Институт прикладной математики и механики НАН Украины

На правах рукописи

Зуев Александр Леонидович

УДК 531.38, 62-50, 517.977.1

Стабилизация и устойчивость нелинейных динамических систем с приложением к задачам механики твердых тел

Специальность 01.02.01 — теоретическая механика

Диссертация на соискание учёной степени
кандидата физико - математических наук

Научный руководитель
Ковалёв Александр Михайлович
доктор физ.-мат. наук, профессор

Донецк — 2000

СОДЕРЖАНИЕ

ВВЕДЕНИЕ

Актуальность темы. Проблема стабилизации нелинейных динамических систем занимает важное место в современной теории управления. Можно выделить два направления исследования этой проблемы.

Первое направление связано с качественной теорией систем управления, основы которой были сформулированы в докладе Р.Е. Калмана [1]. Для линейных систем известен следующий факт: если система управляема (выполнен критерий Калмана), то система стабилизируема с помощью линейного управления с обратной связью. В связи с этим результатом возникает вопрос: является ли свойство локальной управляемости нелинейной системы достаточным условием ее стабилизируемости? Для различных классов систем и обратных связей соотношения между качественными свойствами управляемости и стабилизируемости исследовались в работах Р. Габасова, Е.А. Гальперина, А.М. Ковалёва, В.И. Коробова, Н.Н. Красовского, Ю.С. Ледяева, А.И. Субботина, Z. Artstein, R. Brockett, J.-M. Coron, F.H. Clarke, A. Isidori, M. Kawski, L. Rosier, E.D. Sontag, H.J. Sussmann, E.P. Ryan и других авторов. Анализ этих работ свидетельствует, что поиск условий, достаточных для стабилизируемости широкого класса нелинейных систем, является актуальной проблемой современной теории управления, привлекающей внимание крупнейших специалистов. Следует выделить результаты R. Brockett [2] и E.P. Ryan [3], из которых следует, что в отличие от линейных систем, для нелинейных систем свойство управляемости не является достаточным условием асимптотической стабилизируемости, даже если определять решения в обобщенном смысле — по А.Ф. Филиппову.

Второе направление заключается в разработке методов синтеза управлений, решающих задачи стабилизации (в том числе и по части фазовых переменных) для некоторых классов нелинейных систем. В настоящее время это направление интенсивно развивается, как для задач стабили-

зации со статическими обратными связями, так и с динамическими. В качестве примера можно привести работы В.Г. Веретенникова, В.И. Воротникова, В.И. Зубова, В.И. Коробова, Н.Н. Красовского, В.М. Кунцевича, В.В. Румянцева, А.Я. Савченко, В.Д. Фурасова, A. Astolfi, A. Bacciotti, D.F. Delchamps, H. Hermes, V. Jurdjevic, P. Kokotovic, P. Morin, K. Peiffer, L. Praly, E.D. Sontag, J.P. Quinn и др. В частности, в обзоре В.И. Воротникова [4] отмечено, что представляет большой теоретический и практический интерес разработка конструктивных способов построения стабилизирующих обратных связей по отношению к части переменных. Это касается как достаточно общих, так и конкретных систем.

Известно [5], что в настоящее время проблема эксплуатации ветроэнергетических установок становится все более актуальной в связи с их экологической чистотой и неиспользованием невосполнимых природных ресурсов. Однако, широкое использование энергии ветра сдерживается достаточно высокой стоимостью производства ветродвигателей. Одним из главных факторов, влияющих на снижение стоимости ветроустановок, является использование гибких лопастей с малой жесткостью для уменьшения веса ветроколеса и нагрузок на вал [5]. Таким образом, представляются актуальными исследования динамических свойств рабочих режимов ветродвигателей с помощью математических моделей, учитывающих податливые свойства конструкции. Распространенным подходом к моделированию упругих объектов современной техники является их представление в виде конечномерной системы связанных твердых тел (ССТТ). Задачи динамики ССТТ исследовались в работах И.А. Болграбской, Й. Виттенбурга, А.Ю. Ишлинского, А.И. Лурье, В.В. Румянцева, А.Я. Савченко, П.В. Харламова и др. Представляется целесообразным использование моделей на основе ССТТ для исследования рабочих режимов ветродвигателей. Такие модели позволят учесть податливость конструкции, что необходимо в связи с задачами снижения массовых (стоимостных) характеристик ветродвигателей без ущерба для их надежности.

Связь работы с научными программами, планами, темами. Тематика диссертации включена в План научных исследований отдела технической механики Института прикладной математики и механики НАН Украины на 1998-2000 годы.

Цель и задачи исследования. Одной из главных целей исследования является нахождение достаточных условий стабилизируемости нелинейных динамических систем с управлением. Известно, что таким достаточным условием является свойство управляемости по линейному приближению. В случае неуправляемого линейного приближения для достижения поставленной цели необходимо решить две задачи. Во-первых, необходимо найти удобную характеризацию свойства локальной управляемости, применимую и в критических случаях. Во-вторых, следует конкретизировать понятие стабилизируемости и подобрать класс допустимых управлений с обратной связью (как будет показано в подразделе 1.1, известные ответы на вопрос о стабилизируемости управляемых систем существенно зависят от рассматриваемого класса обратных связей).

Следующая цель исследования — предложить эффективные способы построения законов управления, как для задачи стабилизации по всем переменным, так и для задач стабилизации по отношению к части переменных.

И наконец, последняя цель исследования состоит в определении условий, обеспечивающих устойчивость рабочих режимов ветродвигателя с упругими лопастями. Для достижения указанной цели следует построить такую математическую модель ветродвигателя, которая отражала бы динамические свойства моделируемого объекта, и в то же время не была бы слишком сложной, для того, чтобы получить обозримые аналитические результаты.

Научная новизна полученных результатов определяется следующими положениями.

Впервые доказана теорема о неасимптотической стабилизации про-

извольной нелинейной системы, удовлетворяющей свойству локальной управляемости вблизи особой точки. Показано, что в общем случае утверждение этой теоремы не может быть усилено. Доказано также, что для линейной по управлению системы множество точек разрыва стабилизирующей обратной связи содержится в некотором гладком многообразии, размерность которого ниже размерности фазового пространства. В отличие от известных результатов H.J. Sussmann [6], J.-M. Coron [7], F.H. Clarke, Yu.S. Ledyaev, E.D. Sontag, A.I. Subbotin [8], в доказанных теоремах управление с обратной связью не зависит явно от времени, а решения определяются в смысле А.Ф. Филиппова.

Впервые получены асимптотические оценки решений модельной системы в критическом случае двух пар чисто мнимых корней. Показано, что с помощью этих оценок задача об оптимальной по скорости затухания стабилизации сводится к задаче на минимум некоторой величины, определяемой через решения вспомогательной системы алгебраических уравнений.

Получены условия стабилизируемости неавтономных систем в терминах управляемых функций Ляпунова по части переменных. Для линейных по управлению систем предложен конструктивный способ построения стабилизирующей обратной связи. Эти результаты распространяют теорему Артстейна [9] на случай стабилизации по отношению к части переменных.

Впервые доказаны теоремы о частичной стабилизации автономных систем при условии существования функции Ляпунова со знакопостоянной нижней границей производных. С помощью этих теорем решены задачи о частичной стабилизации ориентации твердого тела под действием двух независимых управляющих моментов.

Впервые предложена математическая модель узла ветродвигателя в виде ССТТ. Получены условия устойчивости режима равномерных вращений модели по линейному приближению. При малых углах отклоне-

ния лопастей и больших значениях параметра жесткости найдено условие устойчивости, связывающее инерциальные характеристики модели с жесткостью лопастей и угловой скоростью режима равномерных вращений. Установлено, что при стремлении жесткости вала к бесконечности (при прочих фиксированных параметрах) режим равномерных вращений устойчив асимптотически. При бесконечно большой жесткости лопастей и при наличии дополнительной связи получено условие устойчивости, связывающее допустимые значения лобового давления с остальными параметрами модели.

Практическое значение полученных результатов. Результаты диссертации имеют в основном теоретическое значение. Они могут быть использованы для дальнейшего развития качественной теории нелинейных управляемых систем. Результаты главы 4 могут быть рекомендованы к применению при проектировании систем управления техническими объектами. Результаты главы 5 могут быть рекомендованы к использованию в организациях, проектирующих ветроэнергетические установки, с целью оценки влияния параметров жесткости материалов на надежность функционирования конструкции.

Личный вклад соискателя. Результаты подраздела 3.2 опубликованы в статье [10] совместно с профессором А.М. Ковалёвым, которому принадлежит идея использования метода ориентированных многообразий в задачах стабилизации нелинейных управляемых систем. Соискателю принадлежит доказательство теоремы 3.1 и пример 3.1. Результаты раздела 5 опубликованы в статье [11] совместно с членом-корреспондентом НАНУ А.Я. Савченко, которому принадлежит постановка задачи (исследуемая модель). Личный вклад соискателя в результаты раздела 5 заключается в проведении всех необходимых преобразований, направленных на получение уравнений движения в скалярном виде и характеристического многочлена, а также в численно-аналитическом исследовании условий устойчивости по линейному приближению.

Апробация результатов диссертации. Основные результаты диссертационной работы были доложены и обсуждены на:

– Международных Конференциях “Устойчивость, управление и динамика твердого тела” (ICSCD), Донецк, 1996 и 1999 гг.;

– Международной Конференции “Математика в индустрии” (ICIM’98), Таганрог, Россия, 29 июня - 3 июля 1998 г.;

– Украинской конференции “Автоматика 99”, Харьков, 10 - 13 мая 1999 г.;

– European Control Conference ECC’99, Karlsruhe, Germany, 31.08-3.09.1999;

– II Всеукраинской молодежной конференции “Людина і Космос”, Днепропетровск, 12 - 14 апреля 2000 г. (доклад отмечен дипломом конференции);

– Семинарах отделов прикладной и технической механики Института прикладной математики и механики НАН Украины, Донецк, 1997-2000 гг. (руководители член-кор. НАНУ П.В. Харламов и проф. А.М. Ковалёв);

– Семинаре кафедры дифференциальных уравнений и управления Харьковского национального университета им. В.Н. Каразина, 2000 г. (руководитель проф. В.И. Коробов).

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в 8 работах [10]-[17], среди которых 4 статьи в сборниках научных работ, 2 статьи в материалах международных конференций, 2 работы в сборниках тезисов конференций.

РАЗДЕЛ I
ОБЗОР ЛИТЕРАТУРЫ

1.1. Стабилизация нелинейных управляемых систем

Классическая задача стабилизации автономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}),\ \boldsymbol{f}(\boldsymbol{0}, \boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0},\ \boldsymbol{f} \in C^1(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m), \tag{1.1}$$

где $\boldsymbol{x}$ — фазовый вектор системы, $\boldsymbol{u}$ — вектор управления, состоит в построении функции обратной связи $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) \in \mathcal{U}$, $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$, обеспечивающей асимптотическую устойчивость по Ляпунову тривиального решения системы (1.1) [18, 19]. В зависимости от класса допустимых обратных связей $\mathcal{U}$ принято говорить о гладкой ($\mathcal{U} = C^\infty(\mathbb{R}^n)$) или о почти гладкой ($\mathcal{U} = C^0(\mathbb{R}^n) \cap C^\infty(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$) стабилизации [20].

Для системы с интегральным критерием качества Н.Н. Красовский доказал теорему об оптимальной стабилизации [19, с. 485], использующую идеи методов функций Ляпунова и динамического программирования Беллмана.

При исследовании стабилизируемости нелинейной системы (1.1) важную роль играют свойства системы линейного приближения:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + B\boldsymbol{u}, \tag{1.2}$$

где A, B — якобиевы матрицы отображения $\boldsymbol{f}$ по переменным $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{u}$ соответственно, вычисленные при $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$. Доказано [18], [21, с. 84], что линейная система (1.2) гладко стабилизируема тогда и только тогда, когда неуправляемому подпространству системы (1.2) соответствуют характеристические показатели с отрицательными вещественными частями. В частности, если для системы (1.2) выполнен критерий управляемости Калмана [1], то она гладко стабилизируема (глобально). Кроме

того, для управляемой системы (1.2) с критерием качества в виде интеграла от положительно-определенной квадратичной формы доказана разрешимость задачи об оптимальной стабилизации [19, с. 497], при этом оптимальное управление с обратной связью является линейной функцией фазового вектора. С помощью теоремы Ляпунова об устойчивости по линейному приближению [22, с. 72] установлено, что если система (1.1) локально управляема по линейному приближению, то она гладко стабилизируема.

В статье В.И. Коробова [23] для управляемой по линейному приближению системы (1.1) предложен способ построения стабилизирующей обратной связи (вообще говоря, разрывной) с помощью семейства синтезирующих функций на последовательности вложенных множеств, стягивающихся к нулю.

В монографии В.М. Кунцевича и М.М. Лычака [24, с. 80-130] сформулированы достаточные условия стабилизируемости нелинейных неавтономных систем в терминах функций Ляпунова. Для некоторых классов систем решены задачи синтеза стабилизирующих управлений.

Критические случаи стабилизируемости. Если вопрос о стабилизируемости системы (1.1) посредством обратной связи класса $C^1(\mathbb{R}^n)$ не решается рассмотрением системы (1.2), то имеет место случай, названный в статье [18] критическим случаем стабилизируемости. Критический случай характеризуется следующими свойствами: система (1.2) неуправляема; все собственные числа матрицы A, соответствующие неуправляемому подпространству системы (1.2), имеют неположительные вещественные части, причем среди этих собственных чисел имеются числа с нулевыми вещественными частями.

В монографии В.Г. Веретенникова [25, с. 169-207] описан метод исследования стабилизируемости системы (1.1) с аналитической правой частью в критических случаях стабилизируемости (и в случаях, близких к критическим). Суть этого метода заключается в подстановке функции

обратной связи в виде суммы форм с неопределенными коэффициентами в систему (1.1) с последующим определением коэффициентов форм, исходя из условий асимптотической устойчивости замкнутой системы. При этом используется принцип сведения [25, с. 32,157], [26], [22, с. 101-104], позволяющий свести исследование асимптотической устойчивости полной системы к исследованию асимптотической устойчивости укороченной системы по формам конечного порядка. Достаточные условия асимптотической устойчивости по формам конечного порядка были получены в работах Г.В. Каменкова [26], Н.Н. Красовского [27, с. 113], А.М. Молчанова [28], В.Г. Веретенникова [25, с. 67-74].

