического уравнения равнялись -1 , то есть чтобы $\lambda I - (A + BD) = (\lambda + 1)^3 = \lambda^3 + 3\lambda^2 + 3\lambda + 1$:

$$d_1 = -3, d_2 = -1, 5, d_3 = -3.$$

Таким образом, исходная система стабилизируема управлением $u = Dx$, где $D = (-3; -1, 5; -3)$.

Пример 3.2. Построить стабилизирующее управление $u = Dx$ для системы

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 + x_3 + u, \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2, \\ \dot{x}_3 = -x_3 + x_2. \end{cases}$$

С управлением $u = d_1x_1 + d_2x_2 + d_3x_3$ система примет вид:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = d_1x_1 + (d_2 + 1)x_2 + (d_3 + 1)x_3, \\ \dot{x}_2 = x_1 - x_2, \\ \dot{x}_3 = -x_3 + x_2. \end{cases}$$

Характеристическое уравнение:

$$|\lambda I - (A + BD)| = \lambda^3 + \lambda^2(2 - d_1) + (-2d_1 - d_2)\lambda - d_1 - d_2 - d_3 - 2 = 0.$$

Система стабилизируема управлением $u = Dx$, где $D = (-1; -1; -1)$.

3.3 Контрольные вопросы

1. Верно ли, что всякая управляемая система стабилизируема?
2. Верно ли, что всякая стабилизируемая система управляема?
3. Верно ли, что $Re(\lambda_j) < 0$, $j = \overline{1, n}$, для всех собственных значений $n \times n$ -матрицы $A = (a_{ij})$, если $a_{ij} < 0$ для всех $i, j = \overline{1, n}$?

3.4 Творческие задания

Задание 1. Доказать, что необходимым и достаточным условием стабилизируемости системы

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m \quad (3.10)$$

является существование положительно-определенной квадратичной формы

$$V(x) = \langle Qx, x \rangle = \sum_{i,j=1}^n q_{ij}x_i x_j,$$

обладающей свойством:

$$\forall x \neq 0 \exists u \in \mathbb{R}^m : \dot{V}(x, u) < 0.$$

Здесь $\dot{V}(x, u)$ обозначает производную функции $V(x)$ в силу системы (3.10):

$$\dot{V}(x, u) = \langle \nabla V(x), Ax + Bu \rangle = \langle 2Qx, Ax + Bu \rangle.$$

Функция $V(x)$, обладающая указанными выше свойствами, называется *функцией Ляпунова* системы (3.10).

Задание 2. Построить функцию Ляпунова для системы

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 + 2x_2, \\ \dot{x}_2 &= -2x_1 + x_2 + u, \quad x = (x_1, x_2)^* \in \mathbb{R}^2, \quad u \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

4 Наблюдаемость линейных систем

Предположим, что задана линейная система с выходом

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m, \quad (4.1)$$

$$y = Hx, \quad y \in \mathbb{R}^r, \quad (m \leq n, r \leq n), \quad (4.2)$$

где x — состояние системы, u — управление(вход), y — выход.

Предположим, что $\hat{u} \in L^\infty [0, +\infty)$, и обозначим $x(t; x_0, \hat{u})$ — решение задачи Коши для системы (4.1) с управлением $u = \hat{u}(t)$, $x(0; x_0, u) = x_0$.

Определение 4.1. Система (4.1), (4.2) *наблюдаема*, если для произвольных $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ таких, что $x_1 \neq x_2$, и для любого управления $\hat{u} \in L^\infty [0, +\infty)$ существует $t > 0 : Hx(t, x_1, \hat{u}) \neq Hx(t, x_2, \hat{u})$.

Геометрический смысл понятия наблюдаемости иллюстрирует рис. 4.1 для случая $n = 3, r = 2$.

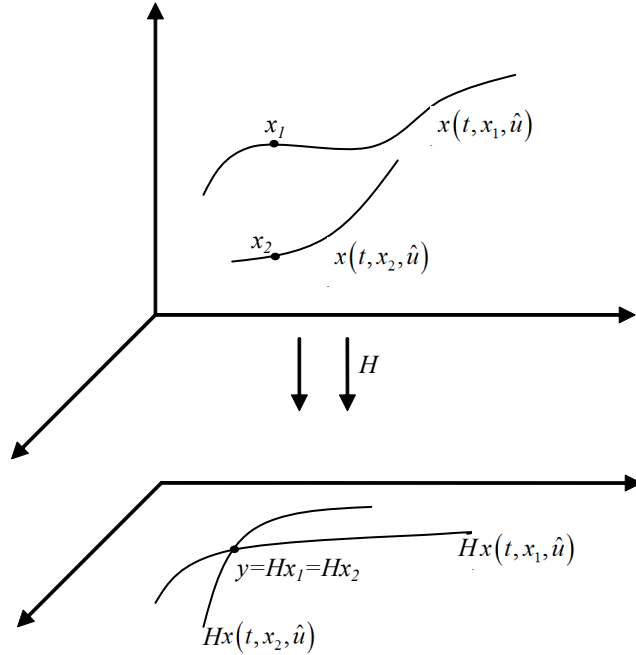


Рис. 4.1 — Геометрическая иллюстрация свойства наблюдаемости

Поскольку $r < n$, то отображение H вырождено и различным *точкам* $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^3$ соответствует одна и та же проекция $y = Hx_1 = Hx_2 \in \mathbb{R}^2$. При этом *траекториям* $x(t, x_1, \hat{u})$ и $x(t, x_2, \hat{u})$ соответствуют разные проекции $Hx(t, x_1, \hat{u}), Hx(t, x_2, \hat{u})$.

Лемма 4.1. *Наблюдаемость системы (4.1), (4.2) эквивалентна выполнению условия*

$$\forall x_0 \neq 0, \exists t > 0 : Hx(t, x_0, 0) \neq 0 \quad (4.3)$$

Доказательство. Покажем, что из наблюдаемости системы (4.1), (4.2) следует свойство (4.3). Для этого положим $x_1 = x_0, x_2 = 0, \hat{u}(t) \equiv 0$. Тогда существует $t : Hx(t, x_0, 0) \neq Hx(t, 0, 0) = 0$ (по определению 5.1).

Докажем теперь, что из свойства (4.3) следует наблюдаемость в смысле определения 5.1. Предположим противное: пусть существуют $x_1 \neq x_2$, $\hat{u} \in L_\infty [0, +\infty)$: $Hx(t, x_1, \hat{u}) \equiv Hx(t, x_2, \hat{u})$. Положим $x_0 = x_1 - x_2 \neq 0$ и подставим $\tilde{x}(t) = x(t, x_1, \hat{u}) - x(t, x_2, \hat{u})$ в систему (4.1):

$$\dot{\tilde{x}} = Ax(t, x_1, \hat{u}) + B\hat{u} - Ax(t, x_2, \hat{u}) - B\hat{u} = A\tilde{x}(t),$$

то есть $\tilde{x}(t) = x(t, x_0, 0)$. Тогда, по предположению,

$$Hx(t, x_0, 0) = Hx(t, x_1, \hat{u}) - Hx(t, x_2, \hat{u}) \equiv 0,$$

что противоречит свойству (4.3). \square

Теорема 4.1 (Критерий наблюдаемости Калмана). Система (4.1), (4.2) наблюдаема тогда и только тогда, когда выполняется условие:

$$\text{rank} \begin{pmatrix} H \\ HA \\ \vdots \\ HA^{n-1} \end{pmatrix} = n \quad (4.4)$$

Доказательство. Зафиксируем произвольное $t > 0$ и рассмотрим следующую $(n \times n)$ матрицу:

$$R_t = \int_0^t e^{sA^T} H^T H e^{sA} ds.$$

Нужно доказать, что $(R_t x_0, x_0) = \|Hx(\cdot, x_0, 0)\|^2$,

$$\begin{aligned} \|Hx(\cdot, x_0, 0)\|^2 &= \int_0^t (Hx(s, x_0, 0), Hx(s, x_0, 0)) ds = \\ &= \int_0^t (H e^{sA} x_0, H e^{sA} x_0) ds = \int_0^t (e^{sA^T} H^T H e^{sA} x_0, x_0) ds = (R_t x_0, x_0). \end{aligned}$$

Поскольку, по лемме 5.1, наблюдаемость системы (4.1), (4.2) эквивалентна свойству (4.3), то, используя аналитичность R_t , приходим к выводу, что

для наблюдаемости системы (4.1), (4.2) необходимо и достаточно выполнение условия $(R_t x_0, x_0) > 0, \forall x_0 \neq 0$, что, в свою очередь, эквивалентно положительной определенности матрицы R_t , или условию

$$\text{rank } R_t = n, (R_t x_0, x_0) \geq 0.$$

Осталось показать, что условие $\text{rank } R_t = n$ эквивалентно условию (4.4).

1. Покажем, что из того, что $\text{rank } R_t = n$ следует условие (4.4). Пред-

положим противное: пусть, $\text{rank} \begin{pmatrix} H \\ HA \\ \vdots \\ HA^{n-1} \end{pmatrix} < n$, тогда существует $x_0 \neq 0$,

для которого

$$Hx_0 = HAx_0 = \dots = HA^{n-1}x_0 = 0 \quad (4.5)$$

По теореме Гамильтона-Кэли,

$$A^n + p_{n-1}A^{n-1} + \dots + p_0I = 0,$$

где $p_{n-1}, \dots, p_0 \in \mathbb{R}$ — коэффициенты характеристического многочлена матрицы A . Тогда из (4.5) следует, что $HA^n x_0 = 0, HA^{n+1}x_0 = 0, \dots$

Итак, $HA^k x_0 = 0$ при всех $k = 0, 1, 2, \dots$. Поскольку $e^{sA} = \sum_0^{\infty} \frac{s^k A^k}{k!}$, то $He^{sA}x_0 \equiv 0$,

$$R_t = \int_0^t e^{sA^T} H^T H e^{sA} x_0 ds = 0, x_0 \neq 0.$$

Следовательно, $\text{rank}(R_t) < n$.

2. Покажем теперь, что из условия (4.4) следует, что $\text{rank}(R_t) = n$.

Предположим противное: пусть $\text{rank}(R_t) < n$, то есть существует $x_0 \neq 0$ для которого $R_t x_0 = 0$. Тогда

$$0 = (R_t x_0, x_0) = \int_0^t \|Ae^{sA} x_0\|^2 ds.$$

Следовательно, $He^{sA}x_0 \equiv 0$ и

$$\left. \frac{d^k}{ds^k} (He^{sA}x_0) \right|_{s=0} = 0, \forall k = 0, 1, 2, \dots$$

Отсюда следует, что $Hx_0 = HAx_0 = \dots = HA^{n-1}x_0 = 0$, что противоречит условию (4.4). \square

Теорема 4.2 (теорема двойственности). *Рассмотрим две системы:*

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu \\ y = Hx \end{cases}, \quad x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m, y \in \mathbb{R}^r, \quad (4.6)$$

$$\begin{cases} \dot{z} = A^T z + H^T v \\ w = B^T z \end{cases}, \quad z \in \mathbb{R}^n, v \in \mathbb{R}^n, w \in \mathbb{R}^n, \quad (4.7)$$

где x, z — состояния, u, v — управления, y, w — выходы систем (4.6), (4.7) соответственно.

Тогда управляемость системы (4.6) эквивалентна наблюдаемости систем (4.7), наблюдаемость системы (4.6) эквивалентна управляемости системы (4.7).

Доказательство. Утверждение теоремы следует из проверки ранговых условий управляемости для матриц (A, B) и наблюдаемости (A, H) :

По теореме 2.1, управляемость системы (4.6) эквивалентна условию $\text{rank}(B, AB, \dots, A^{n-1}B) = n$, что равносильно условию

$$\text{rank} \begin{pmatrix} B^T \\ B^T A^T \\ \vdots \\ B^T (A^{n-1})^T \end{pmatrix} = n$$

и, по теореме 4.1, эквивалентно наблюдаемости системы (4.7).

Аналогично, по теореме 4.1, наблюдаемость системы (4.6) эквивалентна условию $\text{rank} \begin{pmatrix} H \\ HA \\ \vdots \\ HA^{n-1} \end{pmatrix} \Leftrightarrow \text{rank}(H^T, A^T H^T, (A^T)^{n-1} H^T) = n$, что, по теореме 2.1, эквивалентно управляемости системы (4.7). \square

Замечание 4.1. Систему (4.7) будем называть *двойственной* к системе (4.6).

Пример 4.1. *Выяснить, наблюдаема ли следующая система:*

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + x_3, \\ \dot{x}_3 = u, \\ y = x_1, \end{cases}$$

где $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ — состояние, $u \in \mathbb{R}^1$ — управление, $y \in \mathbb{R}^1$ — выход.

Здесь

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \text{rank} \begin{pmatrix} H \\ HA \\ HA^2 \end{pmatrix} = \text{rank} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 3.$$

Таким образом, рассматриваемая система наблюдаема по теореме 4.1.

4.1 Наблюдатель Луенбергера

Рассмотрим систему с выходом

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m \quad (4.8)$$

$$y = Hx, \quad y \in \mathbb{R}^r \quad (4.9)$$

Теорема 4.3. *Предположим, что система (4.8), (4.9) наблюдаема. Тогда существует $(n \times r)$ матрица F , такая, что решения системы (4.8) и системы*

$$\dot{z} = (A - FH)z + Bu + Fy, \quad z \in \mathbb{R}^n \quad (4.10)$$

удовлетворяют условию

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|x(t) - z(t)\| = 0, \quad \forall u \in L_\infty[0, +\infty), \forall x(0), z(0) \in \mathbb{R}^n \quad (4.11)$$

Замечание 4.2. Система (4.10) называется *наблюдателем Луенбергера* для системы (4.8), (4.9).