В связи с развитием качественной теории нелинейных управляемых процессов возник вопрос о стабилизируемости локально управляемых систем (1.1), для которых система линейного приближения (1.2) не является вполне управляемой [29, 6, 30]. M.Kawski [31] доказал, что в случае $n = 2$, $m = 1$ для аналитической и линейной по управлению функции $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$ управляемость системы (1.1) является достаточным условием ее почти гладкой стабилизируемости. Однако, как было показано в работах [30, 2, 3], ответ на вопрос о почти гладкой (или даже разрывной по А.Ф. Филиппову) стабилизируемости произвольной управляемой системы посредством обратной связи $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ отрицателен. Дадим краткий обзор результатов этих работ.

В статье E.D. Sontag, H.J. Sussmann [30] показано, что существуют одномерные ($n = 1$, $m = 1$) локально управляемые системы, которые не являются стабилизируемыми с помощью непрерывной обратной связи.

R. Brockett [2] получил необходимое условие почти гладкой стабилизируемости, которое формулируется следующим образом.

Теорема 1.1. (Условие Брокетта [2]) *Если система (1.1) почти гладко стабилизируема, то образ* $\boldsymbol{f}$ *содержит некоторую окрестность нуля* $B(\mathbf{0}, \varepsilon) \subset \mathbb{R}^n$, *т.е. для всякого* $\boldsymbol{p} \in B(\mathbf{0}, \varepsilon)$ *уравнение* $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) = \boldsymbol{p}$ *разрешимо относительно* $(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$.

Отметим, что условие Брокетта является следствием теоремы М.А. Красносельского [32, с. 442, Теорема 52.1] о топологическом индексе асимптотически устойчивой особой точки автономной системы. В работе [2] при моделировании управляемой неголономной тележки была получена следующая система:

$$\dot{x}_1 = u_1;\ \dot{x}_2 = u_2;\ \dot{x}_3 = x_2 u_1 - x_1 u_2. \tag{1.3}$$

С помощью аппарата скобок Ли доказано [2], что система (1.3) вполне управляема. Однако, система (1.3) не является почти гладко стабилизируемой, поскольку она не удовлетворяет условию Брокетта: вектор скорости $\boldsymbol{p} = (0, 0, \delta)^T$ не может быть реализован системой (1.3) ни при каком значении $\delta \neq 0$. Аналогичным образом из результата Брокетта следует [33], что всякая система вида

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \sum_{i=1}^{m} u_i \boldsymbol{f}_i(\boldsymbol{x}) \tag{1.4}$$

не является почти гладко стабилизируемой при условиях $\boldsymbol{f}_i \in C^1(\mathbb{R}^n)$, $\operatorname{rank}[\boldsymbol{f}_1(\mathbf{0}), ..., \boldsymbol{f}_m(\mathbf{0})] = m < n$.

Статья E.P. Ryan [3] распространяет условие Брокетта на системы с разрывной обратной связью, решения которых определяются в смысле А.Ф. Филиппова [34]. В статье [3] с помощью теории степени отображения для многозначных функций доказано, что если система (1.1) эквиасимптотически стабилизируема с помощью разрывной обратной связи, то образ $\boldsymbol{f}$ содержит окрестность нуля. Итак, системы (1.3), (1.4) не являются эквиасимптотически стабилизируемыми и в классе разрывных обратных связей $\mathcal{U}$, если решения определять по А.Ф. Филиппову.

В статье A. Astolfi [35] построены разрывные функции обратной связи, которые обеспечивают экспоненциальное притяжение особой точки $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ системы (1.3) при всех начальных условиях, лежащих вне некоторой гладкой поверхности, проходящей через особую точку.

В статье Z. Artstein [9] доказан критерий стабилизируемости системы (1.1) в классе обобщенных (relaxed) обратных связей. Согласно этому

критерию, известному как “теорема Артстейна” [9, Thm. 4.1], стабилизируемость системы (1.1) с помощью обобщенной обратной связи эквивалентна существованию управляемой функции Ляпунова. Здесь под управляемой функцией Ляпунова для системы (1.1) понимается такая определенно - положительная гладкая функция $V(\boldsymbol{x})$, для которой точная нижняя граница (по всевозможным допустимым управлениям) ее производных в силу системы (1.1) является определенно - отрицательной функцией. Отметим, что теория обобщенных управлений широко используется в монографии Дж. Варга [36] для задач оптимального управления. Для линейных по управлению систем теорема Артстейна допускает формулировку в терминах обычных обратных связей [9, Thm. 5.1]: линейная по управлению система стабилизируема с помощью обратной связи $\boldsymbol{u} \in C^0(\mathbb{R}^n \setminus \{0\})$ тогда и только тогда, когда у нее существует управляемая функция Ляпунова. Следует заметить, что оригинальное доказательство теоремы Артстейна неконструктивно, т.е. не позволяет по известной управляемой функции Ляпунова эффективно построить обратную связь. Конструктивные подходы к построению стабилизирующей обратной связи с помощью управляемой функции Ляпунова были впоследствии развиты в работах [37, 38, 39, 40].

Метод функций Ляпунова используется в работах E.D. Sontag [41] и E.D. Sontag, H.J. Sussmann [42] для характеристики асимптотической управляемости нелинейных систем. Основным результатом [42] является следующая теорема: система (1.1) асимптотически нуль-управляема тогда и только тогда, когда у нее существует управляемая функция Ляпунова класса $C^0(\mathbb{R}^n)$. При этом в качестве производных от функций класса C^0 рассматриваются их нижние производные по Дини.

В работах А.М. Ковалева [43, с. 46], [44] используются знакопеременные функции фазового вектора системы (1.1) для описания ее ориентированных многообразий. Установлен критерий управляемости системы (1.1), который формулируется в терминах отсутствия знакоперемен-

ных решений некоторых уравнений в частных производных типа уравнений Ляпунова в теории устойчивости и Леви-Чивиты в теории инвариантных многообразий [44].

J.-M. Coron [7] доказал, что если система (1.1) нуль-управляема за малое время, $\boldsymbol{f} \in C^\infty(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m)$, $n \geq 4$ и выполнено некоторое ранговое условие достижимости, то система (1.1) стабилизируема за конечное время с помощью непрерывной периодической по t обратной связи $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)$. В частности, если правая часть системы (1.4) аналитична, то из нуль-управляемости системы (1.4) за малое время следует ее стабилизируемость посредством нестационарной обратной связи $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)$ при любой размерности n. Таким образом, система Брокетта (1.3) стабилизируема с помощью непрерывной обратной связи вида $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)$.

F.H. Clarke, Yu.S. Ledyaev, E.D. Sontag, A.I. Subbotin в статье [8] определяют решения системы с разрывной обратной связью (π - траектории) на основе разбиения временной полуоси дискретными моментами времени и применения кусочно-постоянных управлений между соседними моментами. В соответствии с таким определением решения авторы определяют стабилизируемость системы (1.1) с помощью разрывной функции обратной связи $u(x)$ (s - стабилизируемость). Основным результатом работы [8] является теорема, согласно которой система (1.1) является s - стабилизируемой тогда и только тогда, когда она асимптотически нуль-управляема. Следует отметить, что определение решений разрывной системы в [8, 33] не является эквивалентным известным определениям решений в смысле А.Ф. Филиппова [34].

V. Jurdjevic, J.P. Quinn в работе [29] рассматривали аналитические и линейные по управлению системы (1.1), которые имеют функцию Ляпунова со знакоотрицательной производной в силу системы при $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$. При выполнении дополнительных условий в терминах скобок Ли, авторами [29] доказана гладкая стабилизируемость таких систем. В работах [45, 46] обсуждается вопрос о необходимости и достаточности условий

[29] для стабилизируемости линейной по управлению системы с неаналитической правой частью.

Статья A. Bacciotti, F. Ceragioli [47] посвящена применению обратной связи типа [29] для стабилизации системы с разрывной правой частью, решения которой определяются по А.Ф. Филиппову. На основе аппарата дифференциальных включений и негладких функций Ляпунова в [47] получено достаточное условие стабилизируемости линейных по управлению систем.

В.И. Коробовым [48] были получены достаточные условия управляемости нелинейной системы треугольного вида. В работе [48] также показана достаточность этих условий для стабилизируемости треугольной системы. Аналогичные условия впоследствии исследовались в работе французских авторов [49]. В статье [50] предлагается эффективный метод построения стабилизирующей обратной связи для треугольных систем при выполнении достаточных условий [49].

В работе H. Hermes [51] для случая линейной по управлению системы (1.1), $m = 1$ найдены необходимые и некоторые достаточные условия гладкой стабилизируемости, полученные на основе рассмотрения однородных приближений правой части (1.1). В работе S.P. Banks [52] получено достаточное условие стабилизируемости системы (1.1) для случая билинейной функции $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$.

В статье P. Morin, C. Samson [53] предлагается алгоритм построения непрерывной обратной связи вида $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}, t)$, обеспечивающей робастную экспоненциальную устойчивость системы (1.4) при условии ее локальной управляемости.

В работе K. Peiffer, A.Ya. Savchenko [54] исследуется задача пассивной стабилизации неасимптотически устойчивых положений равновесия гамильтоновых систем методом “размораживания параметров”, т.е. введения дополнительных степеней свободы, по отношению к которым реализуется диссипация энергии. Для критического случая n пар чисто

мнимых корней получены условия разрешимости задачи пассивной стабилизации. В работе [55] изучается асимптотическое поведение решений пассивно стабилизированной системы в критическом случае одной пары чисто мнимых корней. Показано, что если задача стабилизации решается с помощью функции Ляпунова в виде многочлена четвертой степени, то норма критических переменных решения допускает асимптотическую оценку вида $Gt^{-1/2}$ при $t \to +\infty$, где G — константа. Предложено использовать такую оценку для решения задачи об оптимальной пассивной стабилизации.

1.2. Устойчивость и стабилизация по части переменных

Как отмечается в монографии В.В. Румянцева и А.С. Озиранера [56, с. 6], задача об устойчивости движения по отношению к части переменных естественным образом возникает при решении многих прикладных проблем. Перечислим некоторые из этих проблем: устойчивость голономных систем с циклическими координатами [56, с. 48-51]; устойчивость движения систем с бесконечным числом степеней свободы (твердых тел с полостями, содержащими жидкость) [56, с. 56-65]; одноосная стабилизация спутника [56, с. 149-159].

Интерес к задачам устойчивости по отношению к части переменных обуславливается не только проблемами механики. Так П. Руш, Н. Абетс, М. Лалуа в монографии [57, с. 203-209] рассматривают экологическую задачу межвидового взаимодействия на основе модели Вольтерры - Лотки. Показано, что экологический принцип вымирания Вольтерры - Лотки является следствием асимптотической устойчивости положения равновесия системы межвидового взаимодействия по части переменных.

В.В. Румянцев в работе [58] ввел понятие функции, знакоопределенной относительно части переменных. С помощью таких функций им доказаны теоремы об устойчивости и асимптотической устойчивости по

отношению к части переменных, обобщающие теоремы Ляпунова.

Дальнейшие обобщения теорем метода функций Ляпунова об устойчивости, асимптотической устойчивости и неустойчивости относительно части переменных приведены в монографии В.В. Румянцева и А.С. Озиранера [56], а также в монографии [59] и в обзоре [4] В.И. Воротникова. Перечислим некоторые из важнейших результатов.

В.М. Матросов доказал теоремы об устойчивости и асимптотической устойчивости по отношению к части переменных с помощью вектор-функций Ляпунова [60].

В.В. Румянцев [56, с. 126] обобщил теорему Н.Н. Красовского об оптимальной стабилизации на задачу стабилизации по части переменных.

C. Risito и В.В. Румянцев распространили теорему Е.А. Барбашина - Н.Н. Красовского на случай асимптотической устойчивости по части переменных [56, с. 98-99], при условии ограниченности решений. Как показал А.С. Озиранер [56, с. 100], утверждения этих теорем перестают быть верными, если отказаться от условия ограниченности решений. Необходимые и достаточные условия ограниченности решений по отношению к части переменных доказаны А.С. Озиранером [56, с. 224].

В.И. Воротников [59] предложил метод исследования устойчивости относительно части переменных с помощью вспомогательных линейных систем — "μ-систем". Доказано [59, с. 35-38], что нулевое решение линейной системы устойчиво (асимптотически устойчиво) по части переменных тогда и только тогда, когда нулевое решение соответствующей линейной μ-системы устойчиво (асимптотически устойчиво) по всем переменным. С помощью метода μ-систем получены условия устойчивости нелинейных систем относительно части переменных по линейному приближению [59, с. 89-121]. При этом показано, что класс нелинейных систем, для которых вопрос об устойчивости относительно части переменных решается линейным приближением, можно существенно расширить, если вместо линейной части исходной нелинейной системы рассматри-

вать специально построенную систему линейного приближения.

В статье В.Н. Щенникова [61] методом функций Ляпунова доказаны теоремы об асимптотической устойчивости по части переменных для систем с однородными правыми частями. В статье [61] также распространены результаты теорем Н.Н. Красовского [27, с. 113] и А.А. Шестакова [62] об асимптотических оценках решений на случай асимптотической устойчивости по части переменных.

В.И. Воротниковым получены условия стабилизируемости линейных систем по части переменных [59, с. 81-82], а также достаточные условия стабилизируемости нелинейных систем по линейному приближению [4, с. 46]. Отмечено [4, с. 47], что используемый подход связан с общими подходами к точной линеаризации нелинейных систем управления. Методы точной линеаризации описаны в монографии A. Isidori [63, P. 178-253].

В работе А.О. Игнатьева [64, с. 146] доказана теорема, обратная к теореме В.В. Румянцева об асимптотической устойчивости ([56, с. 35]). С помощью этой теоремы А.О. Игнатьев доказал теорему об устойчивости относительно части переменных при постоянно действующих возмущениях, ограниченных в среднем [64, с. 164].

В работе А.С. Андреева [65] исследуются задачи о притяжении и асимптотической устойчивости решений неавтономной системы при предположении существования функции Ляпунова со знакопостоянной производной. При дополнительных предположениях о свойствах частичного положительного предельного множества получены результаты, обобщающие известные теоремы об асимптотической устойчивости по части переменных.

В заключении обзорной работы В.И. Воротникова [4, с. 52-54] выделены некоторые нерешенные проблемы. Отмечено, что в задаче частичной стабилизации основной проблемой остается разработка конструктивных способов построения стабилизирующих законов управления, как для достаточно общих, так и для конкретных систем.

В статье [66] применяются функции Ляпунова, знакоопределенные по отношению к некоторым функциям фазового вектора. С помощью таких функций Ляпунова доказана теорема, дополняющая теорему В.В. Румянцева об устойчивости по части переменных.

В статье А.М. Ковалева [67] доказана теорема о необходимых и достаточных условиях неустойчивости по части переменных, распространяющая теорему А.М. Ляпунова - Н.Н. Красовского ([27, с. 52-53], [68]) на задачи частичной устойчивости. Для систем, линейных по управлению, в работе [67] доказан критерий управляемости по части переменных.

1.3. Стабилизация движений твердого тела около центра масс

Уравнения углового движения космического аппарата как абсолютно твердого тела без движущихся масс записываются в виде системы динамических уравнений Эйлера, содержащих моменты управления, и кинематических уравнений, описывающих положение осей аппарата относительно осей ориентации [69, с. 138-142]. Момент управления создается с помощью реактивных двигателей ориентации [69, с. 111-120], изменением массы системы за счет работы двигателей в ряде задач управления пренебрегается. Приведем результаты, относящиеся к задачам стабилизации такого типа систем.

В.И. Зубов в монографии [70, с. 409] решил задачу об ориентации заданного направления (одноосной стабилизации), т.е. задачу о стабилизации положения равновесия уравнений Эйлера - Пуассона по трем координатам вектора угловой скорости и по двум координатам заданного орта ориентации с помощью трехмерного вектора управления. В.И. Зубов решил также и задачу об ориентации двух заданных направлений [70, с. 425].

В монографии В.Д. Фурасова [71, с. 55] рассматривается задача о

стабилизации тривиального решения динамических уравнений Эйлера с помощью трехмерного вектора управления (задача о гашении вращений).

Л.Д. Акуленко исследовал задачу об оптимальном по быстродействию приведении вектора угловой скорости тела в нуль с помощью трехмерного управления [72, с. 269-274], а также с помощью одномерного импульсного управления [73].

В.И. Воротников решил задачу о стабилизации положения равновесия уравнений Эйлера - Пуассона по координатам заданного орта ориентации (без учета угловой скорости) под действием двумерного вектора управления [59, с. 179].

D. Aeyels, M. Szafranski [74] доказали стабилизируемость нулевого решения динамических уравнений Эйлера для несимметричного твердого тела под действием одномерного управления, реализуемого "косопоставленными" реактивными двигателями.

E.D. Sontag, H.J. Sussmann [75] распространили этот результат на случай тела с двумя одинаковыми главными моментами инерции. В работе [75] также доказано, что тело со сферическим тензором инерции не может быть стабилизировано ни при каком расположении двигателей, реализующих одномерное управление.

А.М. Ковалев, И.С. Абдалла в работе [76] исследовали стабилизируемость равномерных вращений твердого тела под действием одномерного управления.

A. Astolfi, A. Rapaport [77] построили функции обратной связи, робастно стабилизирующие тривиальное решение динамических уравнений Эйлера, для случая двумерного вектора управления.

1.4. Моделирование системами связанных твердых тел

Одним из общих методов исследования динамических свойств упругих систем является "метод пространственной дискретизации" [78, с. 115-

116]. Согласно этому методу исходный упругий объект с бесконечным числом степеней свободы представляется в виде упрощенной системы связанных твердых тел (ССТТ), соединенных между собой упругими шарнирами.

В монографии А.И. Лурье [79, с. 426-498] приведены уравнения движения механических систем достаточно общего вида, состоящих из абсолютно твердых тел и материальных точек. В частности, А.И. Лурье применил полученные им уравнения для изучения движений деформируемого твердого тела [79, с. 474].

В качестве одной из ранних работ, в которой используется модель ССТТ выделим работу [80]. В этой работе предложена модель гибкой исследовательской ракеты в виде системы двух твердых тел, связанных упругим шарниром. Показано, что предложенная модель достаточно хорошо согласуется с данными эксперимента на всей траектории движения, в то время как расчетные данные по модели абсолютно твердого тела значительно отличаются от экспериментальных на некоторых участках траектории.

Имеется большое количество работ, посвященных исследованию устойчивости моделей упругих объектов, полученных методом пространственной дискретизации. Не претендуя на полноту, выделим обзор Л.В. Докучаева [81, с. 144, 164-175], в котором приведен ряд важных результатов, относящихся к моделям упругих летательных аппаратов.

В.И. Воротников [59, с. 223] рассмотрел задачу стабилизации положения равновесия по отношению к части переменным для управляемой механической системы в виде цепи твердых тел, связанных сферическими шарнирами.

Перечислим некоторые результаты Донецкой школы механики, относящиеся к моделированию технических объектов системами связанных твердых тел. П.В. Харламов [82] предложил форму записи уравнений движения, которая оказалась весьма удобной для решения ряда задач

динамики ССТТ.

Для изучения изгибных колебаний упругого объекта И.А. Болграбская, А.Я. Савченко [83] предложили модель стержня в виде системы твердых тел, связанных упругими универсальными шарнирами. В монографии [83, с. 62-127] исследованы необходимые, а также достаточные условия устойчивости равномерных вращений системы n гироскопов Лагранжа. Изучено влияние малой несимметрии на устойчивость стационарных движений [83, с. 128-158].

И.А. Болграбская [83, с. 33-38], [84] определила значение параметра жесткости упругого шарнира, для которого уравнения движения ССТТ при стремлении числа тел к бесконечности аппроксимируют уравнения малых колебаний упругих стержней. Эти результаты обосновывают возможность моделирования непрерывной системы (упругого стержня) дискретной системой связанных твердых тел при изучении малых колебаний объекта.

В статье В.С. Елфимова, А.М. Ковалева [85] построена математическая модель манипулятора со структурой кинематической цепи, составленной из произвольной последовательности кинематических пар вращения и поступательного перемещения. На основе этой модели исследована задача гашения колебаний с помощью виброгасителей. В статье [86] обобщены результаты работы [85] на случай кинематической цепи, имеющей структуру дерева, а также допускающей наложение кинематических связей.

Цикл работ [87, 88] посвящен математическому моделированию кинетического накопителя энергии (КНЭ). Предложенная модель КНЭ состоит из пяти твердых тел, связанных упругими шарнирами, и учитывает эффекты, связанные с большими прогибами несущих валов.

1.5. Проблемы моделирования ветроэнергетических установок

Использование ветроэнергетических установок становится все более актуальным в связи с их экологической чистотой и неиспользованием невосполнимых природных ресурсов [89]. Однако, как отмечается в работе [5], в настоящее время широкое использование энергии ветра сдерживается довольно высокой стоимостью энергии, вырабатываемой ветроэнергетическими установками. На повышение эффективности использования энергии ветра направлены ряд научно-технических программ, например Программа по исследованию ветродвигателей, основанная Департаментом энергии США (U.S. DOE) в 1990г. В работе [90] отмечается, что за период 1990-1996 годов стоимость ветродвигателей с диаметром колеса 32-45 м снизилась на 45% за счет оптимизации конструкции и улучшения технологии производства. Оптимизация параметров конструкции достигается применением численных экспериментов над математическими моделями, учитывающими как аэродинамику ветроколеса, так и прочностные свойства материалов [5].

Аэродинамический расчет ветряных двигателей базируется на импульсной теории Г.Х. Сабинина, основные положения которой описаны в работе [91]. К.П. Вашкевич замечает [91, с. 16], что импульсная теория ветряных двигателей Г.Х. Сабинина раскрывает физическую картину работы ветроколеса, и в то же время результаты, полученные по этой теории, достаточно хорошо согласуются с данными эксперимента.

С.Б. Перли в монографии [92, с. 13] отмечает, что в связи с относительно большими угловыми скоростями в быстроходных ветроколесах возникают большие центробежные силы. Это вызывает повышенные требования как к прочности, так и к качеству балансировки ветроколес. При достаточно большой скорости ветра ветроколесо со сравнительно малой статической неуравновешенностью создает меняющееся по направлению

усилие на вал, сравнимое с весом лопастей, которое может привести к резонансу хвоста и других частей конструкции. Для ограничения угловой скорости ветроколеса во многих ветродвигателях применяется автоматический регулятор типа Уфимцева - Ветчинкина [92, с. 149], изменяющий угол установки лопастей в зависимости от скорости ветра.

В работе [5] выделяются основные факторы, влияющие на снижение стоимости ветродвигателей. Укажем некоторые из них: применение гибких упругих несущих башен с целью снижения веса конструкции и повышения высоты расположения вала ветроколеса; использование гибких лопастей с малой жесткостью для уменьшения веса ветроколеса и нагрузок на вал; индивидуальное управление углом установки каждой лопасти для повышения коэффициента использования энергии ветра и “смягчения” нагрузок.

1.6. Выводы

Исходя из приведенного обзора сделаем следующие выводы.

1. Свойство управляемости нелинейной автономной системы не является достаточным для ее стабилизируемости с помощью стационарной обратной связи (при обычном определении решений замкнутой системы, а также при определении по А.Ф. Филиппову).

2. Поиск дополнительных условий, достаточных для стабилизируемости широких классов систем, является актуальной проблемой современной теории управления, привлекающей внимание крупнейших специалистов. Не решен вопрос о неасимптотической стабилизируемости произвольной управляемой системы (ответ на вопрос предполагает указание класса обратных связей).

3. Метод функций типа Ляпунова является мощным методом исследования как управляемости, так и стабилизируемости нелинейных

систем (в том числе относительно части переменных).

4. В задаче о стабилизации по части переменных одной из основных проблем является разработка конструктивных способов построения стабилизирующих обратных связей. Это касается как достаточно общих, так и конкретных систем.

5. В задачах о стабилизации движения твердого тела около центра масс с помощью реактивных двигателей остались неисследованными постановки о стабилизации положения равновесия по части координат вектора угловой скорости и вектора ориентации посредством двумерного управления.

6. Динамика систем связанных твердых тел (ССТТ) эффективно используется при математическом моделировании сложных упругих объектов современной техники. Поэтому представляется целесообразным применение моделей на основе ССТТ для исследования рабочих режимов ветроэнергетических установок. Такие модели позволят учитывать податливость конструкции, что необходимо в связи с задачами снижения массовых (стоимостных) характеристик ветроустановок без ущерба их надежности.

РАЗДЕЛ II
МЕТОДИКА ИССЛЕДОВАНИЙ

2.1. Метод ориентированных многообразий в теории управляемости

Пусть задана автономная система дифференциальных уравнений с управлением:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}), \quad \boldsymbol{x} \in D \subset \mathbb{R}^n, \ \boldsymbol{u} \in \mathbb{U} \subset \mathbb{R}^m, \tag{2.1}$$

где $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$ — фазовый вектор системы, $\boldsymbol{u} = (u_1, u_2, ..., u_m)^T$ — вектор управления. Предполагается, что функция $\boldsymbol{f}$ непрерывно дифференцируема в $D \times \mathbb{U}$, D — область с гладкой границей, $\mathbb{U}$ — замкнутая область. В качестве допустимых управлений для системы (2.1) рассматриваются ограниченные измеримые функции времени $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(t)$, принимающие значения в множестве $\mathbb{U}$. Система (2.1) рассматривается на промежутке времени $\mathcal{I} = [0, +\infty)$.

Для исследования управляемости нелинейных автономных систем А.М. Ковалёвым был предложен метод ориентированных многообразий [43, 44]. Сформулируем определения достижимости и управляемости [43, с. 6-16].

Определение 2.1. Точка $\boldsymbol{x}^2$ называется *достижимой из точки* $\boldsymbol{x}^1$ *в области* D, если существуют число $T > 0$ и допустимое управление $\boldsymbol{u} : [0, T] \to \mathbb{U}$, для которых система (2.1) имеет решение $\boldsymbol{x} : [0, T] \to D$, удовлетворяющее условиям $\boldsymbol{x}(0) = \boldsymbol{x}^1$, $\boldsymbol{x}(T) = \boldsymbol{x}^2$.

Определение 2.2. Система (2.1) называется *управляемой в области* D, если для любых $\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2 \in D$ точка $\boldsymbol{x}^2$ является достижимой из $\boldsymbol{x}^1$ в области D.

Определение 2.3. Множество всех точек, достижимых из точки $\boldsymbol{x} \in D$, будем называть *положительной орбитой точки* $\boldsymbol{x}$ и обозначать

$Or^+\{\boldsymbol{x}\}$. Множество всех точек, из которых достижима точка $\boldsymbol{x} \in D$, будем называть *отрицательной орбитой* $Or^-\{\boldsymbol{x}\}$ *точки* $\boldsymbol{x}$.

Определение 2.4. Множество $K \subseteq D$ называется *ориентированным* относительно системы (2.1), если оно обладает следующими свойствами: $K = Or^+K$ или $K = Or^-K$, где

$$Or^+K = \bigcup_{\boldsymbol{x}\in K} Or^+\{\boldsymbol{x}\}, \quad Or^-K = \bigcup_{\boldsymbol{x}\in K} Or^-\{\boldsymbol{x}\}.$$

Имеет место следующая теорема об управляемости.

Теорема 2.1. [44] *Система (2.1) управляема в области D тогда и только тогда, когда отсутствуют ориентированные относительно системы многообразия K с дифференцируемой границей, такие что $K \neq \emptyset$, $K \neq D$.*

Условие ориентированности многообразия K означает, что для всякого $\boldsymbol{u} \in \mathbb{U}$ векторы скорости $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$ в точках границы K направлены во внешность многообразия (если $K = Or^-K$), либо во внутренность (если $K = Or^+K$).

Пусть граница ∂K многообразия K определяется уравнениями $V_i(\boldsymbol{x}) = 0$ [44], а касательная плоскость в точке $\boldsymbol{x}_0 \in \partial K$ — уравнениями

$$\Big\langle \boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{\nabla}_x V_i(\boldsymbol{x}_0) \Big\rangle = 0, \quad i = \overline{1, n-s},$$

где скобка $\Big\langle \cdot, \cdot \Big\rangle$ обозначает скалярное произведение векторов,

$$\boldsymbol{\nabla}_x = \Big(\frac{\partial}{\partial x_1}, ..., \frac{\partial}{\partial x_n}\Big)^T,$$

число $s : 1 \leq s < n$ характеризует размерность многообразия, функции $V_i(\boldsymbol{x})$ предполагаются непрерывно-дифференцируемыми в D. Пусть внутренность многообразия K определяется условием $V_1(\boldsymbol{x}) < 0$; при этом должны выполнятся равенства $V_2(\boldsymbol{x}) = ... = V_{n-s}(\boldsymbol{x}) = 0$. Тогда для всех $\boldsymbol{u} \in \mathbb{U}$ из условия ориентированности следует $\Big\langle \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{u}), \boldsymbol{\nabla}_x V_1(\boldsymbol{x}_0) \Big\rangle \geq 0$, $\Big\langle \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{u}), \boldsymbol{\nabla}_x V_i(\boldsymbol{x}_0) \Big\rangle = 0$, $(i = \overline{2, n-s})$, либо $\Big\langle \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{u}), \boldsymbol{\nabla}_x V_1(\boldsymbol{x}_0) \Big\rangle \leq 0$,

$\left\langle \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{u}), \boldsymbol{\nabla}_x V_i(\boldsymbol{x}_0) \right\rangle = 0$. Указанные соотношения могут быть записаны следующим образом [44]:

$$\left\langle \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}), \boldsymbol{\nabla}_x V_i(\boldsymbol{x}) \right\rangle = \sum_{j=1}^{n-1} \lambda_{ij}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) V_j(\boldsymbol{x}) + G_i(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}), \ (\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) \in D \times \mathbb{U}, \quad (2.2)$$

$$G_1 \geq 0, \ G_2 = ... = G_{n-1} = 0, \ i = \overline{1, n-1},$$

где $\lambda_{ij}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$, $G_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$ — непрерывные в $D \times \mathbb{U}$ функции.