Определение 4.2. *Спектром* матрицы $M \in \text{Mat}(n \times n)$ называется совокупность всех ее собственных значений:

$$\sigma(M) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \det(M - \lambda I) = 0\}.$$

Определение 4.3. Матрица $M \in \text{Mat}(n \times n)$ называется *гурвицевой* (см. [15]), если

$$\sigma(M) \subseteq \mathbb{C}_- = \{\lambda : \text{Re } \lambda < 0\}.$$

Доказательство теоремы 4.3. Пусть $u \in L^\infty$; $x(0), z(0) \in \mathbb{R}^n$, обозначим $e(t) = x(t) - z(t)$, где $x(t), z(t)$ — компоненты решения системы (4.8), (4.10). Тогда

$$\dot{e}(t) = Ax + Bu - Az + FH z - Bu - Fy = (A - FH)e(t) \quad (4.12)$$

По теореме Ляпунова (теорема 3.1) решение $e = 0$ системы (4.12) асимптотически устойчиво, если матрица $(A - FH)$ гурвицева. Докажем существование такой F , с которой матрица $(A - FH)$ будет гурвицевой.

Из наблюдаемости системы (4.8), (4.9) по теореме двойственности 4.2 следует управляемость (A^T, H^T) , откуда, по теоремам 3.2, 3.3, следует стабилизируемость системы

$$\dot{\xi} = A^T \xi + H^T v.$$

Это означает, что существует матрица F^T такая, что $A^T - H^T F^T$ — гурвицева матрица, то есть $A - FH$ — также гурвицева. \square

Замечание 4.3. *Построение наблюдателя Луенбергера для системы (4.8), (4.9) сводится к нахождению $(n \times r)$ матрицы F , для которой*

$$\sigma(A - FH) \subseteq \mathbb{C}_-.$$

Пример 4.2. Построить наблюдатель Луенбергера для следующей системы:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + x_3, \\ \dot{x}_3 = u, \\ y = x_1. \end{cases}$$

Для данной системы

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, F = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}, A - FH = \begin{pmatrix} -z_1 & 1 & 0 \\ -1 - z_2 & 0 & 1 \\ -z_3 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\det(A - FH - \lambda I) = \lambda^3 + \lambda^2 z_1 - \lambda(1 + z_2) + z_3 = 0.$$

Нетрудно убедиться, что при $z_1 = 3, z_2 = -4, z_3 = 1$ все решения уравнения $\det(A - FH - \lambda I) = 0$ будут равны -1 .

Таким образом, $F = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}$.

4.2 Стабилизация линейных систем с наблюдателем

Теорема 4.4. Пусть управление $u = Kx$, $K \in \text{Mat}(m \times n)$, решает задачу стабилизации системы (4.8). Предположим также, что система (4.8) с выходом (4.9) наблюдаема, и система (4.10) является наблюдателем Луенбергера для системы (4.8), (4.9) при некоторой матрице $F \in \text{mat}(n \times r)$.

Тогда решение $x = 0, z = 0$ расширенной системы (4.8), (4.9), (4.10) с $u = Kz$ асимптотически устойчиво.

Доказательство. Запишем систему (4.8), (4.10) с $u = Kz$ в переменных x, e ($e = x - z$):

$$\dot{e} = Ax + BKz - Az + FH z - BKz - FHx = Ae - FHe = (A - FH)e;$$

$$\dot{x} = Ax + BKz = Ax + BK(x - e) = (A + BK)x - BKe.$$

Полученная система может быть записана в матричном виде:

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{e} \end{pmatrix} = \tilde{A} \begin{pmatrix} x \\ e \end{pmatrix},$$

где $\tilde{A} = \begin{pmatrix} A + BK & -BK \\ 0 & A - FH \end{pmatrix}$ — блочная матрица $((2n) \times (2n))$. Поскольку матрица \tilde{A} — блочно-треугольная, то её спектр представляется как

$$\sigma(\tilde{A}) = \sigma(A + BK) \cup \sigma(A - FH) \quad (4.13)$$

По условию теоремы, матрица K решает задачу стабилизации системы (4.8), то есть $A + BK$ — гурвицева матрица; система (4.10) — наблюдатель Луенбергера, то есть $A - FH$ — гурвицева. Отсюда на основании (4.13) следует, что \tilde{A} — гурвицева, то есть решение $x = 0, z = 0$ системы (4.8), (4.10) с $u = kz$ асимптотически устойчиво по Ляпунову. \square

Замечание 4.4. По теореме 4.4, построение стабилизирующего управления с использованием наблюдателя сводится к поиску пары матриц $K \in \text{mat}(m \times n)$ и $F \in \text{mat}(m \times r)$, для которых матрицы $A + BK$, $A - FH$ являются гурвицевыми. При выполнении ранговых критериев управляемости и наблюдаемости такие матрицы всегда существуют.

Задачи стабилизации с обратной связью по состоянию ($u = Kx$) и с наблюдателем ($u = Kz$) иллюстрируют схемы на рис. 4.2 и 4.3.

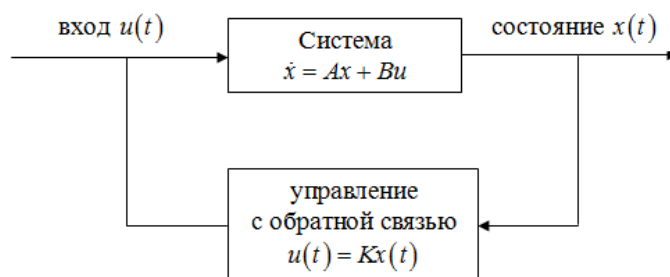


Рис. 4.2 — Стабилизация с обратной связью по состоянию

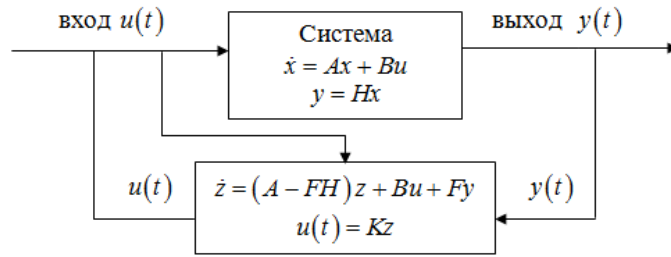


Рис. 4.3 — Стабилизация с наблюдателем в цепи обратной связи

4.3 Контрольные вопросы

1. Сколько строк и сколько столбцов имеет матрица в ранговом условии наблюдаемости Калмана, если состояние системы $x \in \mathbb{R}^n$, а выход $y \in \mathbb{R}^r$?
2. Всякая ли система наблюдаема?
3. Верно ли, что наблюдатель Луенбергера обеспечивает экспоненциальную сходимость $z(t)$ к $x(t)$ при $t \rightarrow -\infty$?
4. Верно ли, что наблюдатель Луенбергера обеспечивает экспоненциальную сходимость $z(t)$ к $x(t)$ при $t \rightarrow +\infty$?

4.4 Творческие задания

Задание 1. Найти необходимые и достаточные условия наблюдаемости системы

$$\begin{aligned}
 \dot{x}_1 &= u, \\
 \dot{x}_2 &= ax_3, \\
 \dot{x}_3 &= -ax_2 + bu, \\
 y &= x_2, \quad x = (x_1, x_2, x_3)^* \in \mathbb{R}^3, \quad u \in \mathbb{R}, \quad y \in \mathbb{R},
 \end{aligned}
 \tag{4.14}$$

где a и b — константы.

Задание 2. Построить наблюдатель Луенбергера для системы (4.14).

Задание 3. Для системы (4.14) решить задачу стабилизации с наблюдателем по теореме 4.4.

5 Основы теории оптимального управления

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = f(x, u), \quad (5.1)$$

где $x \in X \subseteq \mathbb{R}^n$, $u \in U \subseteq \mathbb{R}^m$, $f \in C^1(X \times U)$. Введем класс \mathcal{F} *допустимых управлений* [1, с. 85], состоящий из всех измеримых ограниченных функций $u(t) \in U$ на отрезке $t \in [t_0, t_1]$. Обозначим через $x(t_0; \xi_0, u)$ решение системы (5.1), соответствующее управлению $u \in \mathcal{F}$ и начальным условиям $x(t_0; \xi_0, u) = \xi_0$,

$$x : [t_0, t_1] \times X \times \mathcal{F} \rightarrow X.$$

Предположим, что задан функционал

$$\mathcal{J}(\xi_0, u) = \int_{t_0}^{t_1} f_0(x(t, \xi_0, u), u(t)) dt, \quad (5.2)$$

где функция $f_0 : X \times U \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет условиям существования интеграла (5.2) для любого начального состояния $\xi_0 \in X$ и допустимого управления $u \in \mathcal{F}$.

Сформулируем *основную задачу оптимального управления* [1, с. 17]: пусть в фазовом пространстве X заданы точки $\xi_0 \in X$ и $\xi_1 \in X$. Требуется среди всех допустимых управлений $u = u(t)$, удовлетворяющих условию $x(t_1; \xi_0, u) = \xi_1$, найти такое, для которого функционал $\mathcal{J}(\xi_0, u)$ принимает наименьшее возможное значение.

Время t_1 может быть фиксированным или свободным. Управление $u = u(t)$, решающее задачу оптимального управления, называется *оптимальным управлением*, а соответствующая ему кривая $x(t; \xi_0, u)$ называется *оптимальной траекторией*. Функционал $\mathcal{J}(\xi_0, u)$ называется *функционалом качества* или *функционалом цены*.

5.1 Принцип максимума Понтрягина

Для формулировки условий оптимальности добавим к переменным состояния $x = (x_1, \dots, x_n)^*$ искусственную переменную x_0 из дифференциального уравнения

$$\frac{dx_0}{dt} = f_0(x, u),$$

где f_0 — подынтегральное выражение в формуле (5.2). Обозначим

$$f(x, u) = \begin{pmatrix} f_1(x, u) \\ f_2(x, u) \\ \vdots \\ f_n(x, u) \end{pmatrix}.$$

Тогда для решения задачи Коши

$$\begin{aligned} \dot{x}_i &= f_i(x, u), \quad i = \overline{0, n}, \quad t \in [t_1, t_2], \\ x_0|_{t=t_0} &= 0, \quad x|_{t=t_0} = \xi_0, \end{aligned}$$

выполнено свойство

$$x_0|_{t=t_1} = \int_{t_0}^{t_1} f_0(x(t; \xi_0, u), u(t)) dt = \mathcal{J}(\xi_0, u).$$

Введем сопряженные переменные p_0, p_1, \dots, p_n и рассмотрим функцию Гамильтона:

$$H(p_0, \dots, p_n, x_1, \dots, x_n, u) = \sum_{j=0}^n p_j f_j(x, u) \quad (5.3)$$

С помощью функции H запишем гамильтонову систему дифференциальных уравнений:

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial x_i}, \quad i = 0, 1, 2, \dots, n \quad (5.4)$$

Эта система содержит $2n + 2$ обыкновенных дифференциальных уравнения относительно функций $x_0(t), x_1(t), \dots, x_n(t)$ и $p_0(t), p_1(t), \dots, p_n(t)$.

Теорема 5.1. (Принцип максимума Понтрягина [1, с. 25]) Пусть для допустимого управления $u = \tilde{u}(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, выполнено условие $x(t_1; \xi_0, \tilde{u}) = \xi_1$. Для оптимальности управления $\tilde{u}(t)$ и траектории $\tilde{x}(t) = x(t; \xi_0, \tilde{u})$ необходимо существование такой непрерывной вектор-функции

$$p(t) = (p_0(t), p_1(t), \dots, p_n(t)) \neq 0,$$

что $x = \tilde{x}(t)$, $p(t)$, $u = \tilde{u}(t)$ удовлетворяют системе (5.4) и выполнены следующие условия:

1. $H(p(t), \tilde{x}(t), \tilde{u}(t)) = \sup_{u \in U} H(p(t), \tilde{x}(t), u)$, $t \in [t_0, t_1]$;
2. $p_0(t_1) \leq 0$, $\sup_{u \in U} H(p(t_1), \tilde{x}(t_1), u) = 0$.

Если $x = \tilde{x}(t)$, $p(t)$, $u = \tilde{u}(t)$ удовлетворяют системе (5.4) и условию 1., то $p_0(t) \equiv \text{const}$, $\sup_{u \in U} H(p(t), \tilde{x}(t), u) \equiv \text{const}$, т.е. условие 2. можно проверять для произвольного $t \in [t_0, t_1]$.

Если допустимое управление $u = \tilde{u}(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, и соответствующая траектория $x = \tilde{x}(t)$ удовлетворяют системе (5.4), краевым условиям $\tilde{x}(t_0) = \xi_0$, $\tilde{x}(t_1) = \xi_1$ и условиям 1.—2. теоремы 5.1 с некоторой непрерывной функцией $p(t) = (p_0(t), p_1(t), \dots, p_n(t)) \neq 0$, то такое $\tilde{u}(t)$ будем называть *экстремальным управлением (экстремалью)* [10, с. 43]. Так как принцип максимума Понтрягина описывает необходимые условия оптимальности, то каждое оптимальное управление должно быть экстремальным.

Важным частным случаем задачи оптимального управления является задача оптимального быстрогодействия, которую при $t_0 = 0$ сформулируем следующим образом.

Задача оптимального быстрогодействия: для заданных начального и конечного положений $\xi_0, \xi_1 \in X$ системы (5.1) требуется найти минимальное время t_1 и допустимое управление $\tilde{u} \in \mathcal{F}$, для которых $x(t_1; \xi_0, \tilde{u}) = \xi_1$.

Для такой задачи определим функционал

$$\mathcal{J}(\xi_0, u) = \int_0^{t_1} 1 dt = t_1.$$

Данный функционал представляется в виде (5.2) с $f_0(x, u) = 1$, а соответствующая функция Гамильтона равна

$$H = p_0 + \sum_{j=1}^n p_j f_j(x, u).$$

Нетрудно видеть, что никакая из частных производных $\partial H / \partial x_j$ с $j \geq 1$ не зависит от p_0 , поэтому дифференциальные уравнения (5.4) относительно p_1, p_2, \dots, p_n можно рассматривать независимо от p_0 . Таким образом, можно ввести новую функцию Гамильтона

$$h(p_1, \dots, p_n, x, u) = \sum_{j=1}^n p_j f_j(x, u) \quad (5.5)$$

и сформулировать частный случай принципа максимума Понтрягина для задачи оптимального быстрогодействия [1, с. 26].