Таким образом, критерий управляемости системы (2.1) может быть сформулирован в терминах отсутствия знакопеременных решений $V_i(\boldsymbol{x})$ у системы линейных уравнений в частных производных (2.2).

Теорема 2.2.[44] *Система (2.1) управляема в D тогда и только тогда, когда система уравнений (2.2) не имеет в области D решений $V_i(\boldsymbol{x}) \in C^1(D)$, $i = \overline{1, n-1}$, определяемых знакопеременными функциями, для любых функций $\lambda_{ij} \in C(D \times \mathbb{U})$ и знакопостоянной функции $G_1 \in C(D \times \mathbb{U})$.*

2.2. Исследование дифференциальных уравнений с разрывной правой частью по А.Ф. Филиппову

Рассмотрим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}), \quad (2.3)$$

где функция $\boldsymbol{f}$ определена в некоторой области $G \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$. Как известно [34, с. 5], в случае разрывной функции $\boldsymbol{f}$ классические решения системы (2.3) могут существовать не при всех начальных значениях $(t_0, \boldsymbol{x}_0) \in G$. Кроме того, ограниченные классические решения могут быть непродолжаемыми до границы области G. Чтобы обеспечить существование и возможность продолжения решений необходимо ввести обобщенное понятие решения, применимое и в случае разрывной функции $\boldsymbol{f}$. Приведем

определение решения системы (2.3) по А.Ф. Филиппову [34, с. 40], [93, с. 40].

Определение 2.5. *Решением системы (2.3)* на полуинтервале $[t_0, T)$, $T \leq +\infty$, называется абсолютно непрерывная на $[t_0, T)$ функция $\boldsymbol{x}(t)$, которая почти всюду на $[t_0, T)$ удовлетворяет дифференциальному включению:

$$\dot{\boldsymbol{x}}(t) \in \operatorname{co} H(t, \boldsymbol{x}(t)), \tag{2.4}$$

где для каждых $(t, \boldsymbol{x}) \in G$ множество $H(t, \boldsymbol{x})$ является множеством всех предельных значений функции $\boldsymbol{f}(t^*, \boldsymbol{x}^*)$ при $(t^*, \boldsymbol{x}^*) \to (t, \boldsymbol{x})$, дополненным значением $\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})$, $\operatorname{co} H(t, \boldsymbol{x})$ — выпуклая оболочка множества $H(t, \boldsymbol{x})$ (наименьшее выпуклое множество, содержащее $H(t, \boldsymbol{x})$).

Очевидно, что всякое классическое решение системы (2.3) является решением в смысле определения 2.5. Кроме того, в случае непрерывности $\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x})$ определение 2.5 эквивалентно классическому определению решения системы обыкновенных дифференциальных уравнений. В общем случае для исследования свойств решений включения (2.4) необходимо ввести ряд определений [34].

Пусть A, B — непустые замкнутые множества в пространстве $\mathbb{R}^n$. Близость множеств A и B характеризуется числами α, β:

$$\beta(A, B) = \sup_{\boldsymbol{a} \in A} \inf_{\boldsymbol{b} \in B} |\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}|, \quad \beta(B, A) = \sup_{\boldsymbol{b} \in B} \inf_{\boldsymbol{a} \in A} |\boldsymbol{a} - \boldsymbol{b}|,$$
$$\alpha(A, B) = \max\{\beta(A, B), \beta(B, A)\}.$$

Если A и B — ограниченные множества, то эти числа конечны. Число $\alpha(A, B)$ называется отклонением множеств A и B по Хаусдорфу.

Будем говорить, что в области G задана многозначная функция $F(\boldsymbol{p})$, если каждому $\boldsymbol{p} \in G$ поставлено в соответствие множество $F(\boldsymbol{p}) \subset \mathbb{R}^n$.

Определение 2.6. [34, с. 52] Многозначная функция $F(\boldsymbol{p})$, называется α - *непрерывной в точке* $\boldsymbol{p}$, если $\alpha(F(\boldsymbol{p}'), F(\boldsymbol{p})) \to 0$ при $\boldsymbol{p}' \to \boldsymbol{p}$. Функция $F(\boldsymbol{p})$ называется α - непрерывной в области G, если она α - непрерывна в каждой точке этой области.

Определение 2.7. [34, с. 52] Многозначная функция $F(\boldsymbol{p})$, называется *β - непрерывной (или полунепрерывной сверху) в точке* $\boldsymbol{p}$, если $\beta(F(\boldsymbol{p}'), F(\boldsymbol{p})) \to 0$ при $\boldsymbol{p}' \to \boldsymbol{p}$. Функция $F(\boldsymbol{p})$ называется β - непрерывной в области G, если она β - непрерывна в каждой точке этой области.

Поскольку всегда $\beta(A, B) \leq \alpha(A, B)$, то *из α - непрерывности многозначной функции следует ее β - непрерывность.* В теории дифференциальных включений имеет место теорема о выделении однозначных ветвей (селекторов) многозначных функций.

Теорема 2.3. [34, с. 59] *Пусть для каждого $\boldsymbol{p} \in E$ множество $A(\boldsymbol{p}) \subset \mathbb{R}^n$ не пусто, замкнуто, выпукло. Тогда существует однозначная функция $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{p}) \in A(\boldsymbol{p})$, непрерывная, если функция $A(\boldsymbol{p})$ - α- непрерывная.*

Для исследования свойств многозначных функций сформулируем следующую лемму.

Лемма 2.1. [34, с. 53] *Пусть $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{p})$ — ограниченная однозначная функция, $\boldsymbol{p} \in G$, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{p}) \in \mathbb{R}^n$. Для каждого $\boldsymbol{p}_0 \in \overline{G}$ пусть $H(\boldsymbol{p}_0)$ — множество всех предельных значений функции $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{p})$ при $\boldsymbol{p} \to \boldsymbol{p}_0$, дополненное значением $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{p}_0)$ в случае $\boldsymbol{p}_0 \in G$. Тогда функции $H(\boldsymbol{p})$ и $F(\boldsymbol{p}) = \operatorname{co} H(\boldsymbol{p})$ являются β - непрерывными.*

Определение 2.8. [34, с. 60] Будем говорить, что многозначная функция $F(t, \boldsymbol{x})$ в области G *удовлетворяет основным условиям*, если при всех $(t, \boldsymbol{x}) \in G$ множество $F(t, \boldsymbol{x})$ — непустое, ограниченное, замкнутое, выпуклое и функция F β - непрерывна.

Если правая часть (2.4) удовлетворяет основным условиям в области G, то через каждую точку $(t_0, \boldsymbol{x}_0) \in G$ проходит решение дифференциального включения (2.4), и каждое решение включения (2.4), проходящее внутри замкнутой ограниченной области $D \subset G$, можно продолжить в обе стороны до выхода на границу D [34, с. 60-61]. Из леммы 2.1 следует, что для всякой локально-ограниченной в G функции $f(t, \boldsymbol{x})$ правая часть включения (2.4) удовлетворяет основным условиям, а значит, для каждой

точки $(t_0, \boldsymbol{x}_0) \in G$ существует (вообще говоря, неединственное) решение $\boldsymbol{x}(t)$ задачи Коши (2.3), $\boldsymbol{x}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$, которое может быть продолжено до выхода на границу G или неограниченно.

Пусть $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\varphi}(t)$ — решение системы (2.3), определенное на полуинтервале $t \in [t_0, +\infty)$. Для дифференциальных включений имеются два типа устойчивости решения $\boldsymbol{\varphi}(t)$: сильная устойчивость (или устойчивость по Ляпунову) и слабая устойчивость [34, с. 115]. Приведем используемое в дальнейшем определение устойчивости по Ляпунову для системы дифференциальных включений.

Определение 2.9. [34, с. 115] Решение $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\varphi}(t)$ системы (2.3) будем называть *устойчивым*, если для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что каждое решение $\tilde{\boldsymbol{x}}(t)$ дифференциального включения (2.4) с начальным условием $|\tilde{\boldsymbol{x}}(t_0) - \boldsymbol{\varphi}(t_0)| < \delta$ существует при всех $t \geq t_0$ и удовлетворяет неравенству

$$|\tilde{\boldsymbol{x}}(t) - \boldsymbol{\varphi}(t)| < \varepsilon, \quad \forall t \in [t_0, +\infty).$$

Если, кроме того, выполняется условие $|\tilde{\boldsymbol{x}}(t) - \boldsymbol{\varphi}(t)| \to 0$ при $t \to +\infty$, то решение $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\varphi}(t)$ называется *асимптотически устойчивым.*

Для функции $V(t, \boldsymbol{x}) \in C^1(G)$ определим верхнюю производную в силу включения (2.4):

$$\dot{V}^*(t, \boldsymbol{x}) = \frac{\partial V(t, \boldsymbol{x})}{\partial t} + \sup_{\boldsymbol{p} \in \operatorname{co} H(t, \boldsymbol{x})} \Big\langle \boldsymbol{\nabla}_x V(t, \boldsymbol{x}), \boldsymbol{p} \Big\rangle. \tag{2.5}$$

Определение 2.10. [57, С. 21] Будем говорить, что функция $a : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ *принадлежит классу $\mathcal{K}$ функций Хана*, если $a(r)$ - непрерывная, строго возрастающая функция, причем $a(0) = 0$.

Имеет место следующая теорема об устойчивости решений, распространяющая теоремы А.М. Ляпунова [22, с. 34, 36] на случай систем дифференциальных включений.

Теорема 2.4. [34, с. 116] *Пусть $D = \{(t, \boldsymbol{x}) : t_0 \leq t < \infty, |\boldsymbol{x}| < \varepsilon_0\}$, правая часть включения (2.4) удовлетворяет основным условиям в за-*

мкнутой области D, $\mathbf{0} \in \operatorname{co} H(t, \mathbf{0})$, и существует функция $V(t, \boldsymbol{x})$ класса $C^1(D)$, для которой

$$V(t, \mathbf{0}) = 0, \ V(t, \boldsymbol{x}) \geq \alpha_1(|\boldsymbol{x}|), \quad \alpha_1 \in \mathcal{K}.$$

Тогда:

1. *Если $\dot{V}^*(t, \boldsymbol{x}) \leq 0$ в D, то решение $\boldsymbol{x}(t) \equiv \mathbf{0}$ системы (2.3) устойчиво.*

2. *Если $\dot{V}^*(t, \boldsymbol{x}) \leq -\alpha_0(|\boldsymbol{x}|)$, $V(t, \boldsymbol{x}) \leq \alpha_2(|\boldsymbol{x}|)$, $(t, \boldsymbol{x}) \in D$, $\alpha_0, \alpha_2 \in \mathcal{K}$ то решение $\boldsymbol{x}(t) \equiv \mathbf{0}$ асимптотически устойчиво.*

Для исследования предельного поведения решений автономных систем с разрывной правой частью может быть использован принцип инвариантности, который доказан в статье [47] для системы дифференциальных включений, имеющей негладкую функцию Ляпунова. Пусть система (2.3) автономна, тогда, очевидно, система (2.4) также автономна, $\operatorname{co} H(t, \boldsymbol{x}) \equiv F(\boldsymbol{x})$.

Определение 2.11. [34, с. 98] Точка $\boldsymbol{q} \in \mathbb{R}^n$ называется *ω-предельной* для решения $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\varphi}(t)$ системы (2.4), определенного при всех $t \geq t_0$, если существует такая последовательность $t_0 \leq t_1 < t_2 < \ldots$, стремящаяся к ∞, что $\boldsymbol{\varphi}(t_n) \to \boldsymbol{q}$ при $n \to \infty$. Множество всех ω-предельных точек решения $\boldsymbol{\varphi}(t)$ называется *ω-предельным множеством* решения и обозначается $\Omega(\boldsymbol{\varphi})$.

Если решение $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\varphi}(t)$ ограничено, то множество $\Omega(\boldsymbol{\varphi})$ не пусто, ограничено и обладает следующим свойством [34, с. 98]:

$$\rho(\boldsymbol{\varphi}(t), \Omega(\boldsymbol{\varphi})) \equiv \inf_{\boldsymbol{y} \in \Omega(\boldsymbol{\varphi})} |\boldsymbol{\varphi}(t) - \boldsymbol{y}| \to 0 \quad \text{при } t \to +\infty. \tag{2.6}$$

Определение 2.12. [47] Множество M называется *слабо - инвариантным* для системы (2.4), если через каждую точку $\boldsymbol{x}_0 \in M$ проходит непродолжаемое решение системы (2.4), содержащееся в M.

Для автономной системы дифференциальных включений множество $\Omega(\boldsymbol{\varphi})$ всегда является слабо-инвариантным [34, с. 99]. Если для автономной системы (2.4) существует дифференцируемая функция Ляпунова $V(\boldsymbol{x})$, обладающая знакоотрицательной верхней производной (2.5), то принцип инвариантности, доказанный в [47] для общего случая недифференцируемых функций Ляпунова, может быть сформулирован следующим образом.

Теорема 2.5. [47] *Предположим, что система (2.4) автономна и существует непрерывно-дифференцируемая функция $V(\boldsymbol{x}) : \mathbb{R}^n \to [0, \infty)$, удовлетворяющая неравенству $\dot{V}^*(\boldsymbol{x}) \leq 0$. Пусть $\boldsymbol{\varphi}(t)$ — ограниченное решение системы (2.4), определенное при $t \geq t_0$ и удовлетворяющее начальному условию $\boldsymbol{\varphi}(t_0) = \boldsymbol{x}_0$, $\boldsymbol{x}_0 \in L_l = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : V(\boldsymbol{x}) \leq l\}$ при некотором $l > 0$.*

Тогда $\Omega(\boldsymbol{\varphi}) \subseteq M$, где M — наибольшее слабо-инвариантное подмножество множества $Z_V \cap L_l$,

$$Z_V = \{\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n : \dot{V}^*(\boldsymbol{x}) = 0\}.$$

Из теоремы 2.5 и свойства (2.6) следует, что если для автономной системы существует функция Ляпунова $V(\boldsymbol{x})$, удовлетворяющая условию 1 теоремы 2.4, и множество Z_V не содержит непродолжаемых траекторий, за исключением $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, то тривиальное решение включения (2.4) асимптотически устойчиво. (Траекторией дифференциального включения (2.4) называется точка или линия в пространстве $\boldsymbol{x}$, определяемая вектор-функцией $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{\varphi}(t)$, которая является решением включения (2.4) [34, с. 95]). Таким образом, утверждение теоремы Е.А. Барбашина - Н.Н. Красовского [22, с. 464] переносится на автономные системы с разрывной правой частью, если в качестве производной функции Ляпунова в силу системы использовать верхнюю производную $\dot{V}^*(\boldsymbol{x})$.