Теорема 5.2. (Принцип максимума Понтрягина для задачи оптимального быстрогодействия) Пусть $u = \tilde{u}(t)$, $t_0 \leq t \leq t_1$, — такое допустимое управление, что $x(t_1; \xi_0, \tilde{u}) = \xi_1$. Для оптимальности (по быстроддействию) управления $\tilde{u}(t)$ и траектории $\tilde{x}(t) = x(t; \xi_0, \tilde{u})$ необходимо существование такой непрерывной вектор-функции

$$p(t) = (p_1(t), \dots, p_n(t)) \neq 0,$$

что $x = \tilde{x}(t)$, $p(t)$, $u = \tilde{u}(t)$ удовлетворяют гамильтоновой системе

$$\frac{dx_i}{dt} = \frac{\partial h}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial h}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (5.6)$$

и выполнены следующие условия:

1. $h(p(t), \tilde{x}(t), \tilde{u}(t)) = \sup_{u \in U} h(p(t), \tilde{x}(t), u)$, $t \in [0, t_1]$;

$$2. \sup_{u \in U} h(p(t_1), \tilde{x}(t_1), u) \geq 0.$$

Если $x = \tilde{x}(t)$, $p(t)$, $u = \tilde{u}(t)$ удовлетворяют системе (5.6) и условию 1., то $\sup_{u \in U} h(p(t), \tilde{x}(t), u) \equiv \text{const}$, т.е. условие 2. можно проверять для произвольного $t \in [t_0, t_1]$.

В качестве примера рассмотрим задачу о быстрейшем попадании в начало координат [1, с. 29].

Пример 5.1 (Наибыстрейшая остановка). Рассмотрим движение материальной точки массы $m = 1$ под действием управляющей силы по второму закону Ньютона:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = u, \end{cases} \quad |u| \leq 1, \quad (5.7)$$

где $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, x_1 — координата точки, x_2 — скорость, u — управление (сила).

Необходимо для заданных $\xi_0 = \begin{pmatrix} \xi_{01} \\ \xi_{02} \end{pmatrix}$ и $\xi_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ найти управление $u(t)$, $t \in [0; t_1]$, переводящее систему (5.7) из ξ_0 в ξ_1 за минимальное время t_1 .

Воспользуемся теоремой 5.2. Определим функцию Гамильтона:

$$h(p_1, p_2, x_1, x_2, u) = p_1 f_1 + p_2 f_2 = p_1 x_2 + p_2 u.$$

Запишем систему уравнений Гамильтона (5.6):

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \frac{\partial h}{\partial p_1} = x_2, \dot{x}_2 = \frac{\partial h}{\partial p_2} = u, \\ \dot{p}_1 = -\frac{\partial h}{\partial x_1} = 0, \dot{p}_2 = -\frac{\partial h}{\partial x_2} = -p_1 \end{cases} \quad (5.8)$$

Интегрируя уравнения (5.8) относительно $p(t)$, получим:

$$\begin{aligned} p_1(t) &= p_1^0 = \text{const}, \\ p_2(t) &= -p_1^0 t + p_2^0. \end{aligned}$$

Если $u(t)$ — оптимальное управление, то должно выполняться первое свойство теоремы 5.2:

$$h(p(t), x(t), \tilde{u}(t)) = p_1 x_2 + p_2 \tilde{u} = \sup_{u \in [-1, 1]} (p_1 x_2 + p_2 u) = p_1 x_2 + |p_2|.$$

Отсюда

$$\tilde{u}(t) = \text{sign}(p_2(t)) = \text{sign}(-p_1^0 t + p_2^0).$$

Следовательно,

- 1) оптимальное управление $\tilde{u}(t) = \pm 1$;
- 2) оптимальное управление \tilde{u} либо сохраняет свое значение, либо переходит с -1 в $+1$ (с $+1$ в -1) ровно один раз.

Поэтому каждая оптимальная траектория состоит не более чем из двух частей — траекторий системы (5.7) с $u = +1$ или $u = -1$.

Изобразим эти траектории на плоскости (x_1, x_2) .

1. Пусть $u \equiv +1$, тогда

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = 1, \end{cases} \quad (5.9)$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{t^2}{2} + x_2^0 t + x_1^0 \\ x_2 = t + x_2^0 \end{cases} \quad \text{— параболы, расположенные симметрично оси } Ox_1.$$

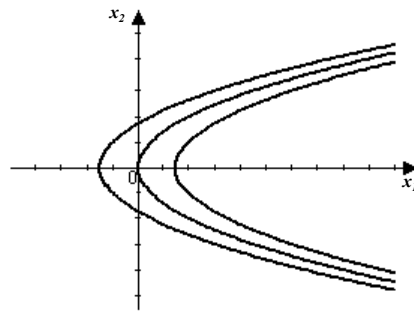


Рис. 5.1 — Траектории системы (5.9)

2. Пусть $u \equiv -1$, тогда

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -1, \end{cases} \quad (5.10)$$

$$\begin{cases} x_1 = \frac{-t^2}{2} + x_2^0 t + x_1^0 \\ x_2 = -t + x_2^0 \end{cases} \text{ — семейство парабол, повернутых в другую сторону.}$$

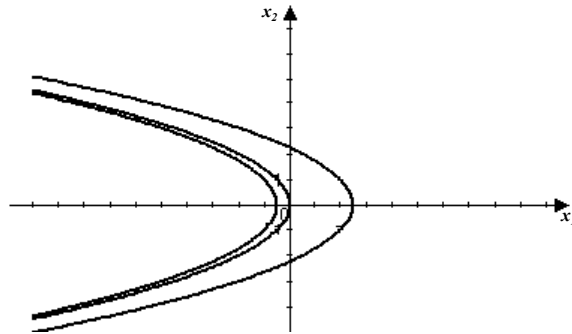


Рис. 5.2 — Траектории системы (5.10)

Изобразим множество точек, которые переводятся в $(0, 0)$ посредством управлений без переключений.

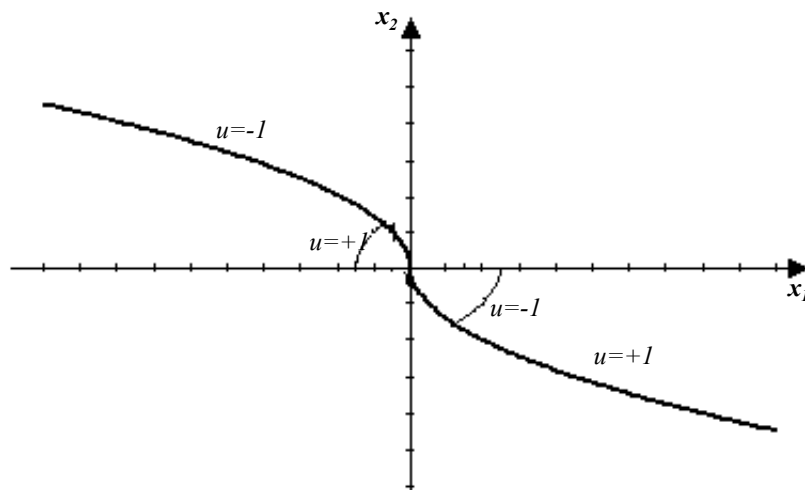


Рис. 5.3 — Кривая переключений в задаче оптимального быстрогодействия

Обозначим

$$\Gamma_- : x_1 = -\frac{x_2^2}{2}, x_2 > 0,$$

$$\Gamma_+ : x_1 = -\frac{x_2^2}{2}, x_2 < 0,$$

G_- — часть плоскости левее $\Gamma_+ \cup \Gamma_-$,

G_+ — часть плоскости правее $\Gamma_+ \cup \Gamma_-$.

Согласно теореме 5.2, если $\tilde{u}(t)$ — оптимальное управление, то

$$\tilde{u}(t) = \begin{cases} +1, \text{ если } x(t) \in G_- \cup \Gamma_+, \\ -1, \text{ если } x(t) \in G_+ \cup \Gamma_-. \end{cases}$$

5.2 Оптимальное управление односекторной моделью экономики

Для иллюстрации приложения принципа максимума Понтрягина к задачам экономической динамики, рассмотрим балансовое соотношение модели Леонтьева (1.4) для случая одной отрасли ($n = 1$):

$$X(t) = aX(t) + b\frac{dX(t)}{dt} + C(t), \quad t \in [0, \tau], \quad (5.11)$$

где $0 < a < 1$ и $b > 0$ — константы, управление $C(t)$ удовлетворяют ограничениям

$$U : C_{\min} \leq C(t) \leq C_{\max}, \quad C_{\min} \geq 0 \quad (5.12)$$

Перепишем дифференциальное уравнение (5.11) в нормальной форме:

$$\frac{dX}{dt} = \frac{1-a}{b}X - \frac{1}{b}C, \quad t \in [0, \tau] \quad (5.13)$$

Для заданного начального состояния $X(0) = X^0 \geq 0$, задачу максимизации функционала качества (1.6) сведем к минимизации интегрального функционала:

$$-\mathcal{J} = -\alpha \int_0^\tau C(t)dt - \beta X(\tau) = -\beta X^0 - \int_0^\tau \left\{ \alpha C(t) + \beta \frac{dX(t)}{dt} \right\} dt \rightarrow \min.$$

Подставив в этот интеграл производную dX/dt из уравнения (5.13), получим эквивалентную форму записи критерия качества (1.6):

$$\bar{\mathcal{J}}(X^0, C) = \frac{1}{b} \int_0^\tau \{(a-1)\beta X(t) + (\beta - \alpha b)C(t)\} dt \rightarrow \min \quad (5.14)$$

Итак, задача оптимального управления состоит в том, чтобы для заданного $X^0 \geq 0$ найти допустимое управление $C = \tilde{C}(t)$ и соответствующее решение $X(t)$ уравнения (5.13) на отрезке $t \in [0, \tau]$ таким образом, чтобы $X(0) = X^0$ и при $C = \tilde{C}(t)$ достигался минимум функционала (5.14) в классе всех допустимых управлений, удовлетворяющих ограничениям (5.12).

Для решения задачи (5.13), (5.14) применим теорему 5.1. Составим функцию Гамильтона:

$$H(p_0, p_1, X, C) = \frac{p_0}{b} \{(a-1)\beta X + (\beta - \alpha b)C\} + \frac{p_1}{b} \{(1-a)X - C\}.$$

Система дифференциальных уравнений Гамильтона (5.4) примет вид

$$\begin{aligned} \dot{p}_0 &= -\frac{\partial H}{\partial X_0} = 0, & \dot{p}_1 &= -\frac{\partial H}{\partial X} = \frac{a-1}{b}p_1 + \frac{(1-a)\beta}{b}p_0, \\ \dot{X}_0 &= \frac{\partial H}{\partial p_0} = \frac{(a-1)\beta}{b}X + \left(\frac{\beta}{b} - \alpha\right)C, & \dot{X} &= \frac{\partial H}{\partial p_1} = \frac{1-a}{b}X - \frac{1}{b}C \end{aligned} \quad (5.15)$$

Решая эти уравнения относительно сопряженных переменных p_0 и p_1 , с учетом условия 2. теоремы 5.1 получим:

$$p_1(t) = ke^{\frac{a-1}{b}t} - \beta p_0, \quad p_0 = \text{const} \leq 0, \quad (5.16)$$

где k — константа интегрирования. Если $\tilde{C}(t)$ — оптимальное управление в задаче (5.13), (5.14), то при ограничениях (5.12) условие максимальности гамильтониана H (условие 1. теоремы 5.1) приводит к формуле

$$\tilde{C}(t) = \begin{cases} C_{\min}, & p_1(t) > p_0(\beta - \alpha b), \\ C_{\max}, & p_1(t) < p_0(\beta - \alpha b) \end{cases} \quad (5.17)$$

Если $p_1(t) = p_0(\beta - \alpha b)$, то $\tilde{C}(t)$ может принимать любое значение из отрезка $[C_{\min}, C_{\max}]$. Для исключения из формулы (5.17) неизвестных констант p_0 и k воспользуемся условием 2. теоремы 5.1. Возможны два случая.

Случай $p_0 = 0$. Поскольку должно выполняться условие

$$p(t) = (p_0(t), p_1(t)) \neq 0,$$

то $k \neq 0$ в формуле (5.16) и функция $p_1(t)$ сохраняет знак, т.е. $\tilde{C}(t) \equiv \text{const}$ в рассматриваемом случае. Если $p_1(t) > 0$, то $\tilde{C} \equiv C_{\min}$ и условие 2. теоремы 5.1 дает

$$\max_{C \in [C_{\min}, C_{\max}]} H(p_0, p_1, X(t), C) = \max_{C \in [C_{\min}, C_{\max}]} \frac{(1-a)X(t) - C}{b} = 0, \quad (5.18)$$

что выполнено только при $X(t) \equiv X^0 = \frac{C_{\min}}{1-a}$. Аналогично, если $p_1(t) < 0$, то $\tilde{C} \equiv C_{\max}$ и условие (5.18) выполняется только при $X(t) \equiv X^0 = \frac{C_{\max}}{1-a}$.

Таким образом, если $X^0 = \frac{C_{\min}}{1-a}$, то экстремальным управлением является $\tilde{C}(t) \equiv C_{\min}$, если $X^0 = \frac{C_{\max}}{1-a}$, то $\tilde{C}(t) \equiv C_{\max}$. При этом экстремальной траекторией является особая точка $X(t) \equiv X^0$.

Случай $p_0 < 0$. Обозначим $\tilde{p}(t) = -p_1(t)/p_0$, тогда из (5.16) следует

$$\tilde{p}(t) = \tilde{k}e^{\frac{a-1}{b}t} + \beta \quad (5.19)$$

Выражение (5.17) запишем следующим образом:

$$\tilde{C}(t) = \begin{cases} C_{\min}, & \tilde{p}(t) > \alpha b - \beta, \\ C_{\max}, & \tilde{p}(t) < \alpha b - \beta \end{cases} \quad (5.20)$$

Пусть $C = \tilde{C}(t)$ и $X(t)$ — оптимальное управление и оптимальная траектория задачи (5.13), (5.14) для начального условия $X(0) = X^0 > 0$. Согласно теореме 5.1, соответствующее решение гамильтоновой системы (5.15) обладает свойством

$$\max_{C \in [C_{\min}, C_{\max}]} H(p_0, p_1(t), X(t), C) = 0, \quad \forall t \in [0, \tau].$$

Отсюда, с учетом представлений (5.19) и (5.20), при $t = 0$ получаем:

$$\begin{aligned} -\frac{b}{p_0} \max_C H(p_0, -p_0\tilde{p}(0), X^0, C) &= (1-a)(\tilde{k} + 2\beta)X^0 + \\ &+ \max_{C \in [C_{\min}, C_{\max}]} \left\{ (\alpha b - \tilde{k} - 2\beta)C \right\} = 0. \end{aligned}$$

Это условие распадается на три:

$$\tilde{k} = -2\beta, \quad \tilde{k} = -2\beta + \alpha b, \quad (5.21)$$

или

$$\tilde{k} = -2\beta - \frac{\alpha b C_{\min}}{(1-a)X^0 - C_{\min}}, \quad \tilde{k} > -2\beta + \alpha b, \quad (5.22)$$

или

$$\tilde{k} = -2\beta - \frac{\alpha b C_{\max}}{(1-a)X^0 - C_{\max}}, \quad \tilde{k} < -2\beta + \alpha b \quad (5.23)$$

В рассматриваемом случае знаменатели в формулах (5.22) и (5.23) отличен от нуля, ибо случаи $X^0 = C_{\min}/(1-a)$ и $X^0 = C_{\max}/(1-a)$ были рассмотрены выше. В соответствии с экономическим содержанием задачи будем предполагать, что $(1-a)X^0 - C > 0$ при всех $C \in [C_{\min}, C_{\max}]$, поскольку в балансовом соотношении (5.11) левая часть и каждое из слагаемых

в правой части должны быть положительными. Отсюда следует, что при естественных предположениях ($b > 0$, $\alpha > 0$, $C_{\min} \geq 0$) что условия (5.21), (5.22) не выполняются, но справедливо условие (5.23).

Итак, экстремальное управление $C = \tilde{C}(t)$ в задаче (5.13), (5.14) с начальным условием $X(0) = X^0$ задается формулой (5.20), где функция $\tilde{p}(t)$ и константа \tilde{k} определены в (5.19) и (5.23).

При достаточно общих предположениях экстремальные управления являются оптимальными (см. [13]). Условия существования оптимальных управлений приводятся в следующем пункте для класса линейных задач быстрогодействия.

5.3 Оптимальное по быстрдействию управление в линейных системах

Пусть

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x \in \mathbb{R}^n, u \in U \subseteq \mathbb{R}^m \quad (5.24)$$

Рассмотрим задачу оптимального быстрогодействия с целевым множеством: для заданных точки $\xi \in \mathbb{R}^n$ и множества $G \subseteq \mathbb{R}^n$, $G \neq \emptyset$, требуется найти $t_1 > 0$ и допустимое управление $\tilde{u} : [0, t_1] \rightarrow U$, для которых решение системы (5.24) удовлетворяет условию $x(t, \xi_0, \tilde{u}) \in G$, и для всякого допустимого управления $u : [0, t_2] \rightarrow U$ выполнено: если $x(t_2, \xi_0, \tilde{u}) \in G$, то $t_2 \geq t_1$.

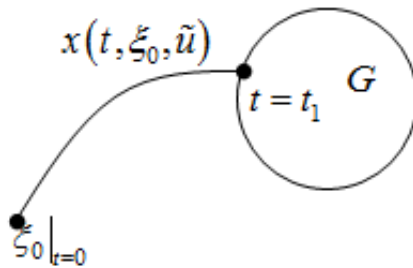


Рис. 5.4 — Траектория, достигающая целевого множества G

Определение 5.1. Множеством достижимости системы (5.24) из $\xi_0 \in \mathbb{R}^n$ за время t_1 называется следующее множество:

$$A_{t_1}(\xi_0) = \{x(t_1, \xi_0, u) : u : [0, t_1] \rightarrow U \text{ — допустимое управление}\}.$$

Определение 5.2. [7, с. 86] Задача оптимального быстродействия для системы (5.24) с начальным состоянием $\xi_0 \in \mathbb{R}^n$ называется *нормальной* при $t = t_1$, если для произвольного $\xi_1 \in \partial A_{t_1}(\xi_0)$ и для любых допустимых управлений $u_1, u_2 : [0, t_1] \rightarrow U$ выполнено свойство: если

$$x(t, \xi_2, u_1) = x(t, \xi_0, u_2) = \xi_1,$$

то $u_1(t) = u_2(t)$ почти всюду на отрезке $t \in [0, t_1]$.

Теорема 5.3. Пусть U — выпуклый компакт, $\xi_0 \in \mathbb{R}^n$, $G \subseteq \mathbb{R}^n$ — компактное целевое множество.

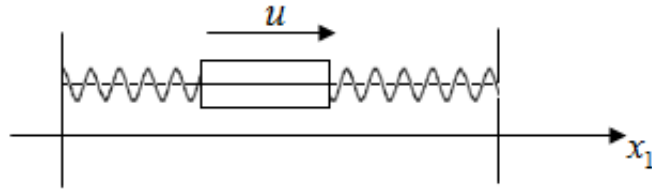
Если существует допустимое управление $u : [0, t_1] \rightarrow U$, для которого $x(t_1, \xi_0, u) \in G$, то существует оптимальное по быстродействию управление $\tilde{u} : [0, \tilde{t}_1] \rightarrow U$, для которого $x(\tilde{t}_1, \xi_0, \tilde{u}) \in G$; $\tilde{t}_1 \leq t_1$.

Теорема 5.4. Пусть U — выпуклый многогранник в \mathbb{R}^m . Задача оптимального быстродействия для системы (5.24) с $\xi_0 \in \mathbb{R}^n$ нормальна для произвольного $t_1 > 0$, если $B\omega, AB\omega, \dots, A^{n-1}B\omega$ линейно независимы для любого $\omega \neq 0$, направленного вдоль ребра u .

Пример 5.2 (Управляемый гармонический осциллятор). Пусть

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -x_1 + u, \end{cases} \quad |u| \leq 1 \quad (5.25)$$

Найти оптимальное управление, переводящее систему (5.25) из точки $\xi_0 = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ в точку $0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ за минимальное время.



x_1 — отклонение
 x_2 — скорость
 u — управляющая сила

Рис. 5.5 — Гармонический осциллятор с управлением

Применим принцип максимума Понтрягина (теорема 5.2):

$$h(p_1, p_2, x_1, x_2, u) = p_1 f_1 + p_2 f_2 = p_1 x_2 - p_2 x_1 - p_2 u,$$

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + u, \\ \dot{p}_1 = p_2, \\ \dot{p}_2 = -p_1. \end{cases}$$

$$\tilde{u}(t) : h(p, x, \tilde{u}) = \max_{u \in [-1, 1]} h(p, x, u).$$

Отсюда

$$\tilde{u}(t) = \text{sign}(p_2(t)) = \text{sign}(c \sin(t + \alpha)), \quad (5.26)$$

$$p_2 = c \sin(t + \alpha), c \neq 0.$$

Пусть $\tau > 0$ — время первого переключения в управлении (5.26), то есть $\sin(\tau + \alpha) = 0, \sin(\tau + \alpha) \neq 0$ при $t \in (0, \tau)$. Тогда

$$\tilde{u}(t) = \begin{cases} \tilde{u}(0), & \text{если } t \in (0, \tau] \cup (\tau + \pi, \tau + 2\pi] \cup \dots, \\ -\tilde{u}(0), & \text{если } t \in (\tau, \tau + \pi] \cup (\tau + 2\pi, \tau + 3\pi] \cup \dots \end{cases}$$

Итак, оптимальное управление обладает следующими свойствами:

- 1) $\tilde{u}(t) = \pm 1$;
- 2) время первого переключения $\tau < \pi$;
- 3) время между соседним переключениями равно π ;

4) оптимальные траектории системы (5.25) состоят из кусков траекторий систем

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 - 1; \end{cases} \quad (\Sigma_-)$$

и

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + 1. \end{cases} \quad (\Sigma_+)$$

Запишем интеграл системы (Σ_-) :

$$(x_1 + 1)^2 + x_2^2 = C,$$

и системы (Σ_+) :

$$(x_1 - 1)^2 + x_2^2 = C.$$

Таким образом, траекториями без переключений являются дуги окружностей с центрами в точках $(1, 0)$ и $(0, 1)$ (см. рис. 5.6.)

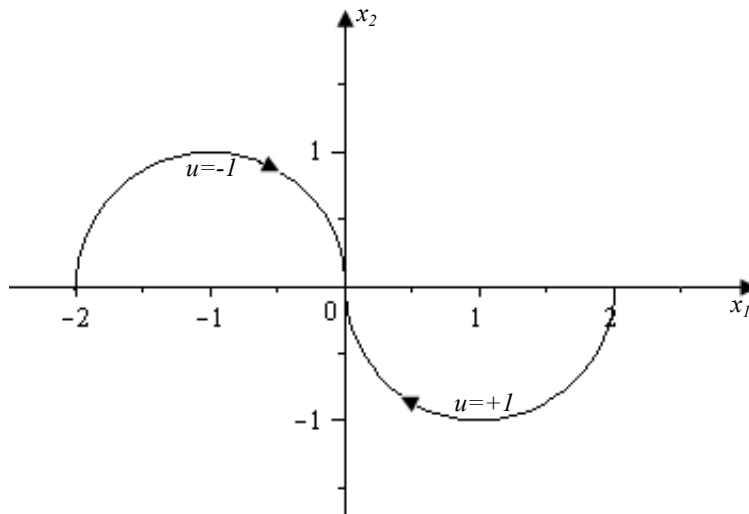


Рис. 5.6 — Траектории без переключений, ведущие в точку $(0, 0)$

Время движения по каждой из полуокружностей в точности равно π , поэтому окружности не продолжают за точки $(-2, 0)$ и $(0, 2)$, так как время между переключениями не превышает π .

Кривая переключений: $\Gamma = \bigcup_{n=1}^{\infty} (\Gamma_n^+ \cup \Gamma_n^-)$, где

$$\Gamma_n^+ = \left\{ (x_1, x_2) : (x_1 - 2n + 1)^2 + x_2^2 = 1, x_2 \leq 0 \right\},$$

$$\Gamma_n^- = \left\{ (x_1, x_2) : (x_1 + 2n - 1)^2 + x_2^2 = 1, x_2 \geq 0 \right\}.$$

Подробное рассмотрение этого примера содержится в книге [1], с. 34.

Определение 5.3. Оптимальное управление $u(t)$, определяемое в виде функции фазового вектора $u(t) = \tilde{u}(x(t))$, называется *оптимальным синтезом*.

Определение 5.4. Пусть U — выпуклый многогранник в \mathbb{R}^m . *Релейным управлением* называется управление $u : [0, T] \rightarrow U$ следующего вида:

$$u(t) = u_k \text{ при } \tau_{k-1} \leq t < \tau_k, k = \overline{1, n},$$

когда $0 = \tau_0 < \tau_1 < \dots < \tau_k < \dots < \tau_n = T, u_k \in \partial U$.

Замечание 5.1. В задаче оптимального по быстрдействию управления $h(p, x, u)$ — линейная по u функция, то есть для всех $t \geq 0$,

$$\max_{u \in U} h(p(t), x(t), u)$$

достигается при $u \in \partial U$, следовательно, оптимальное управление всегда является релейным для задачи оптимального быстродействия.

5.4 Принцип динамического программирования Беллмана

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений:

$$\dot{x} = f(x, u), x \in E \subseteq \mathbb{R}^n, u \in U \subseteq \mathbb{R}^m, \quad (5.27)$$

где E — некоторая область, $f \in C^1(E \times U)$.

Обозначим $x(t, x_0, u)$ — решение задачи Коши для уравнения (5.27) с допустимым управлением u , $x|_{t=0} = x_0$. Предположим, что задан функционал

$$\mathcal{J}_T(x_0, u) = \int_0^T g(x(t, x_0, u), u(t)) dt + G(x(T, x_0, u)), \quad (5.28)$$

где $g(x, u) \geq 0, g, G$ — непрерывные функции.

Задача оптимального управления: [10] Для заданных начального состояния $x_0 \in E$, множества $M \subseteq E$, времени $T > 0$, найти допустимое управление $\tilde{u} : [0, T] \rightarrow U$, удовлетворяющее следующим условиям:

1) $x(t, x_0, \tilde{u}) \in E, \forall t \in [0, T]$;

2) $x(T, x_0, \tilde{u}) \in M$;

3) $\mathcal{J}_T(x_0, \tilde{u}) \leq \mathcal{J}_T(x_0, u)$ для любого допустимого $u : [0, T] \rightarrow U$, удовлетворяющего условиям 1) и 2).

Теорема 5.5 (Принцип динамического программирования Беллмана). Если $\tilde{u} : [0, T] \rightarrow U$ — оптимальное управление для задачи (5.27), (5.28) с начальным условием $x_0 \in E$, то для любого $\tau \in [0, T]$ управление $\hat{u}(t) = \tilde{u}(t - \tau), t \in [0, T - \tau]$ является оптимальным для системы (5.27) с начальным состоянием $\hat{x}_0 = x(\tau, x_0, \hat{u})$ и функционалом $\mathcal{J}_{T-\tau}(\hat{x}_0, u)$.

Доказательство проведем методом от противного. Пусть существует $\tau \in [0, T]$ и $\bar{u} : [0, T - \tau] \rightarrow U$, для которых

$$\mathcal{J}(\hat{x}_0, \hat{u}) > \mathcal{J}(\hat{x}_0, \bar{u}), \quad (5.29)$$

то есть \hat{u} не оптимально на $[0, T - \tau]$. Тогда определим управление

$$u(t) = \begin{cases} \tilde{u}(t), & 0 \leq t \leq \tau, \\ \bar{u}(t - \tau), & \tau \leq t \leq T. \end{cases}$$

Запишем значения $\mathcal{J}_T(x_0, u)$ и $\mathcal{J}_T(x_0, \tilde{u})$:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_T(x_0, \tilde{u}) &= \int_0^\tau g(x(t, x_0, \tilde{u}), \tilde{u}(t)) dt + \int_0^{T-\tau} g(x(s, \hat{x}_0, \hat{u}), \hat{u}(s)) ds + \\ &+ G(x(T - \tau, \hat{x}_0, \hat{u})) = \int_0^\tau g(x(t, x_0, \tilde{u}), \tilde{u}(t)) dt + \mathcal{J}_{T-\tau}(\hat{x}_0, \hat{u}). \end{aligned}$$

Аналогично,

$$\mathcal{J}_T(x_0, u) = \int_0^\tau g(x(t, x_0, \tilde{u}), \tilde{u}(t)) dt + \mathcal{J}_{T-\tau}(\hat{x}_0, \bar{u}).$$

Тогда из предположения (5.29) следует, что $\mathcal{J}_T(x_0, \tilde{u}) > \mathcal{J}_T(x_0, u)$, что противоречит оптимальности $\hat{u}(t)$. \square

5.5 Вывод уравнений Беллмана

Предположим, что задача оптимального управления для системы (5.27) с функционалом (5.28) имеет решение при всех $(T, x_0) : T > 0, x_0 \in E$. Тогда определим функцию Беллмана:

$$W(T, x_0) = \inf \mathcal{J}_T(x_0, u), \quad (5.30)$$

где $x(t, x_0, u) \in M, u : [0, T] \rightarrow U$ — допустимое управление.