2.3. Асимптотическая устойчивость по формам конечного порядка

Устойчивость по первому приближению. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений возмущенного движения

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{R}(\boldsymbol{x}), \tag{2.7}$$

где $\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)^T$ — фазовый вектор системы, A — вещественная $n \times n$-матрица с постоянными коэффициентами, $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{x})$ — вещественная аналитическая в некоторой окрестности нуля функция, разложение которой в ряд Маклорена начинается членами не ниже второго порядка. Сформулируем теорему А.М. Ляпунова об устойчивости тривиального решения $\boldsymbol{x}(t) = \mathbf{0}$ системы (2.7) по первому приближению.

Теорема 2.6. [22, с. 72-73] *Пусть* $\{\lambda_j\}_{j=1}^n$ *— корни характеристического уравнения* $\det(A - \lambda I) = 0$ *системы линейного приближения.*

1. *Если* $\operatorname{Re}\lambda_j < 0$ *для всех корней характеристического уравнения, то решение* $\boldsymbol{x}(t) = \mathbf{0}$ *системы (2.7) асимптотически устойчиво по Ляпунову, каковы бы ни были нелинейные члены в уравнениях (2.7).*

2. *Если* $\operatorname{Re}\lambda_j > 0$ *для некоторого корня* λ_j*, то тривиальное решение неустойчиво при любом выборе нелинейных членов системы (2.7).*

3. *Если* $\operatorname{Re}\lambda_j \leq 0$ *для всех корней характеристического уравнения, и существуют корни* λ_i*, для которых* $\operatorname{Re}\lambda_i = 0$*, то решение* $\boldsymbol{x}(t) = \mathbf{0}$ *может быть как устойчивым, так и неустойчивым, в зависимости от нелинейных членов системы (2.7)*

Таким образом, все случаи, возникающие при исследовании устойчивости тривиального решения системы вида (2.7) можно разбить на две категории [22, с. 74]: на *некритические* случаи (условия 1 и 2 теоремы 2.6), когда задача об устойчивости решается уравнениями первого при-

ближения, и на *критические* случаи (условие 3), когда необходимо рассмотрение членов порядка выше первого. Запишем характеристическое уравнение системы (2.7):

$$P(\lambda) \equiv \det(A - \lambda I) \equiv c_0\lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + ... + c_n = 0. \qquad (2.8)$$

Пусть Δ_i — определители Гурвица i-го порядка, $i = \overline{1, n}$:

$$\Delta_i = \begin{vmatrix} c_1 & c_3 & c_5 & \dots & & \\ c_0 & c_2 & c_4 & \dots & & \\ 0 & c_1 & c_3 & \dots & & \\ 0 & c_0 & c_2 & c_4 & & \\ & & & & \ddots & \\ 0 & \dots & & & & c_i \end{vmatrix} \qquad (c_k = 0 \text{ при } k > n).$$

Для проверки условия 1 теоремы 2.6, обеспечивающего асимптотическую устойчивость тривиального решения системы (2.7), может быть использован критерий Льенара-Шипара.

Теорема 2.7. (Критерий Льенара-Шипара [94, с. 509]) *Необходимые и достаточные условия для того, чтобы вещественный многочлен* $P(\lambda) \equiv c_0\lambda^n + c_1\lambda^{n-1} + ... + c_n$ $(c_0 > 0)$ *имел все корни с отрицательными вещественными частями, могут быть записаны в любом из следующих четырех видов:*

1. $c_n > 0,\ c_{n-2} > 0, \dots\ ;\ \Delta_1 > 0,\ \Delta_3 > 0,\ \dots$
2. $c_n > 0,\ c_{n-2} > 0, \dots\ ;\ \Delta_2 > 0,\ \Delta_4 > 0,\ \dots$
3. $c_n > 0,\ c_{n-1} > 0,\ c_{n-3} > 0, \dots\ ;\ \Delta_1 > 0,\ \Delta_3 > 0,\ \dots$
4. $c_n > 0,\ c_{n-1} > 0,\ c_{n-3} > 0, \dots\ ;\ \Delta_2 > 0,\ \Delta_4 > 0,\ \dots$.

Исследование устойчивости в критическом случае q пар чисто мнимых корней с помощью принципа сведения. Предположим, что характеристическое уравнение (2.8) имеет q пар чисто мнимых корней $\pm i\omega_k$, $k = \overline{1, q}$, а также $p = n - 2q$ корней с отрицательными вещественными частями. Предположим также, что среди чисто мнимых корней

или нет кратных, или при наличии кратных им соответствуют простые элементарные делители. Тогда система (2.7) невырожденным линейным преобразованием приводится к следующему виду:

$$\begin{aligned}
&\dot{\xi}_k = -\omega_k\eta_k + X_k(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{w}),\\
&\dot{\eta}_k = \omega_k\xi_k + Y_k(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{w}), \quad k=\overline{1,q},\\
&\dot{w}_j = \textstyle\sum_{i=1}^{p} b_{ji}w_i + W_j(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{w}), \quad j=\overline{1,p}\ \ (p+2q=n),
\end{aligned} \tag{2.9}$$

где все собственные числа матрицы (b_{ij}) имеют отрицательные вещественные части, функции $X_k(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{w})$, $Y_k(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{w})$, $W_j(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{w})$ не содержат членов ниже второго порядка. Переменные ξ_k, η_k называются *критическими переменными*, w_j — *переменными присоединенной системы.*

Определим функции $u_j(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})$ в виде формальных степенных рядов, удовлетворяющих системе уравнений в частных производных [26, с. 56]:

$$\sum_{k=1}^{q}\Big[\frac{\partial u_j}{\partial \xi_k}\big(-\omega_k\eta_k + X_k(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{u})\big) + \frac{\partial u_j}{\partial \eta_k}\big(\omega_k\xi_k + Y_k(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{u})\big)\Big] =$$

$$= \sum_{i=1}^{p} b_{ji}u_i + W_j(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{u}), \quad j=\overline{1,p}.$$

Обозначим сумму форм ряда $u_j(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})$ до N-го порядка включительно через $v_j(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta})$ и введем в системе (2.9) следующую замену переменных:

$$w_j = \zeta_j + v_j(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}), \quad j=\overline{1,p}. \tag{2.10}$$

В результате замены (2.10) получается преобразованная система:

$$\begin{aligned}
&\dot{\xi}_k = -\omega_k\eta_k + \textstyle\sum_{m=2}^{\infty}\tilde{X}_k^{(m)}(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\zeta}),\\
&\dot{\eta}_k = \omega_k\xi_k + \textstyle\sum_{m=2}^{\infty}\tilde{Y}_k^{(m)}(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\zeta}),\\
&\dot{\zeta}_j = \textstyle\sum_{i=1}^{p} b_{ji}\zeta_i + \sum_{m=2}^{\infty}\tilde{W}_j^{(m)}(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta},\boldsymbol{\zeta}), \quad k=\overline{1,q},\ j=\overline{1,p},
\end{aligned}$$

где $\tilde{X}_k^{(m)}, \tilde{Y}_k^{(m)}, \tilde{W}_j^{(m)}$ — формы степени m по переменным $\xi_1,...,\xi_q,\eta_1,...,\eta_q,\zeta_1,...,\zeta_p$, причем $\tilde{W}_j^{(m)}(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta},\mathbf{0}) \equiv 0$ при $m \le N$.

Далее рассмотрим *укороченную систему*, которая содержит только критические переменные:

$$\begin{aligned}
&\dot{\xi}_k = -\omega_k\eta_k + \textstyle\sum_{m=2}^{\infty}X_k^{(m)}(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}),\\
&\dot{\eta}_k = \omega_k\xi_k + \textstyle\sum_{m=2}^{\infty}Y_k^{(m)}(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}), \quad k=\overline{1,q},
\end{aligned} \tag{2.11}$$

где $X_k^{(m)}(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}) = \tilde{X}_k^{(m)}(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta},\mathbf{0})$, $Y_k^{(m)}(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta}) = \tilde{Y}_k^{(m)}(\boldsymbol{\xi},\boldsymbol{\eta},\mathbf{0})$.

Г.В. Каменкову принадлежит доказательство следующей теоремы, известной как "принцип сведения".

Теорема 2.8. [26, с. 61] *Если для укороченной системы (2.11) построены функции, удовлетворяющие теореме А.М. Ляпунова об асимптотической устойчивости [22, с. 36], или функции, удовлетворяющие теореме Н.Г. Четаева о неустойчивости [22, с. 53], причем знак производных этих функций определяется суммой форм до N-го порядка включительно правых частей системы (2.11) независимо от форм более высокого порядка, то для системы (2.9) также могут быть построены такие функции.*

В частности, если тривиальное решение системы (2.11) асимптотически устойчиво, независимо от форм $X_k^{(m)}$, $Y_k^{(m)}$ порядка выше N, то тривиальное решение системы (2.9) (и системы (2.7)) асимптотически устойчиво.

Случаи, когда задача об устойчивости решается формами конечного порядка N, называются *алгебраическими* или *несущественно особенными случаями* [25, с. 22], в отличие от *трансцендентных* или *существенно особенных случаев*, когда для решения задачи устойчивости необходимо привлекать всю правую часть системы (2.9). Итак, в несущественно особенных случаях исследование устойчивости системы (2.7) по теореме 2.8 сводится к исследованию устойчивости укороченной системы (2.11) по формам конечного порядка.

Приведение укороченной системы к нормальной форме. Перейдем в укороченной системе (2.11) к комплексно-сопряженным переменным:

$$z_s = \xi_s + i\eta_s, \quad \bar{z}_s = \xi_s - i\eta_s, \quad s = \overline{1,q}.$$

В результате получим следующую систему:

$$\begin{aligned} \dot{z}_s &= i\omega_s z_s + \textstyle\sum_{l=2}^{\infty} Z_s^{(l)}(\boldsymbol{z},\overline{\boldsymbol{z}}), \\ \dot{\bar{z}}_s &= -i\omega_s \bar{z}_s + \textstyle\sum_{l=2}^{\infty} \overline{Z_s^{(l)}}(\boldsymbol{z},\overline{\boldsymbol{z}}), \quad s=\overline{1,q}. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Для дальнейшего исследования системы (2.12) введем нормализующее преобразование переменных [28], [25, с. 41-60]:

$$u_s = z_s + \sum_{n=1}^{\infty} Q_{ns}(\boldsymbol{z},\overline{\boldsymbol{z}}),\ v_s = \bar{z}_s + \sum_{n=1}^{\infty} \overline{Q_{ns}}(\boldsymbol{z},\overline{\boldsymbol{z}}), \quad s=\overline{1,q}. \tag{2.13}$$

Функции $Q_{ns}(\boldsymbol{z},\overline{\boldsymbol{z}})$ вычисляются по формулам [28]:

$$Q_{ns}(\boldsymbol{z},\overline{\boldsymbol{z}}) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T \Big\{\big(C_{ns}(z_1e^{i\omega_1 t},...,z_qe^{i\omega_q t},\bar{z}_1e^{-i\omega_1 t},...,\bar{z}_qe^{-i\omega_q t})-$$

$$-B_{ns}(z_1e^{i\omega_1 t},...,z_qe^{i\omega_q t},\bar{z}_1e^{-i\omega_1 t},...,\bar{z}_qe^{-i\omega_q t})\big)(T-t)e^{-i\omega_s t}\Big\}dt, \tag{2.14}$$

где

$$B_{ns}(\boldsymbol{z},\overline{\boldsymbol{z}}) = \lim_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T C_{ns}(z_1e^{i\omega_1 t},...,z_qe^{i\omega_q t},\bar{z}_1e^{-i\omega_1 t},...,\bar{z}_qe^{-i\omega_q t})e^{-i\omega_s t}dt. \tag{2.15}$$

В формулах (2.14)-(2.15) вспомогательные функции $C_{ns}(\boldsymbol{z},\overline{\boldsymbol{z}})$ определяются через $B_{n-1,s}$, $Q_{n-1,s}$ и коэффициенты правой части системы (2.12) [95]. В частности, $C_{1s}(\boldsymbol{z},\overline{\boldsymbol{z}}) = Z_s^{(2)}(\boldsymbol{z},\overline{\boldsymbol{z}})$. Отметим, что функции Q_{ns}, B_{ns}, C_{ns} являются однородными многочленами своих аргументов степени $n+1$.

С помощью преобразования (2.13) получается *нормальная форма системы (2.12)*, которая может быть записана следующим образом:

$$\dot{u}_s = i\omega_s u_s + \sum_{l=2}^{N}\Big\{\sum_{|k_s|+|l_s|=l} B_s^{(k_{s1},...,k_{sq},l_{s1},...,l_{sq})} u_1^{k_{s1}}\cdots u_q^{k_{sq}} v_1^{l_{s1}}\cdots v_q^{l_{sq}}\Big\} + ...;$$

$$\dot{v}_s = -i\omega_s v_s + \sum_{l=2}^{N}\Big\{\sum_{|k_s|+|l_s|=l} \overline{B_s^{(k_{s1},...,k_{sq},l_{s1},...,l_{sq})}} u_1^{l_{s1}}\cdots u_q^{l_{sq}} v_1^{k_{s1}}\cdots v_q^{k_{sq}}\Big\} + ..., \tag{2.16}$$

где многоточием обозначены члены порядка малости выше N, $B_s^{(k_{s1},...,k_{sq},l_{s1},...,l_{sq})}$ — коэффициенты форм $B_{ns}(\boldsymbol{u},\boldsymbol{v})$, k_{sj}, l_{sj} — неотрицательные целые числа,

$$|k_s| = k_{s1} + ... + k_{sq}, \quad |l_s| = l_{s1} + ... + l_{sq}.$$

В правой части нормализованной системы (2.16) отличны от нуля только те коэффициенты $B_s^{(k_{s1},...,k_{sq},l_{s1},...,l_{sq})}$, показатели которых удовлетворяют резонансному соотношению [25, с. 62]:

$$(K - L)\boldsymbol{\omega} = \boldsymbol{\omega},$$

где K, L — целочисленные $q \times q$-матрицы, составленные из коэффициентов k_{sj}, l_{sj}, соответственно; $\boldsymbol{\omega} = (\omega_1, \omega_2, ..., \omega_q)^T$.