Для $v \in V$ определим функцию $z_v(t), t \geq 0$ как решение задачи Коши:

$$z_v(0) = x_0, \dot{z}_v(t) = f(z_v(t), v).$$

Пусть $\tilde{u}_\xi : [0, T] \rightarrow U$ — оптимальное управление для задачи (5.27), (5.28) с начальным условием $x|_{t=0} = \xi$. Введём функцию управления

$$u_v : [0, T+h] \rightarrow U, \quad u_v(t) = \begin{cases} v, & t \in [0, h], \\ \tilde{u}_{z_v(h)}(t-h), & t > h. \end{cases}$$

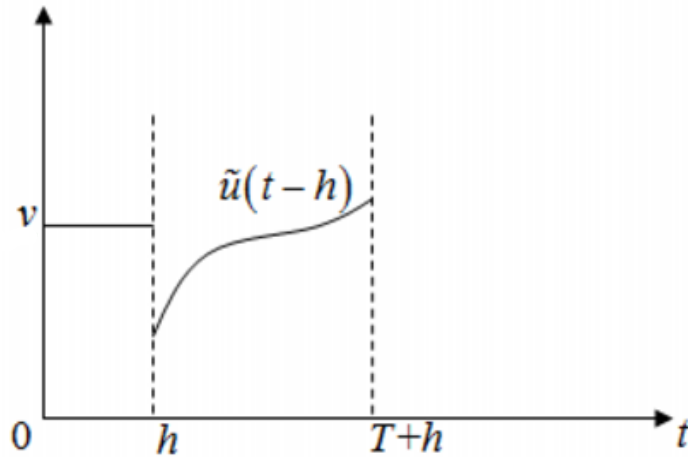


Рис. 5.7 — График функции $u_v(t)$

Рассмотрим $\mathcal{J}_{T+h}(x_0, u_v)$:

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{T+h}(x_0, u_v) &= \int_0^h g(z_v(t), v) dt + \int_h^{T+h} g(z_v(t), v) dt + G|_{t=T+h} = \\ &= \int_0^h g(z_v(t), v) dt + W(T, z_v(h)) \end{aligned} \quad (5.31)$$

Используя принцип Беллмана для $\tau = h$ и теорему о среднем для

$$\int_0^h g(x(t), u(t)) dt,$$

из (5.31) получаем:

$$W(T+h, x_0) = \inf \mathcal{J}_{T+h}(\xi_0, u) = \inf \mathcal{J}_{T+h}(x_0, u_v) + \bar{o}(h) \quad (5.32)$$

Из формул (5.32), (5.31) следует:

$$\begin{aligned} & \frac{W(T+h, x_0) - W(T, x_0)}{h} = \\ & = \frac{\inf_v \left(\int_0^h g(z_v(t), v) dt + W(T, z_v(h)) - W(T, x_0) \right)}{h} + \bar{o}(h) \end{aligned} \quad (5.33)$$

Воспользуемся разложением в ряд Тейлора:

$$z_v(h) = x_0 + f(x_0, v)h + \bar{o}(h),$$

$$\int_0^h g(z_v(t), v) dt = hg(x_0, v) + \bar{o}(h) \text{ при } h \rightarrow 0.$$

Переходя к пределу в (5.33) при $h \rightarrow 0$ получим:

$$\frac{\partial W}{\partial T} = \inf_{v \in U} \left\{ g(x_0, v) + \left\langle \frac{\partial W}{\partial x}, f(x_0, v) \right\rangle \right\}.$$

Получено уравнение Беллмана:

$$\frac{\partial W(t, x)}{\partial t} = \inf_{u \in U} \left\{ g(x, u) + \left\langle \frac{\partial W}{\partial x}, f(x, u) \right\rangle \right\} \quad (5.34)$$

Теорема 5.6. *Предположим, что $W \in C^1([0, T] \times E)$ — решение дифференциального уравнения*

$$\frac{\partial W(t, x)}{\partial t} = \inf_{u \in U} \left\{ g(x, u) + \left\langle \frac{\partial W}{\partial x}, f(x, u) \right\rangle \right\}, \quad (t, x) \in [0, T] \times E,$$

с граничными условиями

$$W(0, x) = G(x), \quad x \in E \quad (5.35)$$

Тогда:

1) если $u \in L_\infty [0, T] \rightarrow U, x(t, x_0, u) \in E, \forall t \in [0, T]$, то

$$\mathcal{J}_T(x_0, u) \geq W(T, x) \quad (5.36)$$

2) если существует функция $\hat{v} : [0, T] \times E \rightarrow U$ такая, что

$$g(x, \hat{v}(t, x)) + \langle W_x(t, x), f(x, \hat{v}(t, x)) \rangle \leq g(x, u) + \langle W_x(t, x), f(x, u) \rangle, \quad (5.37)$$

где $t \in (0, T), x \in E, u \in V$, и $\hat{x}(t) \in E$ — решение задачи Коши:

$$\frac{d}{dt} \hat{x}(t) = f(\hat{x}(t), \hat{v}(T-t, \hat{x}(t))), \hat{x}(0) = x_0, t \in [0, T], \quad (5.38)$$

то $\hat{u}(t) = \hat{v}(T-t, \hat{x}(t))$ — оптимальное управление для задачи (5.27), (5.28), при этом

$$\mathcal{J}_T(x_0, \hat{u}) = W(x_0, T).$$

Доказательство. 1) обозначим $w(t) = W(T-t, x(t, x_0, u)), t \in [0, T]$.

Тогда

$$\dot{w}(t) = -W_t(T-t, x(t, x_0, u)) + \langle W_x(T-t, x), f(x, u(t)) \rangle.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} w(T) - w(0) &= \int_0^T \dot{w}(t) dt = \int_0^T \{-W_t(T-t, x) + \langle W_x(T-t, x), f(x, u(t)) \rangle + \\ &g(x, u(t)) - g(x, u(t))\} dt \geq \{ \text{из уравнения Беллмана (5.34)} \} \geq \\ &\geq - \int_0^T f(x(t, x_0, u), u(t)) dt \end{aligned} \quad (5.39)$$

С другой стороны,

$$w(T) - w(0) = W(0, x(T, x_0, u)) - W(T, x_0) = G(x(T, x_0, u)) - W(T, x_0) \quad (5.40)$$

Из (5.39), (5.40) следует:

$$\begin{aligned} G(x(T, x_0, u)) + \int_0^T g(x(t, x_0, u), u(t)) dt &= \mathcal{J}_T(x_0, u) \geq w(T) - w(0) + \\ + W(T, x) + v(0) - v(T) &= W(t, x), \end{aligned}$$

то есть $\mathcal{J}_T(x_0 u) \geq W(T, x)$.

2) пусть $u = \hat{u}(t)$. Применим формулу вида (5.39) для $\hat{x}(t) = x(t, x_0, \hat{u})$:

$$\begin{aligned} w(T) - w(0) &= G(\hat{x}(T)) - W(T, x_0) = \int_0^T \dot{w}(t) dt = \\ &= \int_0^T \{-W_t(T-t, x(t)) + \langle W_x(T-t, \hat{x}(t)), f(\hat{x}(t), \hat{u}(t)) \rangle + \\ &+ g(\hat{x}(t), \hat{u}(t)) - g(\hat{x}(t), \hat{u}(t))\} dt = \{ \text{применяем формулу (5.37)} \} = \\ &= - \int_0^T g(\hat{x}(t), \hat{u}(t)) dt. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_T(x_0, \hat{u}) &= \int_0^T g(\hat{x}(t), \hat{u}(t)) dt + G(\hat{x}(T)) = W(T, x_0) - \\ &- G(\hat{x}(T)) + G(\hat{x}(T)) = W(T, x_0), \end{aligned}$$

что и доказывает оптимальность $\hat{u}(t)$. \square

5.6 Задача о линейном регуляторе

Пусть в задаче оптимального управления $M = E = \mathbb{R}^n$, $U = \mathbb{R}^m$, а система дифференциальных уравнений является линейной:

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m, \quad (5.41)$$

при этом функционал $\mathcal{J}_T(x_0, u)$ квадратичен:

$$\mathcal{J}_T(x_0, u) = \int_0^T \{\langle Qx(t), x(t) \rangle + \langle Ru(t), u(t) \rangle\} dt + \langle P_0x(T), x(T) \rangle \rightarrow \min \quad (5.42)$$

Предполагается, что матрицы Q, R, P_0 — симметричны, R — матрица положительно определенной квадратичной формы, Q, P_0 — матрицы неотрицательно определенных квадратичных форм.

Задача оптимального управления (5.41), (5.42) называется *задачей о линейном регуляторе*.

Теорема 5.7. Рассмотрим матричное уравнение Риккати:

$$\dot{P} = Q + PA + A^*P - PBR^{-1}B^*P, \quad P(0) = P_0, \quad (5.43)$$

с неизвестной $n \times n$ -матрицей $P(t)$, $t \in [0, T]$.

Существует единственная $P(t)$ — симметричная неотрицательно определенная матрица, удовлетворяющая (5.43), при этом решение задачи (5.41), (5.42) представимо в виде:

$$\hat{u}(t) = -R^{-1}B^*P(T-t)\hat{x}(t), \quad t \in [0, T], \quad (5.44)$$

где $\hat{x}(t)$ — решение задачи Коши:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\hat{x}(t) &= (A - BR^{-1}B^*P(T-t))\hat{x}(t), \quad t \in [0, T], \\ \hat{x}(0) &= x_0 \in \mathbb{R}^n \end{aligned} \quad (5.45)$$

(Здесь $u = \hat{u}(t)$ — оптимальное управление, $x = \hat{x}(t)$ — оптимальная траектория).

Доказательство. Рассмотрим функцию Беллмана вида

$$W(t, x) = \langle P(t)x, x \rangle$$

и покажем, что $W(t, x)$ удовлетворяет условиям теоремы 5.6.

Подставим $\langle P(t)x, x \rangle$ в уравнение Беллмана (5.34):

$$\left\langle \dot{P}x, x \right\rangle = \inf_{u \in \mathbb{R}^m} \{ \langle Qx, x \rangle + \langle Ru, u \rangle + 2 \langle Px, Ax + Bu \rangle \}, \quad (5.46)$$

здесь $2P_x = \frac{\partial W}{\partial x}$.

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial x_i} &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\sum_{k,j=1}^n p_{kj}(t) x_k x_j \right) = \sum_{k,j=1}^n p_{kj} \frac{\partial}{\partial x_i} (x_k x_j) = \sum_{j=1}^n p_{ij} x_j + \\ &+ \sum_{k=1}^n p_{ki} x_k = \sum_{j=1}^n (p_{ij} + p_{ji}) x_j = 2 \sum_{j=1}^n p_{ij} x_j = 2(Px)_i \end{aligned}$$

для симметричной матрицы P . Перепишем (5.46) в виде:

$$\left\langle \dot{P}x, x \right\rangle = \langle Qx, x \rangle + 2 \langle Px, Ax \rangle + \inf_u \psi_x(u),$$

где $\psi_x(u) = \langle Ru, u \rangle + 2 \langle Px, Bu \rangle$.

По условию теоремы, R — положительно определенная матрица, следовательно, квадратичная функция $\psi_x(u)$ имеет единственный минимум для всех $x \in \mathbb{R}^n$.

Найдем критические точки функции $\psi_k(u)$ из условия $\frac{\partial \psi_x}{\partial u} = 0$:

$$\frac{\partial \psi_x}{\partial u} = 2Ru + 2 \frac{\partial}{\partial u} \langle B^* Px, u \rangle = 2(Ru + B^* Px) = 0.$$

Отсюда получаем:

$$u = -R^{-1}B^*Px, \quad (5.47)$$

где матрица R_{-1} существует в силу положительной определенности матрицы R .

Таким образом, u в (5.47) реализует минимум $\psi_x(u)$. Тогда уравнение Беллмана примет вид:

$$\langle \dot{P}x, x \rangle = \langle Qx, x \rangle + 2 \langle Px, Ax \rangle + \langle B^* Px, R^{-1}B^* Px \rangle - 2 \langle Px, BR^{-1}B^* Px \rangle \quad (5.48)$$

Слагаемое $2 \langle Px, Ax \rangle$ можно записать как

$$2 \langle Px, Ax \rangle = 2 \langle x, PAx \rangle = \langle x, (PA + A^*P)x \rangle.$$

Перепишем (5.48) в виде квадратичной формы по x с симметричной матрицей в левой части:

$$\begin{aligned} \langle \dot{P}x, x \rangle &= \langle Qx, x \rangle + \langle (PA + A^*P)x, x \rangle + \langle Px, BR^{-1}B^*Px \rangle - \\ &- 2 \langle Px, BR^{-1}B^*Px \rangle = \langle (Q + PA + A^*P - PBR^{-1}B^*P)x, x \rangle \end{aligned} \quad (5.49)$$

Приравнивая коэффициенты квадратичной формы (5.49) по x , получим уравнение (5.43) на $P(t)$. Граничное условие $P(0) = P_0$ соответствует условию $W(0, x) = \langle P_0x, x \rangle$ (то есть выполнено (5.35)). Тогда функция $\hat{v}(t, x) = -R^{-1}B^*Px$ удовлетворяет условию из второй части теоремы 5.6, а значит $\hat{u}(t) = -R^{-1}B^*P(T-t)\hat{x}(t)$ — оптимальное управление для задачи (5.41), (5.42) по теореме 5.6. \square

Пример 5.3. Пусть

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = u, \end{cases} \quad x_0 = x(0) = \begin{pmatrix} x_1^0 \\ x_2^0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, \quad (5.50)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_T(x_0 u) &= \int_0^T (x_1^2(t) + x_2^2(t) + u^2(t)) dt + \sqrt{3} (x_1^2(T) + x_2^2(T)) + \\ &2x_1(T)x_2(T) \rightarrow \min \end{aligned} \quad (5.51)$$

Решить задачу линейного регулятора (5.50), (5.51).

В данном примере

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, R = 1, P_0 = \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \dot{P} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{pmatrix} - \\ &- \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & p_1 \\ 0 & p_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ p_1 & p_2 \end{pmatrix} - \\ &- \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 & p_2 \\ p_2 & p_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & p_1 \\ 0 & p_2 + 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ p_1 & p_2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} p_2^2 & p_2 p_3 \\ p_2 p_3 & p_3^2 \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 1 - p_2^2 & p_1 - p_2 p_3 \\ -p_2 p_3 + p_1 & 2p_2 + 1 - p_3^2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Таким образом, получаем следующую систему:

$$\begin{cases} \dot{p}_1 = 1 - p_2^2, & p_1(0) = \sqrt{3}, \\ \dot{p}_2 = p_1 - p_2 p_3, & p_2(0) = 1, \\ \dot{p}_3 = 1 + 2p_2 - p_3^2, & p_3(0) = \sqrt{3}. \end{cases}$$

Частное решение системы:

$$\begin{aligned} p_1 &= \sqrt{3}, \\ p_2 &= 1, \\ p_3 &= \sqrt{3}. \end{aligned}$$

Составим уравнение на $\hat{x}(t)$:

$$A - BR^{-1}B^*P = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -\sqrt{3} \end{pmatrix},$$

$$\begin{cases} \dot{\hat{x}}_1 = \hat{x}_2, \\ \dot{\hat{x}}_2 = -\hat{x}_1 - \sqrt{3}\hat{x}_2, \\ \hat{x}_1(0) = \hat{x}_1^0, \hat{x}_2(0) = \hat{x}_2^0. \end{cases}$$

Решая полученную систему дифференциальных уравнений, находим оптимальную траекторию:

$$\begin{aligned} \hat{x}_1(t) &= e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}t} \left(\hat{x}_1^0 \cos \frac{t}{2} + (2\hat{x}_2^0 + \sqrt{3}\hat{x}_1^0) \sin \frac{t}{2} \right), \\ \hat{x}_2(t) &= e^{-\frac{\sqrt{3}}{2}t} \left(\hat{x}_2^0 \cos \frac{t}{2} - (2\hat{x}_1^0 + \sqrt{3}\hat{x}_2^0) \sin \frac{t}{2} \right). \end{aligned}$$

Оптимальное управление:

$$\begin{aligned} \hat{u}(t) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{x}_1(t) \\ \hat{x}_2(t) \end{pmatrix} = \\ &= e^{\frac{\sqrt{3}}{2}t} \left((\hat{x}_2^0 + \sqrt{3}\hat{x}_1^0) \sin \frac{t}{2} - (\hat{x}_1^0 + \sqrt{3}\hat{x}_2^0) \cos \frac{t}{2} \right). \end{aligned}$$

5.7 Линейный регулятор на бесконечном промежутке

Рассмотрим задачу оптимального управления

$$\dot{x} = Ax + Bu, \quad x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m, \quad (5.52)$$

$$x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n,$$

$$\mathcal{J}(x_0, u) = \int_0^{\infty} \{ \langle Qx(t), x(t) \rangle + \langle Ru(t), u(t) \rangle \} dt + \langle P_0x(T), x(T) \rangle \rightarrow \min \quad (5.53)$$

Предположим, что Q — симметричная неотрицательно определенная матрица, R — симметричная положительно определенная матрица. Рассмотрим алгебраическое уравнение Риккати:

$$Q + PA + A^*P - PBR^{-1}B^*P = 0, \quad (5.54)$$

где $P \in \text{mat}(n \times n)$ — неизвестная симметричная неотрицательно определенная матрица.

Определение 5.5. Решение \tilde{P} уравнения (5.54) называется *минимальным*, если

$$\langle \tilde{P}x, x \rangle \leq \langle Px, x \rangle, \forall x \in \mathbb{R}^n,$$

для любого P — решения уравнения (5.54).

Теорема 5.8. Если существует неотрицательно определенная симметричная матрица P , являющаяся решением уравнения (5.54), то существует и единственно минимальное решение \tilde{P} уравнения (5.54), при этом управление

$$\tilde{u}(t) = -R^{-1}B^*\tilde{P}x(t), \quad t \geq 0 \quad (5.55)$$

решает задачу (5.52), (5.53); кроме того,

$$\inf_{u \in U} \mathcal{J}(x_0, u) = \langle \tilde{P}x_0, x_0 \rangle.$$

Доказательство. Пусть $P_i(t)$, $i = 1, 2$, — решения дифференциального уравнения Риккати:

$$\dot{P}_i = Q + P_iA + A^*P_i - P_iBR^{-1}B^*P_i \quad (5.56)$$

Докажем, что если $\langle P_1(0)x, x \rangle \leq \langle P_2(0)x, x \rangle$, то

$$\langle P_1(t)x, x \rangle \leq \langle P_2(t)x, x \rangle, \forall t \geq 0 \quad (5.57)$$

Для этого рассмотрим формулы при $i = 1, 2$:

$$\mathcal{J}_t^i(x_0, u) = \int_0^t \{ \langle Qx(s), x(s) \rangle + \langle Pu(s), u(s) \rangle \} ds + \langle P_i(0)x(t), x(t) \rangle.$$

Если $\langle P_1(0)x, x \rangle \leq \langle P_2(0)x, x \rangle$, $\forall x$, то $\mathcal{J}_t^1(x_0, u) \leq \mathcal{J}_t^2(x_0, u)$, $\forall x_0, \forall u$.

Тогда

$$\inf_u \mathcal{J}_t^1(x_0, u) \leq \inf_u \mathcal{J}_t^2(x_0, u) \quad (5.58)$$

По теореме 5.7, $\inf_u \mathcal{J}_t^i(x_0, u) = \langle P_i(t)x_0, x_0 \rangle$, что вместе с неравенством (5.58) доказывает (5.57).

Положим $P_1(t)$ — решение уравнения (5.56) с начальным условием $P_1(0) = 0$; $P_2(t) \equiv P$ — решение уравнения (5.57).

По формуле (5.57), $0 \leq \langle P_1(t)x_0, x_0 \rangle \leq \langle Px_0, x_0 \rangle$; по построению функционала $\mathcal{J}_t^1(x_0, u) : \langle Px_0, x_0 \rangle$ — монотонно неубывает по $t \geq 0$. Следовательно, существует $\lim_{t \rightarrow +\infty} \langle P_1(t)x_0, x_0 \rangle = \langle \tilde{P}x_0, x_0 \rangle$, при этом

$$\langle \tilde{P}x_0, x_0 \rangle \leq \langle P_1x_0, x_0 \rangle, \forall x_0 \in \mathbb{R}^n,$$

то есть \tilde{P} — минимальное решение алгебраического уравнения Риккати (5.54), так как $\lim_{t \rightarrow +\infty} P_1(t) = 0$.

Пусть $\tilde{u}(t)$ задано формулой (5.55), тогда по теореме 5.7:

$$\langle \tilde{P}x_0, x_0 \rangle = \int_0^T \{ \langle Qx(s), x(s) \rangle + \langle R\tilde{u}(s), \tilde{u}(s) \rangle \} ds + \langle \tilde{P}x(T), x(T) \rangle,$$

то есть

$$\int_0^T \{ \langle Qx(s), x(s) \rangle + \langle R\tilde{u}(s), \tilde{u}(s) \rangle \} ds \leq \langle \tilde{P}x_0, x_0 \rangle.$$

Отсюда при $T \rightarrow \infty$ получаем:

$$\mathcal{J}(x_0, \tilde{u}) \leq \langle \tilde{P}x_0, x_0 \rangle \quad (5.59)$$

С другой стороны,

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_T^1(x_0, \tilde{u}) &= \int_0^T \{ \langle Qx(s), x(s) \rangle + \langle R\tilde{u}(s), \tilde{u}(s) \rangle \} ds \geq \langle P_1(T)x_0, x_0 \rangle, \\ \mathcal{J}(x_0, u) &= \int_0^{+\infty} \{ \langle Qx(s), x(s) \rangle + \langle Ru(s), u(s) \rangle \} ds \geq \mathcal{J}_1(x_0, \tilde{u}) \geq \\ &\geq \lim_{T \rightarrow +\infty} \langle P_1(T)x_0, x_0 \rangle = \langle \tilde{P}x_0, x_0 \rangle \end{aligned} \quad (5.60)$$

Из (5.59), (5.60) следует, что $\mathcal{J}(x_0, u) = \langle \tilde{P}x_0, x_0 \rangle$, то есть \tilde{u} — оптимальное управление, поскольку \tilde{P} — минимальное решение. \square

5.8 Линейный регулятор и стабилизация

Определение 5.6. Пара матриц $A \in \text{mat}(n \times n)$, $C \in \text{mat}(p \times n)$ называется *детектируемой*, если существует матрица $L \in \text{mat}(n \times p)$, с которой матрица $A + LC$ гурвицева.

Теорема 5.9. 1) если система (5.52) стабилизируема, то уравнение Риккати (5.54) имеет решение;

2) если $Q = C^*C$ и пара (A, C) детектируема, то уравнение (5.54) имеет не более одного решения; если P — решение уравнения (5.54), то управление

$$\tilde{u}(t) = -R^{-1}B^*P$$

решает задачу стабилизации системы (5.52).

Теорема 5.10. Если система

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + Bu, x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^m \\ y = Cx, y \in \mathbb{R}^p \end{cases} \quad (\Sigma)$$

управляема и наблюдаема, $Q = C^*C$, то существует единственное решение P уравнения (5.54). При этом управление

$$\tilde{u}(t) = -R^{-1}B^*Px(t)$$

решает задачу стабилизации системы (Σ) , т.е. матрица $A - BR^{-1}B^*P$ — гурвицева.

Пример 5.4. Решить задачу о линейном регуляторе:

$$\dot{x} = u, \quad x \in \mathbb{R}^1, u \in \mathbb{R}^1, \quad (5.61)$$

$$\mathcal{J}_T(x_0, u) = \int_0^T (x^2 + u^2) dt + kx^2(T) \rightarrow \min \quad (5.62)$$

при заданном $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}$, $k = \text{const} > 0$.

Воспользуемся теоремой 5.7:

$$Q = 1, R = 1, A = 0, B = 1,$$

$$\dot{P} = 1 - P^2,$$

$$P = 1 - \frac{2}{1 + e^{2t} \left| \frac{1+k}{1-k} \right|}.$$

Отсюда получаем оптимальное управление:

$$\hat{u}(t) = -1 + \frac{2}{1 + e^{2(T-t)} \left| \frac{1+k}{1-k} \right|} x(t).$$

Пример 5.5. Решить задачу о линейном регуляторе:

$$\dot{x} = x + u, \quad x \in \mathbb{R}^1, u \in \mathbb{R}^1,$$

$$\mathcal{J}_T(x_0, u) = \int_0^T (x^2 + 2u^2) dt + kx^2(T) \rightarrow \min,$$

при заданном $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}, k = \text{const} > 0$.

Здесь

$$A = 1, B = 1, Q = 1, R = 2, P_0 = k,$$

$$\dot{P} = 1 + 2P - \frac{1}{2}P^2,$$

$$P = 2 - \sqrt{6} - 2\sqrt{6}e^{\sqrt{6}t} \left| \frac{k-2+\sqrt{6}}{k-2-\sqrt{6}} \right|,$$

$$\hat{u}(t) = -\frac{1}{2} \left(2 - \sqrt{6} - 2\sqrt{6}e^{\sqrt{6}t} \left| \frac{k-2+\sqrt{6}}{k-2-\sqrt{6}} \right| \right) x(t).$$

5.9 Контрольные вопросы

1. Сколько дифференциальных уравнений содержит гамильтонова система в формулировке принципа максимума Понтрягина?
2. Верно, ли что оптимальное по быстродействию управление в линейных системах является кусочно-постоянной функцией?
3. Необходимо ли решать дифференциальное уравнение Риккати для задачи о линейном регуляторе на промежутке $t \in [0, +\infty)$?
4. Необходимо ли решать алгебраическое уравнение Риккати для задачи о линейном регуляторе на промежутке $t \in [0, +\infty)$?

5. При каких условиях на функционал качества можно гарантировать существование и единственность решения задачи о линейном регуляторе для управляемой и наблюдаемой системы?

5.10 Творческие задания

Задание 1. (*Оптимальное распределение капитальных вложений*). Применяя рассуждения, аналогичные проведенным в разделе 5.2, решить задачу об оптимальном распределении капитальных вложений (1.1)–(1.3).

Задание 2. (*Оптимальный разворот машины Дубинса*). Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \cos \theta, \\ \dot{x}_2 = \sin \theta, \\ \dot{\theta} = u, \quad u \in [-1, 1] \end{cases} \quad (5.63)$$

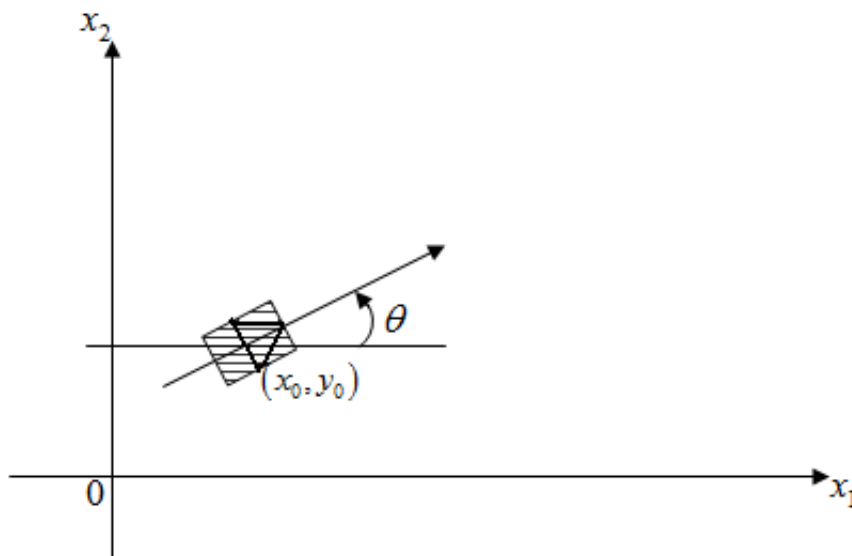


Рис. 5.8 — Машина Дубинса

Приведенная система описывает движение «машины Дубинса» [13] по плоскости (x_1, x_2) (см. рис. 5.8). В этой модели переменные x_1 и x_2 обозначают координаты середины задней оси машины, θ — угол между продольной осью машины и осью Ox_1 . Управление u соответствует возможности поворота машины влево ($u > 0$) или вправо ($u < 0$).