Определение 2.13. [26, с. 62] Будем говорить, что в системе *отсутствует внутренние резонансы до N-го порядка включительно*, если для любых целых чисел m_s, не равных нулю одновременно и удовлетворяющих условию

$$\sum_{s=1}^{q} |m_s| \leq N,$$

выполнено неравенство:

$$\sum_{s=1}^{q} m_s \omega_s \neq 0.$$

Если внутренние резонансы до N-го порядка включительно отсутствуют, то нормализованная система (2.16) не содержит форм четного порядка, а в формах нечетного порядка всегда остаются неуничтожаемые члены — члены тождественного резонанса. Таким образом, при отсутствии внутренних резонансов нормализованная система (2.16) может быть представлена в виде [25, с. 63]:

$$\dot{u}_s = i\omega_s u_s + u_s \sum_{l=3}^{N} \Big\{ \sum_{2|k_s|=l-1} A_s^{(k_{s1},...,k_{sq})} (u_1 v_1)^{k_{s1}} \dots (u_q v_q)^{k_{sq}} \Big\} + ...;$$

$$\dot{v}_s = -i\omega_s v_s + v_s \sum_{l=3}^{N} \Big\{ \sum_{2|k_s|=l-1} \overline{A_s^{(k_{s1},...,k_{sq})}} (u_1 v_1)^{k_{s1}} \dots (u_q v_q)^{k_{sq}} \Big\} + ..., \qquad (2.17)$$

где $A_s^{(k_{s1},...,k_{sq})} = B_s^{(k_{s1},...,k_{ss}+1,...,k_{sq},k_{s1},...,k_{sq})}$.

Для исследования устойчивости в системе (2.17) от комплексно - сопряженных переменных u_s, v_s перейдем к вещественным переменным r_s, θ_s с помощью замены

$$u_s = r_s e^{i\theta_s}, \quad v_s = r_s e^{-i\theta_s}.$$

Нормализованная система (2.17) в переменных r_s, θ_s примет вид

$$\dot{r}_s = r_s \sum_{l=3}^{N} \Big\{ \sum_{2|k_s|=l-1} \mathrm{Re}[A_s^{(k_{s1},\dots,k_{sq})}] \prod_{j=1}^{q} (r_j^2)^{k_{sj}} \Big\} + R_s(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\theta});$$

$$r_s\dot{\theta}_s = \omega_s r_s + r_s \sum_{l=3}^{N} \Big\{ \sum_{2|k_s|=l-1} \mathrm{Im}[A_s^{(k_{s1},\dots,k_{sq})}] \prod_{j=1}^{q} (r_j^2)^{k_{sj}} \Big\} + F_s(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\theta}) \quad (s = \overline{1,q}). \tag{2.18}$$

Если задача устойчивости в системе (2.18) решается формами не выше N-го порядка, то возможно исключить из рассмотрения уравнения для $\dot{\theta}_s$, а в уравнениях для $\dot{r}_s$ пренебречь членами $R_s(\boldsymbol{r}, \boldsymbol{\theta})$ [26, с. 65]. Следовательно, задача исследования устойчивости в несущественно особенном критическом случае q пар чисто мнимых корней без резонанса сведена к исследованию устойчивости следующей системы:

$$\dot{r}_s = r_s \sum_{l=3}^{N} \Big\{ \sum_{2|k_s|=l-1} \mathrm{Re}[A_s^{(k_{s1},\dots,k_{sq})}] r_1^{2k_{s1}} \cdots r_q^{2k_{sq}} \Big\}, \quad s = \overline{1,q}. \tag{2.19}$$

Таким образом, в нерезонансном случае удается понизить порядок исследуемой критической системы с $2q$ до q.

Условия устойчивости по приближению m-го порядка. Обозначим наименьшую степень ненулевых членов в правой части системы (2.19) через m, (m — нечетное число, $3 \le m \le N$). Таким образом, $\mathrm{Re}[A_s^{(k_{s1},\dots,k_{sq})}] = 0$ для всех мультииндексов $k_s : 2|k_s| < m-1$, и для некоторого $k_s : 2|k_s| = m-1$ выполнено условие $\mathrm{Re}[A_s^{(k_{s1},\dots,k_{sq})}] \neq 0$. Запишем систему m-го приближения для системы (2.19):

$$\dot{r}_s = F_s^{(m)}(r_1, \dots, r_q), \quad s = \overline{1,q}, \tag{2.20}$$

где

$$F_s^{(m)} = r_s \sum_{2|k_s|=m-1} \mathrm{Re}[A_s^{(k_{s1},\dots,k_{sq})}] r_1^{2k_{s1}} \cdots r_q^{2k_{sq}}.$$

Н.Н. Красовский доказал теорему об устойчивости по приближению m-го порядка, которую можно сформулировать следующим образом.

Теорема 2.9. [27, с. 114-115] *Тривиальное решение $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{0}$ системы (2.20) асимптотически устойчиво тогда и только тогда, когда для*

всех решений $\boldsymbol{r}(t;t_0,\boldsymbol{r}_0)$, $\boldsymbol{r}(t_0;t_0,\boldsymbol{r}_0)=\boldsymbol{r}_0$ *системы (2.20) выполняется степенная оценка сверху:*

$$|\boldsymbol{r}(t;t_0,\boldsymbol{r}_0)|\leq\Big[\alpha_1|\boldsymbol{r}_0|^{1/p}+\alpha_2(t-t_0)\Big]^p,\quad t\geq t_0, \tag{2.21}$$

где $p=1/(1-m)$, α_1, α_2 *— положительные постоянные. Если решение* $\boldsymbol{r}=\mathbf{0}$ *системы (2.20) асимптотически устойчиво, то решение* $\boldsymbol{r}=\mathbf{0}$ *системы (2.19) также асимптотически устойчиво.*

В.И. Зубов дополнил теорему Н.Н. Красовского утверждением о существовании степенной оценки снизу.

Теорема 2.10. [96, с. 123] *Если решение* $\boldsymbol{r}=\mathbf{0}$ *системы (2.20) асимптотически устойчиво, то для всех решений этой системы* $\boldsymbol{r}(t;t_0,\boldsymbol{r}_0)$, $\boldsymbol{r}_0\neq\mathbf{0}$ *имеют место двусторонние степенные оценки:*

$$\Big[\beta_1|\boldsymbol{r}_0|^{1/p}+\beta_2(t-t_0)\Big]^p\leq|\boldsymbol{r}(t;t_0,\boldsymbol{r}_0)|\leq\Big[\alpha_1|\boldsymbol{r}_0|^{1/p}+\alpha_2(t-t_0)\Big]^p,\quad t\geq t_0, \tag{2.22}$$

где $p=1/(1-m)$, $\alpha_i>0$, $\beta_i>0$ *— некоторые постоянные.*

Некоторые обобщения сформулированных теорем Н.Н. Красовского и В.И. Зубова приведены в статье А.А. Шестакова [62].

Теоремы А.М. Молчанова и Г.В. Каменкова о достаточных условиях устойчивости. Система уравнений (2.20) в переменных $\rho_s=r_s^2\geq 0$ может быть записана следующим образом:

$$\dot\rho_s=\rho_s\sum_{|k_s|=\left[\frac{m-1}{2}\right]}G_s^{(k_{s1},\ldots,k_{sq})}\rho_1^{k_{s1}}\cdots\rho_q^{k_{sq}},\quad s=\overline{1,q}, \tag{2.23}$$

где $G_s^{(k_{s1},\ldots,k_{sq})}=2\mathrm{Re}[A_s^{(k_{s1},\ldots,k_{sq})}]$. Систему (2.23) будем называть *модельной системой* [25, с. 65].

Отметим одно существенное свойство модельной системы (2.23). Если некоторая компонента решения $\rho_s(t)$ равна нулю при $t=t_0$, то она тождественно равна нулю при всех t, для которых определено решение. Следовательно, вопрос об устойчивости тривиального решения системы (2.20) сводится к вопросу об устойчивости решения $\boldsymbol{\rho}(t)=\mathbf{0}$ системы (2.23) в конусе $\rho_s\geq 0$ [28].

Модельная система (2.23) имеет инвариантные лучи, состоящие из частных решений вида $\rho_s = \tilde{\rho}_s \eta(t)$. Подставив эти выражения в (2.23), получим следующую систему уравнений:

$$\frac{d\eta}{dt} = E\eta^{l+1}, \quad \eta(0) = 1, \tag{2.24}$$

$$\tilde{\rho}_s \Big(\sum_{|k_s|=l} G_s^{(k_{s1},\dots,k_{sq})} \tilde{\rho}_1^{k_{s1}} \cdots \tilde{\rho}_q^{k_{sq}} - E \Big) = 0, \quad s = \overline{1,q}, \tag{2.25}$$

где $l = \left[\frac{m-1}{2}\right]$, E — вещественный параметр, аналогичный собственному значению в линейных системах.

Нетривиальные решения системы алгебраических уравнений (2.25), в зависимости от знака E, определяют инвариантные лучи системы (2.23) трех типов: устойчивые ($E < 0$); нейтральные ($E = 0$); неустойчивые ($E > 0$). Все решения нелинейной системы (2.25) можно получить, оставляя в каждом из уравнений либо первый, либо второй множитель.

Имеет место следующий критерий асимптотической устойчивости по формам третьего порядка.

Теорема 2.11. (Критерий А.М. Молчанова, [28]) *Пусть $m = 3$, тогда для асимптотической устойчивости тривиального решения системы (2.23) в конусе $\rho_s \geq 0$ необходимо и достаточно (а для асимптотической устойчивости тривиального решения исходной системы (2.7) достаточно), чтобы внутри и на границе конуса $\rho_s \geq 0$ не было ни одного нейтрального или неустойчивого луча.*

В случае устойчивости по приближению более высокого порядка аналогичный критерий был доказан Г.В. Каменковым [26] для критического случая двух пар чисто мнимых корней, а также В.Г. Веретенниковым [25] для случая трех пар чисто мнимых корней. Теорема Г.В. Каменкова может быть сформулирована в терминах инвариантных лучей следующим образом.

Теорема 2.12. [26, с. 95-97] *Пусть $q = 2$, $m \geq 3$ (m — нечетно). Тогда для асимптотической устойчивости тривиального решения модельной системы (2.23) в конусе $\rho_s \geq 0$ необходимо и достаточно (для*

асимптотической устойчивости исходной системы (2.7) достаточно), чтобы внутри и на границе конуса не было ни одного нейтрального или неустойчивого луча модельной системы.

2.4. Метод функций Ляпунова в теории устойчивости по части переменных

Как отмечается в монографии В.В. Румянцева и А.С. Озиранера [56, с. 6], основным методом исследования задач устойчивости по отношению к части переменных является метод функций Ляпунова. В настоящем подразделе приведены необходимые определения, а также основные теоремы метода функций Ляпунова об асимптотической устойчивости по части переменных.

Для системы (2.3) представим фазовый вектор $\boldsymbol{x}$ и вектор-функцию $\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x})$ в виде

$$\boldsymbol{x} = (y_1,\ldots,y_{n_1},z_1,\ldots,z_{n_2})^T \equiv \left(\boldsymbol{y}^T,\boldsymbol{z}^T\right)^T,$$

$$\boldsymbol{f} = (Y_1,\ldots,Y_{n_1},Z_1,\ldots,Z_{n_2})^T \equiv \left(\boldsymbol{Y}^T,\boldsymbol{Z}^T\right)^T.$$

Тогда система (2.3) запишется следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{\boldsymbol{y}} &= \boldsymbol{Y}(t,\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}), \\ \dot{\boldsymbol{z}} &= \boldsymbol{Z}(t,\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}),\ \boldsymbol{y}\in\mathbb{R}^{n_1},\ \boldsymbol{z}\in\mathbb{R}^{n_2}. \end{aligned} \tag{2.26}$$

Предполагается, что $\boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{0}) \equiv \boldsymbol{0}$; таким образом, система (2.26) имеет тривиальное решение $\boldsymbol{y}(t)=0$, $\boldsymbol{z}(t)=0$. Введем стандартные обозначения:

$$|\boldsymbol{y}| = \Big(\sum_{i=1}^{n_1} {y_i}^2\Big)^{1/2},\ |\boldsymbol{z}| = \Big(\sum_{i=1}^{n_2} {z_i}^2\Big)^{1/2},\ |\boldsymbol{x}| = \Big(|\boldsymbol{y}|^2+|\boldsymbol{z}|^2\Big)^{1/2}.$$

Если не оговорено противное, то в соответствии с [56, с. 15] будем предполагать, что:

1. Правые части системы (2.26) в замкнутой области

$$\mathcal{D} = \{(t, \boldsymbol{x}) : \ t \geq 0, \ |\boldsymbol{y}| \leq H = \text{const}, \ \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^{n_2}\}, \quad (0 < H \leq +\infty) \tag{2.27}$$

непрерывны и удовлетворяют условиям единственности решения задачи Коши;

2. Решения системы (2.26) *$\boldsymbol{z}$-продолжимы*, т.е. любое решение $\boldsymbol{x}(t)$ системы (2.26) определено при всех $t \geq 0$, для которых $|\boldsymbol{y}(t)| \leq H$.

Отметим, что условие 2 выполняется во всех прикладных задачах, поскольку оно означает, что ни одна из координат $z_i(t)$ за конечное время не уходит в бесконечность.

Пусть $\boldsymbol{x}(t; t_0, \boldsymbol{x}_0)$ — решение системы (2.26), определенное на промежутке времени $[t_0, T)$, $T \leq +\infty$, и удовлетворяющее начальному условию $\boldsymbol{x}(t_0; t_0, \boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{x}_0$. Приведем определения устойчивости и асимптотической устойчивости по отношению к части переменных.

Определение 2.14. [56, с. 15] Невозмущенное решение $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ системы (2.26) называется *$\boldsymbol{y}$-устойчивым*, если для всяких $\varepsilon > 0$, $t_0 \geq 0$ найдется $\delta(\varepsilon, t_0) > 0$ такое, что всякое решение $\boldsymbol{x}(t; t_0, \boldsymbol{x}_0)$ системы (2.26) с $|\boldsymbol{x}_0| < \delta$ определено для всех $t \geq t_0$ и удовлетворяет неравенству $|\boldsymbol{y}(t; t_0, \boldsymbol{x}_0)| < \varepsilon$ при всех $t \geq t_0$.

Если условия определения 2.14 не выполняются, то решение $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ называется *$\boldsymbol{y}$-неустойчивым.*

Определение 2.15. [56, с. 16] Решение $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ называется *$\boldsymbol{y}$- притягивающим*, если для любого $t_0 \geq 0$ существует $\Delta(t_0) > 0$ такое, что каждое решение $\boldsymbol{x}(t; t_0, \boldsymbol{x}_0)$ системы (2.26) с $|\boldsymbol{x}_0| < \Delta$ определено для всех $t \geq t_0$ и удовлетворяет условию

$$\lim_{t \to +\infty} |\boldsymbol{y}(t; t_0, \boldsymbol{x}_0)| = 0;$$

при этом будем говорить, что шар $|\boldsymbol{x}| < \Delta$ лежит в *области $\boldsymbol{y}$-притяжения* точки $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ для начального момента t_0.