Требуется найти функцию управления $u(t)$, $t \in [0, \tau]$, которая переводит систему (5.63) из начальной точки $x_1 = x_0$, $x_2 = y_0$, $\theta = 0$ в конечную точку $x_1 = x_2 = 0$, $\theta = \pi$ за минимальное время τ .

Задание 3. (*Затухающий гармонический осциллятор*). Пусть

$$\dot{x}_1 = x_2, \quad \dot{x}_2 = -x_1 - \kappa x_2 + u, \quad u \in [-1, 1], \quad (5.64)$$

где $\kappa = \text{const} > 0$.

Найти управление $u(t)$, $t \in [0, \tau]$, переводящее систему (5.64) из начального состояния $(x_1, x_2) = (x_1^0, x_2^0)$ в конечное $(x_1, x_2) = (0, 0)$ за минимальное время τ .

6 Элементы геометрической теории нелинейных систем

Рассмотрим нелинейную систему дифференциальных уравнений:

$$\dot{x} = f(x, u), \quad x \in D \subseteq \mathbb{R}^n, \quad u \in U \subseteq \mathbb{R}^m, \quad (6.1)$$

где D — область, x — состояние (фазовый вектор), u — управление. Обозначим $f_u(x) = f(x, u)$. Будем предполагать, что $f_u(x) \in C^\infty(D)$, $\forall u \in U$ то есть $f_u(x) : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ — гладкое векторное поле в D .

Определение 6.1. Система (6.1) называется *управляемой* в классе кусочно-постоянных управлений, если для всех $x_0, x_1 \in D$ существуют $T > 0$ и кусочно-постоянная функция $u : [0, T] \rightarrow U$, при которой система

$$\dot{x}(t) = f(x(t), u(t))$$

имеет решение $x(t)$ такое, что $x(0) = x_0$, $x(T) = x_1$, $x(t) \in D$, $\forall t \in [0, T]$.

6.1 Ранговое условие достижимости

Для формулировки условий управляемости введем понятие *скобки Ли* векторных полей.

Определение 6.2. Пусть $g, h : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ — векторные поля в D . Скобкой Ли векторных полей $g, h \in C^1(D)$ называется векторное поле

$$[g, h] = \frac{\partial h}{\partial x} g - \frac{\partial g}{\partial x} h,$$

где $\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial g}{\partial x}$ — матрицы Якоби.

Скобки Ли удовлетворяют следующим свойствам:

- 1) $[g, h] = -[h, g]$ (*антисимметричность*);
- 2) $[f, [g, h]] + [g, [h, f]] + [h, [f, g]] = 0$ (*тождество Якоби*).

Определение 6.3. Алгеброй Ли системы (6.1) называется минимальное линейное пространство векторных полей $Lie \{f_u\}$, которое содержит все f_u и замкнуто относительно операции $[\cdot, \cdot]$, то есть выполнены следующие свойства:

- 1) $Lie \{f_u\} = f_u, \forall u \in U$;
- 2) если $g \in Lie \{f_u\}, h \in Lie \{f_u\}$, то $[g, h] \in Lie \{f_u\}$;
- 3) $Lie \{f_u\}$ — линейное пространство над \mathbb{R} , то есть если $g \in Lie \{f_u\}, h \in Lie \{f_u\}$, то $\alpha g + \beta h \in Lie \{f_u\}, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Определение 6.4. [12, 14, 15] Система (6.1) удовлетворяет *ранговому условию достижимости* в точке $x_0 \in D$, если $\dim L(x_0) = n$, где

$$L(x_0) = \{g(x_0) : g \in Lie \{f_u\}\}.$$

Определение 6.5. Система (6.1) называется *симметричной по времени*, если для любого управления $u \in U$ существует управление $v \in U$ такое, что $f(x, u) = -f(x, v), \forall x \in D$.

Определение 6.6. Векторное поле $g : D \rightarrow \mathbb{R}^n$ называется *полным* в D , если все решения задачи Коши

$$\dot{x}(t) = g(x(t)), \quad x(0) = x_0 \in D,$$

можно доопределить для всех $t \in \mathbb{R}$.

Теорема 6.1 (Теорема Чжоу–Рашевского). *Предположим, что система (6.1) симметрична по времени. Если ранговое условие достижимости выполнено для всех $x_0 \in D$, то система (6.1) управляема.*

Пример 6.1 (Парковка машины). *Обозначим через (x_1, x_2) координаты центра задней оси машины, и пусть x_3 — угол между продольной осью машины и Ox_1 . Область D' для маневра машины на плоскости Ox_1x_2 ограничена соседними припарковавшимися машинами A и B , т.е. $D' = \mathbb{R}^2 \setminus (A \cup B)$.*

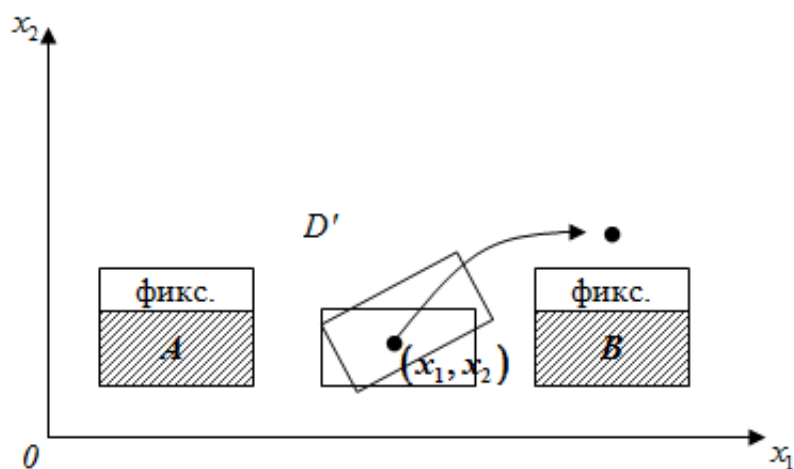


Рис. 6.1 — Иллюстрация задачи о парковке

Условие движения колес без проскальзывания дает следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = u_1 \cos x_3, \\ \dot{x}_2 = u_1 \sin x_3, \\ \dot{x}_3 = u_2, \end{cases} \quad (6.2)$$

где u_1 — управление скоростью ($u_1 > 0$ — движение вперед, $u_1 < 0$ — назад); u_2 — управление поворотом ($u_2 > 0$ — поворот влево, $u_2 < 0$ — вправо).

Таким образом, задача парковки является частным случаем задачи управляемости в области $D = D' \times \mathbb{R}$.

Для исследования управляемости системы (6.2) запишем ее в векторном виде:

$$\dot{x} = f(x, u) = u_1 f_1 + u_2 f_2, \quad (6.3)$$

$$\text{где } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}, f_1(x) = \begin{pmatrix} \cos x_3 \\ \sin x_3 \\ 0 \end{pmatrix}, f_2(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Вычислим скобку Ли:

$$[f_1, f_2] = \frac{\partial f_2}{\partial x} f_1 - \frac{\partial f_1}{\partial x} f_2 = - \begin{pmatrix} 0 & 0 & -\sin x_3 \\ 0 & 0 & \cos x_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin x_3 \\ -\cos x_3 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Поскольку $f_1 \in Lie\{f_u\}$, $f_2 \in Lie\{f_u\}$, $[f_1, f_2] \in Lie\{f_u\}$, то

$$L(x) \supseteq \{f_1(x), f_2(x), [f_1, f_2](x)\},$$

и для рангового условия достижимости достаточно, чтобы было выполнено

$$rank\{f_1(x), f_2(x), [f_1, f_2](x)\} = 3 (= n),$$

$$\begin{vmatrix} \cos x_3 & 0 & \sin x_3 \\ \sin x_3 & 0 & -\cos x_3 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \neq 0,$$

то есть ранговое условие достижимости выполнено.

Система (6.3) является симметричной по времени, так как если для произвольного $u = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ положим $v = \begin{pmatrix} -u_1 \\ -u_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$, то получим $f(x, u) = -f(x, v)$.

Таким образом, система (6.3) управляема по теореме Чжоу–Рашевского, то есть задача парковки имеет решение при любых (положительных) расстояниях между машинами. Движение по скобке Ли $[f_1, f_2]$ соответствует пределу малых движений вперед–влево–назад–вправо.

Пример 6.2. Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_1^2 - x_2^2, \\ \dot{x}_2 = 2x_1x_2 + u \end{cases} \quad (6.4)$$

Выполнено ли ранговое условие достижимости для системы (6.4) в точке $x = 0$?

Система (6.4) в векторном виде:

$$\dot{x} = f_0(x) + uf_1(x),$$

$$\text{где } x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2, f_0(x) = \begin{pmatrix} x_1^2 - x_2^2 \\ 2x_1x_2 \end{pmatrix}, f_1(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$[f_0, f_1] = \frac{\partial f_1}{\partial x} f_0 - \frac{\partial f_0}{\partial x} f_1 = - \begin{pmatrix} 2x_1 & -2x_2 \\ 2x_2 & 2x_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_2 \\ -2x_1 \end{pmatrix};$$

$f_0(0) = 0, [f_0, f_1](0) = 0$, поэтому для проверки недостаточно скобки первого порядка.

$$[[f_0, f_1], f_1] = \frac{\partial f_1}{\partial x} [f_0, f_1] - \frac{\partial [f_0, f_1]}{\partial x} f_1 = - \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\text{rank} \{f_1, [[f_0, f_1], f_1]\} = \text{rank} \begin{vmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = 2, \forall x \in \mathbb{R}^2, \text{ следовательно,}$$

$$\dim L(x) = 2 (= n),$$

то есть система (6.4) удовлетворяет ранговому условию достижимости.

6.2 Задача точной линеаризации

Рассмотрим частный случай нелинейной системы (6.1):

$$\dot{x} = f_0(x) + ug(x), \tag{6.5}$$

где $x \in \mathbb{R}^n, u \in \mathbb{R}^1, (f_0, g) \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ — гладкие векторные поля.

Определение 6.7. Система (6.5) *линеаризуема с обратной связью*, если существует диффеоморфизм $(x, u) \rightarrow (\tilde{x}, \tilde{u}), \tilde{x} = \varphi(x), \tilde{u} = \psi(x, u)$, который приводит систему (6.5) к линейной:

$$\dot{\tilde{x}} = A\tilde{x} + B\tilde{u},$$

где A — постоянная $n \times n$ -матрица, B — столбец.

Теорема 6.2 (Теорема Якубчика–Респондека). Система (6.5) линеаризуема в окрестности точки $x_0 \in \mathbb{R}^n$ только тогда, когда выполнены два условия:

- 1) $g(x), ad_{f_0}g(x), \dots, ad_{f_0}^{n-1}g(x)$ — линейно независимы при $x = x_0$;
- 2) $\forall i, j : 0 \leq i, j \leq n - 2$ существуют гладкие функции $\alpha_q^{ij}(x)$:

$$\left[ad_{f_0}^i g, ad_{f_0}^j g \right] = \sum_{q=0}^{n-2} \alpha_q^{ij} ad_{f_0}^q g(x).$$

Здесь $ad_{f_0}g = [f_0, g], ad_{f_0}^{m+1}g = [f_0, ad_{f_0}^m g], \dots$.

Пример 6.3. Пусть

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 + x_3^2 - 2u, \\ \dot{x}_3 = u \end{cases} \quad (6.6)$$

Линеаризуема ли система (6.6) в окрестности точки $x = 0$?

Проверим условия теоремы Якубчика–Респондека при $n = 3$:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3, f_0(x) = \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 + x_3^2 \\ 0 \end{pmatrix}, g(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix};$$

$$ad_{f_0}g = [f_0, g] = -\frac{\partial f_0}{\partial x}g = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -2x_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -2x_3 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$ad_{f_0}^2g = \left[f_0, \begin{pmatrix} 2 \\ -2x_3 \\ 0 \end{pmatrix} \right] =$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_2 \\ -x_1 + x_3^2 \\ 0 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2x_3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -2x_3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{vmatrix} 0 & 2 & 2x_3 \\ -2 & -2x_3 & 2 \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 4 + 4x_3^2,$$

следовательно, первое условие теоремы 6.2 выполнено. Проверим второе условие для индексов $0 \leq i, j \leq n - 2 = 1$. Достаточно рассмотреть случай $i = 0, j = 1$:

$$[ad_{f_0}^0 g, ad_{f_0}^1 g] = \left[g, \begin{pmatrix} 2 \\ -2x_3 \\ 0 \end{pmatrix} \right] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Условие 2) выполняется тогда и только тогда, когда

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \in \text{span} \{g, ad_{f_0} g\} = \text{span} \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -2x_3 \\ 0 \end{pmatrix} \right\},$$

то есть при условии совместности системы линейных уравнений

$$\begin{cases} 0 = 0 \cdot \alpha_1 + 2 \cdot \alpha_2, \\ -2 = -2 \cdot \alpha_1 - 2x_3 \cdot \alpha_2, \\ 0 = 1 \cdot \alpha_1 + 0 \cdot \alpha_2 \end{cases} \quad (6.7)$$

Из первого и третьего уравнений системы (6.7) следует, что $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$; тогда второе уравнение имеет вид $-2 = 0$, то есть система (6.7) несовместна и второе условие теоремы 6.2 не выполняется. Следовательно, система (6.6) не является линеаризуемой в окрестности точки $x = 0$.

6.3 Контрольные вопросы

1. Дать определение скобки Ли.
2. Дать определение алгебры Ли.
3. Сформулировать ранговое условие достижимости.
4. Верно ли, что всякая нелинейная система вида $\dot{x} = f(x, u)$ является симметричной по времени?

6.4 Творческие задания

Задание 1. При каких значениях параметров a_1, a_2, a_3 , система

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= a_1 x_2 x_3 + u, \\ \dot{x}_2 &= a_2 x_1 x_3, \\ \dot{x}_3 &= a_3 x_1 x_2, \quad x = (x_1, x_2, x_3)^* \in \mathbb{R}^3, \quad u \in \mathbb{R}, \end{aligned} \tag{6.8}$$

удовлетворяет ранговому условию достижимости в точке $x_1 = x_2 = x_3 = 0$?

Задание 2. Является ли система дифференциальных уравнений (6.8) линеаризуемой в окрестности точки $x_1 = x_2 = x_3 = 0$ в смысле определения 6.7?

7 Задания для самостоятельной работы

Задание 1. Исследовать на управляемость систему линейных дифференциальных уравнений с $x = (x_1, x_2, x_3, x_4)^* \in \mathbb{R}^4$, $u = (u_1, u_2)^* \in \mathbb{R}^2$:

1)

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= x_1 + 2x_2 - x_3 - u_1, \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + x_4 + u_1 + u_2, \\ \dot{x}_3 &= 5x_1 - 3x_2 - x_3 + x_4 + u_1 - 2u_2, \\ \dot{x}_4 &= -x_1 - x_2 - x_3 + x_4; \end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_2 + x_3 + x_4, \\ \dot{x}_2 &= 2x_1 - x_2 - x_3 - x_4 + 2u_1 + u_2, \\ \dot{x}_3 &= x_1 - x_2 + 3x_3 + 3x_4 + u_1 - u_2, \\ \dot{x}_4 &= -x_1 - 3x_2 + 2x_3 - x_4 - 2u_2; \end{aligned}$$

3)

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= -x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 - u_2, \\ \dot{x}_2 &= x_1 + x_3 + x_4 + 2u_1 + 2u_2, \\ \dot{x}_3 &= x_2 - x_3 - 5x_4 + u_2, \\ \dot{x}_4 &= 3x_1 + x_2 + x_3 - u_1 - 2u_2; \end{aligned}$$

4)

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1 + x_2 + x_3 + x_4, \\ \dot{x}_2 &= -x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + u_1 + 2u_2, \\ \dot{x}_3 &= -x_1 - x_2 - x_3 - x_4 + u_2, \\ \dot{x}_4 &= 2x_1 + x_2 + x_3 + 2x_4 - u_1 - 2u_2;\end{aligned}$$

5)

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 - u_2, \\ \dot{x}_2 &= x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + u_1 + u_2, \\ \dot{x}_3 &= -2x_1 - x_2 - x_3 + 2x_4 - u_2, \\ \dot{x}_4 &= x_2 + 3x_3 + x_4 - u_1 + 2u_2.\end{aligned}$$

6)

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 - x_3 + 2x_4 + u_1, \\ \dot{x}_2 &= 2x_1 + 2x_2 - 3x_3 + x_4 - u_1 + 2u_2, \\ \dot{x}_3 &= -2x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + u_2, \\ \dot{x}_4 &= 3x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 - u_1;\end{aligned}$$

7)

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + u_1 + u_2, \\ \dot{x}_2 &= 2x_2 + 3x_3 + x_4 - u_1 + 3u_2, \\ \dot{x}_3 &= 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 - 2u_2, \\ \dot{x}_4 &= 3x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 - u_1;\end{aligned}$$

8)

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_1 - x_2 + x_3 - x_4 + u_1 + u_2, \\ \dot{x}_2 &= x_2 - 3x_3 + x_4 + u_2, \\ \dot{x}_3 &= 2x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 - 2u_2, \\ \dot{x}_4 &= 4x_1 + x_2 + 3x_3 + x_4 + u_1;\end{aligned}$$

9)

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 - x_3 + x_4 + u_2, \\ \dot{x}_2 &= 2x_1 - 3x_3 - x_4 + u_1 - u_2, \\ \dot{x}_3 &= x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + 2u_2, \\ \dot{x}_4 &= x_1 - x_2 + 3x_3 - x_4 - u_1;\end{aligned}$$

10)

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= -x_2 + x_3 - x_4 + 2u_1 + u_2, \\ \dot{x}_2 &= x_1 - 3x_3 + x_4 + u_1, \\ \dot{x}_3 &= 3x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 - 2u_2, \\ \dot{x}_4 &= 4x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 - u_1;\end{aligned}$$

11)

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1 - x_2 + x_3 + u_1, \\ \dot{x}_2 &= 2x_1 - 3x_3 - x_4 + u_1 - 2u_2, \\ \dot{x}_3 &= x_2 + 2x_3 + 2x_4 + 2u_1, \\ \dot{x}_4 &= -x_1 - x_2 - 3x_3 - x_4 - u_1;\end{aligned}$$

12)

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= 2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + 2u_1 - u_2, \\ \dot{x}_2 &= 2x_1 - 3x_2 + x_4 + u_1, \\ \dot{x}_3 &= x_1 + x_2 + 2x_3 + 2x_4 - 2u_1, \\ \dot{x}_4 &= x_1 + 4x_2 + x_3 + 4x_4 - u_1.\end{aligned}$$

Задание 2. Построить преобразование, приводящее систему к канонической форме Бруновского:

1)

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 + 2x_3, \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + x_2, \\ \dot{x}_3 &= x_2 + u;\end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1 - 2x_2 + x_3 + u, \\ \dot{x}_2 &= -x_1 + 2x_2 + 3x_3, \\ \dot{x}_3 &= x_1 - x_2 + 2u;\end{aligned}$$

3)

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= 3x_1 + 4x_2 - x_3 - u, \\ \dot{x}_2 &= x_1 + x_2 + 3x_3 + u, \\ \dot{x}_3 &= -x_1 - x_2 - x_3 + 3u;\end{aligned}$$

4)

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1 + 4x_2 - 3x_3 + 2u, \\ \dot{x}_2 &= x_1 + x_2 - 2x_3, \\ \dot{x}_3 &= x_1 + x_2 + 2x_3 + 7u;\end{aligned}$$

5)

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 - 2x_3 + u, \\ \dot{x}_2 &= x_1 + x_2 + x_3, \\ \dot{x}_3 &= -3x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 5u.\end{aligned}$$

6)

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_2 - 2x_3 + u, \\ \dot{x}_2 &= x_1 + x_2 + x_3, \\ \dot{x}_3 &= -3x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 5u;\end{aligned}$$

7)

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= x_1 - 3x_2 + x_3, \\ \dot{x}_2 &= 2x_1 + x_2 + 4x_3 + u, \\ \dot{x}_3 &= -x_1 + 2x_2 - 2x_3 - 3u;\end{aligned}$$

8)

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= 2x_1 + 3x_2 + x_3 + u, \\ \dot{x}_2 &= x_1 - x_2 + x_3 - u, \\ \dot{x}_3 &= -x_1 + x_2 - 6x_3;\end{aligned}$$

9)

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= 2x_1 + 3x_2 + x_3 + u, \\ \dot{x}_2 &= x_1 - x_2 + x_3, \\ \dot{x}_3 &= -x_1 - x_2 + 5x_3;\end{aligned}$$

10)

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= 2x_1 + 3x_2 + x_3 + u, \\ \dot{x}_2 &= 4x_1 - x_2 + x_3 - u, \\ \dot{x}_3 &= -x_1 + x_2 - 6x_3 + u;\end{aligned}$$

11)

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= 2x_1 + 3x_2 + x_3 - u, \\ \dot{x}_2 &= x_1 - 2x_2 + x_3, \\ \dot{x}_3 &= -x_1 - x_2 + 5x_3 + u;\end{aligned}$$

12)

$$\begin{aligned}\dot{x}_1 &= 2x_1 + 3x_2 + 2x_3, \\ \dot{x}_2 &= 4x_1 - x_2 + x_3 - u, \\ \dot{x}_3 &= -x_1 + x_2 - x_3 + u.\end{aligned}$$

Задание 3. Решить задачу о линейном регуляторе:

1)

$$\begin{aligned}\dot{x} &= 2x + u, x(0) = x_0 \in \mathbb{R}, \\ \mathcal{J}(x_0, u) &= \int_0^T \{x^2(t) + u^2(t)\} dt + x^2(T) \rightarrow \min;\end{aligned}$$

2)

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x - u, x(0) = x_0 \in \mathbb{R}, \\ \mathcal{J}(x_0, u) &= \int_0^T \{2x^2(t) + u^2(t)\} dt + x^2(T) \rightarrow \min;\end{aligned}$$

3)

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -x - u, x(0) = x_0 \in \mathbb{R}, \\ \mathcal{J}(x_0, u) &= \int_0^T \{2x^2(t) + u^2(t)\} dt + x^2(T) \rightarrow \min;\end{aligned}$$

4)

$$\begin{aligned}\dot{x} &= -2x + u, x(0) = x_0 \in \mathbb{R}, \\ \mathcal{J}(x_0, u) &= \int_0^T \{x^2(t) + u^2(t)\} dt + x^2(T) \rightarrow \min;\end{aligned}$$

5)

$$\dot{x} = -4x + 2u, x(0) = x_0 \in \mathbb{R},$$

$$\mathcal{J}(x_0, u) = \int_0^T \{x^2(t) + 4u^2(t)\}dt + x^2(T) \rightarrow \min;$$

6)

$$\dot{x} = x + u, x(0) = x_0 \in \mathbb{R},$$

$$\mathcal{J}(x_0, u) = \int_0^T \{x^2(t) + u^2(t)\}dt + 9x^2(T) \rightarrow \min;$$

7)

$$\dot{x} = -3x + u, x(0) = x_0 \in \mathbb{R},$$

$$\mathcal{J}(x_0, u) = \int_0^T \{x^2(t) + 2u^2(t)\}dt + x^2(T) \rightarrow \min;$$

8)

$$\dot{x}_1 = x_2 + u, \dot{x}_2 = x_1, x(0) = x^0 \in \mathbb{R}^2,$$

$$\mathcal{J}(x^0, u) = \int_0^\infty \{x_2^2(t) + u^2(t)\}dt \rightarrow \min;$$

9)

$$\dot{x}_1 = x_1 - x_2, \dot{x}_2 = x_1 + u, x(0) = x^0 \in \mathbb{R}^2,$$

$$\mathcal{J}(x^0, u) = \int_0^\infty \{x_1^2(t) + 2x_1(t)x_2(t) + x_2^2(t) + u^2(t)\}dt \rightarrow \min;$$

10)

$$\dot{x}_1 = x_1 + x_2 - u, \dot{x}_2 = x_1, x(0) = x^0 \in \mathbb{R}^2,$$

$$\mathcal{J}(x^0, u) = \int_0^\infty \{x_1^2(t) - 2x_1(t)x_2(t) + x_2^2(t) + u^2(t)\}dt \rightarrow \min;$$

11)

$$\dot{x}_1 = x_2 + u, \dot{x}_2 = x_1 + x_2, x(0) = x^0 \in \mathbb{R}^2,$$

$$\mathcal{J}(x^0, u) = \int_0^\infty \{x_1^2(t) + u^2(t)\}dt \rightarrow \min;$$

12)

$$\dot{x}_1 = -x_2, \dot{x}_2 = -x_1 + x_2 + u, x(0) = x^0 \in \mathbb{R}^2,$$
$$\mathcal{J}(x^0, u) = \int_0^{\infty} \{x_1^2(t) + 4x_1(t)x_2(t) + 4x_2^2(t) + u^2(t)\} dt \rightarrow \min.$$

Список использованной литературы

1. Понтрягин Л.С. Математическая теория оптимальных процессов / Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкредидзе, Е.Ф. Мищенко. — 2-е изд. — М.: Наука, 1969. — 384 с.
2. Беллман Р. Динамическое программирование / Р. Беллман. — М.: Изд-во Иностранная литература, 1960. — 400 с.
3. Тинбэрхэн Я. Математические модели экономического роста / Я. Тинбэрхэн, Х. Бос. — М.: Прогресс, 1967. — 176 с.
4. Колемаев В.А. Математическая экономика / В.А. Колемаев. — М.: Юнити, 2002. — 399 с.
5. Трошина Н.Ю. Теория оптимального управления [Электронный ресурс]: учебно-методическое пособие / Н.Ю. Трошина. — Саратов: Саратовский государственный университет, 2008. — 117 с.
6. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц / Ф.Р. Гантмахер. — 4-е изд. — М.: Наука, 1988. — 552 с.
7. Ли Э.Б. Основы теории оптимального управления / Э.Б. Ли, Л. Маркус. — М.: Наука, 1972. — 576 с.
8. Демидович Б.П. Лекции по математической теории устойчивости / Б.П. Демидович. — М.: Наука, 1967. — 472 с.
9. Пономаренко О.І. Основи математичної економіки / О.І. Пономаренко, М.О. Перестюк, В.М. Бурим. — Київ: Інформтехніка, 1995. — 320 с.

10. Флеминг У. Оптимальное управление детерминированными и стохастическими системами / У. Флеминг, Р. Ришел. — М.: Мир, 1978. — 316 с.
11. Уонэм М. Линейные многомерные системы управления / М. Уонэм. — М.: Наука, 1980. — 376 с.
12. Брокетт Р. Нелинейные системы и дифференциальная геометрия / Р. Брокетт // ТИИЭР. — 1976. — Т. 64. — № 1. — С. 80-94.
13. Аграчев А.А. Геометрическая теория управления / А.А. Аграчев, Ю.Л. Сачков. — М.: Физматлит, 2004. — 392 с.
14. Mathematical Control Theory / [J. Zabczyk, G. Da Prato, B. Jakubczyk, et. al.]; ed. A.A. Agrachev. — Trieste: The Abdus Salam International Centre for Theoretical Physics, 2002. — 855 p. — (ICTP Lecture Notes Series: Vol. VIII).
15. Sontag E.D. Mathematical Control Theory / E.D. Sontag. — 2nd Ed. — New York: Springer, 1998. — 531 p.

Навчальне видання

Зуєв Олександр Леонідович

Теорія оптимального управління із застосуванням до задач економічної динаміки

Редактор

Т.О. Важеніна

План вид. 2012 р., поз. № 73.