Определение 2.16. [56, с. 16] Решение $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ системы (2.26) называется *асимптотически $\boldsymbol{y}$-устойчивым*, если оно является $\boldsymbol{y}$-устойчивым и $\boldsymbol{y}$-притягивающим.

Определение 2.17. [56, с. 71] Множество $M = \{\boldsymbol{x} : \boldsymbol{y} = \mathbf{0}\}$ называется *равномерно асимптотически устойчивым*, если выполнены следующие условия:

1. (равномерная устойчивость) для любых $\varepsilon > 0$, $t_0 \geq 0$ найдется $\delta(\varepsilon) > 0$ (не зависящее от t_0) такое, что всякое решение $\boldsymbol{x}(t; t_0, \boldsymbol{x}_0)$ с $|\boldsymbol{y}_0| < \delta$ определено на $[t_0, \infty)$ и удовлетворяет условию $|\boldsymbol{y}(t; t_0, \boldsymbol{x}_0)| < \varepsilon$ при всех $t \geq t_0$;

2. (равномерное притяжение) существует такая константа $\Delta_0 > 0$, что для всякого $\varepsilon > 0$ найдется $T(\varepsilon) > 0$ такое, что из условий $t_0 \geq 0$, $|\boldsymbol{y}_0| < \Delta_0$ следует $|\boldsymbol{y}(t; t_0, \boldsymbol{x}_0)| < \varepsilon$ для всех $t \geq t_0 + T(\varepsilon)$.

Определение 2.18. [56, с. 104] Множество $M = \{\boldsymbol{x} : \boldsymbol{y} = \mathbf{0}\}$ называется *равномерно асимптотически устойчивым в целом*, если оно равномерно асимптотически устойчиво и условие 2 из определения 2.17 выполнено для любого $\Delta_0 > 0$ (при этом предполагается, что замкнутая область (2.27) имеет вид $\mathcal{D} = [0, +\infty) \times \mathbb{R}^n$).

Легко видеть, что из равномерной асимптотической устойчивости множества $M = \{\boldsymbol{x} : \boldsymbol{y} = \mathbf{0}\}$ следует асимптотическая $\boldsymbol{y}$-устойчивость тривиального решения в смысле определения 2.16.

Сформулируем теорему А.С. Озиранера, которая распространяет известную теорему А.М. Ляпунова об асимптотической устойчивости [22, с. 195] на случай асимптотической устойчивости по отношению к части переменных.

Теорема 2.13. [56, с. 71, 105] *Пусть существует функция $V \in C^1(\mathcal{D})$, которая при всех $(t, \boldsymbol{x}) \in \mathcal{D}$ удовлетворяет условиям:*

$$a(|\boldsymbol{y}|) \leq V(t, \boldsymbol{x}) \leq b(|\boldsymbol{y}|), \quad a, b \in \mathcal{K},$$

$$\dot{V}_{(2.26)} \equiv \frac{\partial V}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n_1} \frac{\partial V}{\partial y_j} Y_j + \sum_{j=1}^{n_2} \frac{\partial V}{\partial z_j} Z_j \leq -c(|\boldsymbol{y}|), \quad c \in \mathcal{K},$$

где $\mathcal{K}$ — класс функций Хана. Тогда множество $M = \{\boldsymbol{x} : \boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}\}$ равномерно асимптотически устойчиво для системы (2.26). Кроме того, если $\mathcal{D} = [0, +\infty) \times \mathbb{R}^n$, $a(r) \to \infty$ при $r \to \infty$, то множество M равномерно асимптотически устойчиво в целом.

Замечание 2.1. [56, с. 30] При выполнении условий теоремы 2.13 необходимо выполняется тождество $\boldsymbol{Y}(t, \boldsymbol{0}, \boldsymbol{z}) \equiv \boldsymbol{0}$, т.е. множество $\{\boldsymbol{x} : \boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}\}$ является инвариантным для системы (2.26).

Замечание 2.2. Для неавтономных систем А.С. Озиранер доказал теорему [56, с. 72], обратную к теореме 2.13 при условиях ограниченности правой части системы вместе с ее частными производными, при этом для автономной системы функция Ляпунова может быть построена не зависящей от времени. А.О. Игнатьев доказал более сильный результат, который может быть сформулирован следующим образом.

Теорема 2.14. [64, с. 146] *Предположим, что выполнены условия:*

1. $\boldsymbol{Y}(t, \boldsymbol{0}, \boldsymbol{z}) \equiv \boldsymbol{0}$;

2. *функции $\boldsymbol{Y}(t, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$, $\boldsymbol{Z}(t, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z})$ ограничены и удовлетворяют условию Липшица по $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{z}$ в замкнутой области $[0, +\infty) \times \overline{H_0} \times \mathbb{R}^{n_2} \subset \mathcal{D}$, где $H_0 = \{\boldsymbol{y} : |\boldsymbol{y}| < \Delta_0\}$;*

3. *множество $M = \{\boldsymbol{x} : \boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}\}$ равномерно асимптотически устойчиво и область $H_0 \times \mathbb{R}^{n_2}$ лежит в области $\boldsymbol{y}$-притяжения системы (2.26).*

Тогда существует функция $V(t, \boldsymbol{x}) \in C^1\Big([0, +\infty) \times H_0 \times \mathbb{R}^{n_2}\Big)$, удовлетворяющая условиям теоремы 2.13.

Если, кроме того, система (2.26) автономна, то указанная функция $V(t, \boldsymbol{x})$ не зависит явно от времени и имеет ограниченные частные производные любого порядка по всем переменным (каждая производная ограничена своей константой).

Замечание 2.3. Теорема 2.14 обосновывает универсальность метода функций Ляпунова для изучения равномерной асимптотической устойчивости множества $\{\boldsymbol{x} : \boldsymbol{y} = \mathbf{0}\}$ (для систем с глобально липшицевыми правыми частями). В то же время следует отметить [56, с. 82], что теоремы о равномерной асимптотической $\boldsymbol{y}$-устойчивости решения $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, предъявляющие более слабые (по сравнению с теоремой 2.13) требования к функции Ляпунова, вообще говоря необратимы. Этот факт обуславливает интерес к исследованию задач стабилизации по части переменных с помощью теоремы 2.13.

Следующая теорема обобщает теорему Е.А. Барбашина - Н.Н. Красовского [22, с. 464] на случай асимптотической устойчивости по части переменных.

Теорема 2.15. (К. Ризито - В.В. Румянцев [56, с. 99]) *Пусть система (2.26) автономна и, кроме того, выполнены следующие условия:*

1. *каждое решение системы (2.26), начинающееся в некоторой окрестности точки $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$, ограничено;*

2. *существует дифференцируемая функция $V(\boldsymbol{x})$ такая, что*

$$V(\boldsymbol{x}) \geq a(|\boldsymbol{y}|), \quad a \in \mathcal{K},$$

$$\dot{V}_{(2.26)}(\boldsymbol{x}) = 0 \text{ при } \boldsymbol{x} \in M_0, \quad \dot{V}_{(2.26)}(\boldsymbol{x}) < 0 \text{ при } \boldsymbol{x} \notin M_0;$$

3. *множество $M = \{\boldsymbol{x} : \boldsymbol{y} = \mathbf{0}\}$ инвариантно;*

4. *множество $M_0 \setminus M$ не содержит целых полутраекторий системы (2.26) при $t \in [0, +\infty)$.*

Тогда решение $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ системы (2.26) асимптотически $\boldsymbol{y}$-устойчиво.

Замечание 2.4. Как показал А.С. Озиранер [56, с. 100], утверждение теоремы 2.15 перестает быть верным, если отказаться от условия ограниченности решений.

Для проверки условия ограниченности решений системы (2.26) относительно части переменных могут быть использованы теоремы метода функций Ляпунова. Предположим, что замкнутая область (2.27) имеет вид $\mathcal{D} = [0, +\infty) \times \mathbb{R}^n$. Будем также предполагать, что любое решение $\boldsymbol{x}(t; t_0, \boldsymbol{x}_0)$ системы (2.26) определено при всех $t \geq t_0$.

Определение 2.19. [56, с. 224] Решения системы (2.26) называются *$\boldsymbol{z}$-ограниченными равномерно по* $\{t_0, \boldsymbol{x}_0\}$, если для любых $t_0 \geq 0$ и компакта $K \subset \mathbb{R}^n$ найдется $N(K) > 0$ (не зависящее от t_0) такое, что из условия $\boldsymbol{x}_0 \in K$ следует $|\boldsymbol{z}(t; t_0, \boldsymbol{x}_0)| \leq N$ для всех $t \geq t_0$.

Теорема 2.16. (А.С. Озиранер [56, с. 224]) *Для того, чтобы решения системы (2.26) были $\boldsymbol{z}$-ограниченными равномерно по* $\{t_0, \boldsymbol{x}_0\}$, *необходимо и достаточно, чтобы существовала функция $V(t, \boldsymbol{x})$, которая в замкнутой области (2.27) удовлетворяет условиям*

$$a(|\boldsymbol{z}|) \leq V(t, \boldsymbol{x}) \leq b(|\boldsymbol{x}|),$$

$$a(r) \to +\infty \quad \text{при} \quad r \to +\infty,$$

причем для любого решения $\boldsymbol{x}(t; t_0, \boldsymbol{x}_0)$ функция $V(t, \boldsymbol{x}(t; t_0, \boldsymbol{x}_0))$ не возрастает.

Замечание 2.5. Если $V \in C^1(\mathcal{D})$, то (в части достаточности) условие невозрастания функции $V(t, \boldsymbol{x}(t; t_0, \boldsymbol{x}_0))$ можно заменить требованием $\dot{V} \leq 0$ в силу системы (2.26).

РАЗДЕЛ III
СТАБИЛИЗАЦИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ УПРАВЛЯЕМЫХ СИСТЕМ

Хорошо известно [18], что если система линейного приближения для системы (2.1) является вполне управляемой, то система (2.1) является стабилизируемой. В связи с этим результатом возникает естественный вопрос: является ли в общем случае локальная управляемость нелинейной системы (2.1) достаточным условием ее стабилизируемости с помощью обратной связи вида $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$? Как показал Р. Брокетт [2], ответ на такой вопрос отрицателен, если в качестве обратных связей $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ рассматривать функции класса $C^1(\mathbb{R}^n)$. Классической иллюстрацией этого факта является пример Брокетта (1.3), который может быть записан следующим образом:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = u_1 \boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{x}) + u_2 \boldsymbol{f}_2(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3,\ \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^2, \tag{3.1}$$

где

$$\boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{x}) = (1, 0, x_2)^T,\ \boldsymbol{f}_2(\boldsymbol{x}) = (0, 1, -x_1)^T.$$

Билинейная система (3.1) является вполне управляемой, а также локально управляемой в каждой точке $\boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^3$ на основании теоремы Чжоу [97, Теорема 2], поскольку $\operatorname{rank}\big(\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2, [\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2]\big) \equiv 3$. Здесь $[\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2]$ — скобка Ли (коммутатор) векторных полей $\boldsymbol{f}_1$, $\boldsymbol{f}_2$:

$$[\boldsymbol{f}_1, \boldsymbol{f}_2] = \frac{\partial \boldsymbol{f}_2}{\partial \boldsymbol{x}} \boldsymbol{f}_1 - \frac{\partial \boldsymbol{f}_1}{\partial \boldsymbol{x}} \boldsymbol{f}_2 = (0, 0, -2)^T,$$

где $\frac{\partial \boldsymbol{f}_i}{\partial \boldsymbol{x}}$ обозначает матрицу Якоби отображения $\boldsymbol{f}_i(\boldsymbol{x})$. Несмотря на управляемость, система (3.1) не является стабилизируемой с помощью обратной связи класса $C^1(\mathbb{R}^3)$. Действительно, ни при каком $\varepsilon \neq 0$ нельзя подобрать векторы $\boldsymbol{x}$, $\boldsymbol{u}$ удовлетворяющими алгебраическому уравнению

$$u_1 \boldsymbol{f}_1(\boldsymbol{x}) + u_2 \boldsymbol{f}_2(\boldsymbol{x}) = (0, 0, \varepsilon)^T,$$

а значит необходимое условие стабилизируемости Брокетта (Теорема 1.1 на с. 12) не выполнено для системы (3.1).

Следует отметить, что Е. Райан [3] доказал необходимость условия Брокетта и для асимптотической стабилизируемости с помощью разрывной обратной связи, если только решения системы дифференциальных уравнений с разрывной правой частью определять по А.Ф. Филиппову [34].

Таким образом, не для всякой локально управляемой автономной системы (2.1) существует разрывная обратная связь $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$, обеспечивающая равномерную асимптотическую устойчивость положения равновесия. Настоящий раздел посвящен задаче неасимптотической стабилизации общих нелинейных управляемых систем, а также исследованию асимптотических свойств решений систем специального вида.

3.1. Условия локальной управляемости и достижимости в терминах ориентированных многообразий

Теорема 2.1 на с. 28 устанавливает необходимые и достаточные условия управляемости системы (2.1) “в большом”, т.е. во всей области D. В данном подразделе аналогичные условия распространяются на случай управляемости в достаточно малой окрестности некоторой точки $\boldsymbol{x}_0 \in D$. Введем следующие определения.

Определение 3.1. [51, 98] Пусть $\boldsymbol{x}_0 \in D$. Будем говорить, что система (2.1) удовлетворяет *свойству достижимости из точки* $\boldsymbol{x}_0$, если всякая точка некоторой δ-окрестности $B(\boldsymbol{x}_0, \delta)$ точки $\boldsymbol{x}_0$ является достижимой из $\boldsymbol{x}_0$ в области D, т.е. $Or^+\{\boldsymbol{x}_0\} \supseteq B(\boldsymbol{x}_0, \delta)$ для некоторого $\delta > 0$.

Определение 3.2. [98] Пусть $\boldsymbol{x}_0 \in D$. Будем говорить, что система (2.1) удовлетворяет *свойству достижимости в точке* $\boldsymbol{x}_0$, если $Or^-\{\boldsymbol{x}_0\} \supseteq B(\boldsymbol{x}_0, \delta)$ для некоторого $\delta > 0$.

Замечание 3.1. Легко видеть, что если система (2.1) удовлетворяет одновременно свойствам достижимости *из точки* и *в точке* $\boldsymbol{x}_0 \in D$, то система управляема в некоторой δ-окрестности $\boldsymbol{x}_0$, а именно для всех $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in B(\boldsymbol{x}_0, \delta)$ точка $\boldsymbol{x}_2$ является достижимой из $\boldsymbol{x}_1$ в области D.

Замечание 3.2. Свойство достижимости в точке $\boldsymbol{x}_0$ для системы (2.1) равносильно свойству достижимости из точки $\boldsymbol{x}_0$ для системы с обращенным временем:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = -\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}). \tag{3.2}$$

Вообще говоря, положительные орбиты $Or^+\{\boldsymbol{x}_0\}$ для систем (2.1) и (3.2) различны, поэтому определения 3.1 и 3.2 в общем случае не эквивалентны. Пусть $\mathbb{U} = \mathbb{R}^m$. Эквивалентность определений 3.1 и 3.2 имеет место при выполнении какого-либо из следующих дополнительных условий.

1. Система линейного приближения для системы (2.1) полностью управляема [99, с. 399, Теорема 1].

2. Система (2.1) является симметрической [100, с. 158], т.е. для любого $\boldsymbol{u} \in \mathbb{U}$ существует $\bar{\boldsymbol{u}} \in \mathbb{U}$ такое, что $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) = -\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \bar{\boldsymbol{u}})$.

3. Функция $\boldsymbol{f}$ является аналитической, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{0}) = \boldsymbol{0}$ (см. например [98]).

4. Система (2.1) задана на компактном многообразии M, функция $\boldsymbol{f}$ аналитична, для всякого постоянного управления динамическая система (2.1) сохраняет естественную меру на многообразии M [100, Теорема III.2.3].

5. Функция $\boldsymbol{f}$ аналитична и линейна по управлению, все решения системы $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{0})$, начинающиеся в некоторой окрестности точки $\boldsymbol{x}_0$, являются периодическими с равномерно ограниченными периодами [97, Теорема 4].

Таким образом, при выполнении любого из вышеперечисленных условий свойства достижимости эквивалентны свойству управляемости системы (2.1) в окрестности точки $\boldsymbol{x}_0$.

Отметим, что определения 3.1 и 3.2 не накладывают ограничений на максимальное отклонение решений системы (2.1) от точки $\boldsymbol{x}_0$. Свойства достижимости и управляемости системы вблизи $\boldsymbol{x}_0$, накладывающие дополнительные условия малости отклонений, будем называть локальными.

Определение 3.3. [101] Точка $\boldsymbol{x}_0 \in D$ называется *точкой локальной управляемости* для системы (2.1), если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta(\boldsymbol{x}_0, \varepsilon) > 0$, что для каждых $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in B(\boldsymbol{x}_0, \delta)$ точка $\boldsymbol{x}_2$ достижима из $\boldsymbol{x}_1$ с помощью решения системы (2.1), лежащего в $B(\boldsymbol{x}_0, \varepsilon)$.

Определение 3.4. Будем говорить, что $\boldsymbol{x}_0 \in D$ является *точкой локальной достижимости* для системы (2.1), если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta(\boldsymbol{x}_0, \varepsilon) > 0$, что всякая точка $\boldsymbol{x} \in B(\boldsymbol{x}_0, \delta)$ достижима из $\boldsymbol{x}_0$ с помощью решения системы (2.1), лежащего в $B(\boldsymbol{x}_0, \varepsilon)$.

Замечание 3.3. Нетрудно показать [101, с. 53], что если каждая точка области D является точкой локальной управляемости, то система (2.1) управляема в области D.

Определение 3.5. *Положительной* $\{\boldsymbol{x}_0, \varepsilon\}$*-орбитой точки* $\boldsymbol{x}$ называется множество точек $Or^+_{\{\boldsymbol{x}_0,\varepsilon\}}\{\boldsymbol{x}\}$, достижимых из $\boldsymbol{x}$ решениями системы (2.1), лежащими в $B(\boldsymbol{x}_0, \varepsilon)$. *Отрицательной* $\{\boldsymbol{x}_0, \varepsilon\}$*-орбитой точки* $\boldsymbol{x}$ называется множество точек $Or^-_{\{\boldsymbol{x}_0,\varepsilon\}}\{\boldsymbol{x}\}$, из которых достижима точка $\boldsymbol{x}$ с помощью решений системы (2.1), лежащих в $B(\boldsymbol{x}_0, \varepsilon)$.

Определение 3.6. Множество $M \subseteq B(\boldsymbol{x}_0, \varepsilon)$ называется *положительно* $\{\boldsymbol{x}_0, \varepsilon\}$*-ориентированным* (соответственно, *отрицательно* $\{\boldsymbol{x}_0, \varepsilon\}$*-ориентированным*) для системы (2.1), если $M = Or^+_{\{\boldsymbol{x}_0,\varepsilon\}}M$ (соответственно, $M = Or^-_{\{\boldsymbol{x}_0,\varepsilon\}}M$), где

$$Or^+_{\{\boldsymbol{x}_0,\varepsilon\}}M = \bigcup_{\boldsymbol{x}\in M} Or^+_{\{\boldsymbol{x}_0,\varepsilon\}}\{\boldsymbol{x}\}, \quad Or^-_{\{\boldsymbol{x}_0,\varepsilon\}}M = \bigcup_{\boldsymbol{x}\in M} Or^-_{\{\boldsymbol{x}_0,\varepsilon\}}\{\boldsymbol{x}\}.$$

Если $M = Or^+_{\{\boldsymbol{x}_0,\varepsilon\}}M$ или $M = Or^+_{\{\boldsymbol{x}_0,\varepsilon\}}M$, то множество M называется $\{\boldsymbol{x}_0, \varepsilon\}$*-ориентированным.*

Лемма 3.1. *Для того, чтобы точка* $\boldsymbol{x}_0 \in D$ *являлась точкой*

локальной достижимости для системы (2.1) необходимо и достаточно, чтобы для всякого $\varepsilon > 0$ отсутствовали положительно $\{\boldsymbol{x}_0, \varepsilon\}$-ориентированные множества $M_0 \subseteq B(\boldsymbol{x}_0, \varepsilon)$, удовлетворяющие условиям $\boldsymbol{x}_0 \in M_0$, $\boldsymbol{x}_0 \notin \operatorname{int} M_0$.

Доказательство. *Необходимость* доказывается рассуждением от противного. Предположим, что существуют число $\varepsilon > 0$ и положительно $\{\boldsymbol{x}_0, \varepsilon\}$-ориентированное множество $M_0 \subseteq B(\boldsymbol{x}_0, \varepsilon)$, для которых $\boldsymbol{x}_0 \in M_0$, $\boldsymbol{x}_0 \notin \operatorname{int} M_0$. Поскольку $\boldsymbol{x}_0 \in M_0$, то $Or^+_{\{\boldsymbol{x}_0,\varepsilon\}}\{\boldsymbol{x}_0\} \subseteq M_0$; отсюда следует, что $\boldsymbol{x}_0 \notin \operatorname{int} Or^+_{\{\boldsymbol{x}_0,\varepsilon\}}\{\boldsymbol{x}_0\}$. Получено противоречие со свойством локальной достижимости.

Достаточность. Для произвольного $\varepsilon > 0$ множество $Or^+_{\{\boldsymbol{x}_0,\varepsilon\}}\{\boldsymbol{x}_0\}$ содержит $\boldsymbol{x}_0$ и является положительно $\{\boldsymbol{x}_0, \varepsilon\}$-ориентированным. Тогда по условию леммы $\boldsymbol{x}_0 \in \operatorname{int} Or^+_{\{\boldsymbol{x}_0,\varepsilon\}}\{\boldsymbol{x}_0\}$, а значит существует такое $\delta(\boldsymbol{x}_0, \varepsilon) > 0$, что $Or^+_{\{\boldsymbol{x}_0,\varepsilon\}}\{\boldsymbol{x}_0\} \supseteq B(\boldsymbol{x}_0, \delta)$. Следовательно, $\boldsymbol{x}_0$ является точкой локальной достижимости для системы (2.1). Лемма доказана.

Следующая лемма является критерием локальной управляемости в терминах ориентированных множеств.

Лемма 3.2. *Для того, чтобы точка $\boldsymbol{x}_0 \in D$ являлась точкой локальной управляемости для системы (2.1) необходимо и достаточно, чтобы для всякого $\varepsilon > 0$ у системы (2.1) отсутствовали $\{\boldsymbol{x}_0, \varepsilon\}$-ориентированные множества $M_0 \subseteq B(\boldsymbol{x}_0, \varepsilon)$, удовлетворяющие условиям $\boldsymbol{x}_0 \in M_0$, $\boldsymbol{x}_0 \notin \operatorname{int} M_0$.*

Доказательство. Для доказательства *необходимости* воспользуемся рассуждением от противного. Пусть вопреки утверждению леммы для некоторого $\varepsilon > 0$ найдется $\{\boldsymbol{x}_0, \varepsilon\}$-ориентированное множество $M_0 \subseteq B(\boldsymbol{x}_0, \varepsilon)$, удовлетворяющие условиям $\boldsymbol{x}_0 \in M_0$, $\boldsymbol{x}_0 \notin \operatorname{int} M_0$. Возможны два случая.

1. Если $M_0 = Or^+_{\{\boldsymbol{x}_0,\varepsilon\}} M_0$, то $Or^+_{\{\boldsymbol{x}_0,\varepsilon\}}\{\boldsymbol{x}_0\} \subseteq M_0$. Следовательно, $\boldsymbol{x}_0 \notin \operatorname{int} Or^+_{\{\boldsymbol{x}_0,\varepsilon\}}\{\boldsymbol{x}_0\}$ (из точки $\boldsymbol{x}_0$ нельзя достичь никакой δ- окрестности $B(\boldsymbol{x}_0, \delta)$ с помощью решений, лежащих в $B(\boldsymbol{x}_0, \varepsilon)$).

2. Если $M_0 = Or^-_{\{\boldsymbol{x}_0,\varepsilon\}} M_0$, то $Or^-_{\{\boldsymbol{x}_0,\varepsilon\}}\{\boldsymbol{x}_0\} \subseteq M_0$. В этом случае ни при каком $\delta > 0$ нельзя достичь точку $\boldsymbol{x}_0$ из $B(\boldsymbol{x}_0, \delta)$ решениями, принадлежащими $B(\boldsymbol{x}_0, \varepsilon)$.

Получено противоречие со свойством локальной управляемости в точке $\boldsymbol{x}_0$.

Достаточность. По условию леммы для всякого $\varepsilon > 0$ каждое из $\{\boldsymbol{x}_0, \varepsilon\}$-ориентированных множеств $Or^+_{\{\boldsymbol{x}_0,\varepsilon\}}\{\boldsymbol{x}_0\}$ и $Or^-_{\{\boldsymbol{x}_0,\varepsilon\}}\{\boldsymbol{x}_0\}$ содержит некоторую δ-окрестность точки $\boldsymbol{x}_0$. Отсюда следует, что для каждых $\boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in B(\boldsymbol{x}_0, \delta)$ точка $\boldsymbol{x}_2$ достижима из $\boldsymbol{x}_1$ с помощью решения системы (2.1), лежащего в $B(\boldsymbol{x}_0, \varepsilon)$ и проходящего через $\boldsymbol{x}_0$. Локальная управляемость доказана.

Пусть множество M_0 является многообразием с дифференцируемой границей ∂M_0, заданной в виде системы уравнений $V_i(\boldsymbol{x}) = 0$, $i = \overline{1, n-1}$, где функции $V_i(\boldsymbol{x})$ являются непрерывно-дифференцируемыми в некоторой ε-окрестности $B(\boldsymbol{x}_0, \varepsilon)$. При этом внутренность M_0 определяется следующими соотношениями:

$$V_1(\boldsymbol{x}) < 0,\ V_2(\boldsymbol{x}) = ... = V_{n-1}(\boldsymbol{x}) = 0.$$

Функция $V_1(\boldsymbol{x}_0)$ предполагается знакопеременной, $\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{x}} V_1(\boldsymbol{x}_0) \neq \boldsymbol{0}$. Предполагается также, что каждая из функций $V_i(\boldsymbol{x}_0)$, $i = \overline{2, n-1}$ либо является знакопеременной (в этом случае считаем, что $\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{x}} V_i(\boldsymbol{x}) \neq \boldsymbol{0}$), либо тождественно равна нулю. Напомним, что знакопеременной в $\boldsymbol{x}_0$ называется такая функция, которая в любой окрестности $\boldsymbol{x}_0$ принимает как положительные, так и отрицательные значения.

Условие положительной $\{\boldsymbol{x}_0, \varepsilon\}$-ориентированности многообразия M_0, состоящее в том, что векторы $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$ в точках ∂M_0 направлены во внутренность M_0 при всех $\boldsymbol{u} \in \mathbb{U}$, может быть записано следующим образом:

$$V_1(\boldsymbol{x}) = ... = V_{n-1}(\boldsymbol{x}) = 0,\ |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0| < \varepsilon \ \Rightarrow\ \left\langle \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{x}} V_1(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) \right\rangle \leq 0; \quad (3.3)$$

$$V_1(\boldsymbol{x}) \le 0,\ V_2(\boldsymbol{x}) = ... = V_{n-1}(\boldsymbol{x}) = 0,\ |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0| < \varepsilon \ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \ \big\langle \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{x}} V_i(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) \big\rangle = 0,\ i = \overline{2, n-1}. \tag{3.4}$$

Аналогично, если внутренность многообразия M_0 определяется соотношением $V_1(\boldsymbol{x}) > 0$, то условия положительной $\{\boldsymbol{x}_0, \varepsilon\}$-ориентированности M_0 примут вид

$$V_1(\boldsymbol{x}) = ... = V_{n-1}(\boldsymbol{x}) = 0,\ |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0| < \varepsilon \ \Rightarrow \ \big\langle \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{x}} V_1(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) \big\rangle \ge 0; \tag{3.5}$$

$$V_1(\boldsymbol{x}) \ge 0,\ V_2(\boldsymbol{x}) = ... = V_{n-1}(\boldsymbol{x}) = 0,\ |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0| < \varepsilon \ \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \ \big\langle \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{x}} V_i(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) \big\rangle = 0,\ i = \overline{2, n-1}. \tag{3.6}$$

Из леммы 3.1 следует, что для локально достижимой системы (2.1) всякое многообразие M_0, задаваемое набором знакопеременных функций $V_i(\boldsymbol{x})$, не является положительно $\{\boldsymbol{x}_0, \varepsilon\}$-ориентированным (т.е. не удовлетворяет условиям (3.3)-(3.4) или (3.5)-(3.6) ни при каком $\varepsilon > 0$). Итак, доказана следующая лемма.

Лемма 3.3. *Предположим, что точка $\boldsymbol{x}_0 \in D$ является точкой локальной достижимости для системы (2.1), $V_1(\boldsymbol{x})$ — знакопеременная непрерывно-дифференцируемая в некоторой окрестности $\boldsymbol{x}_0$ функция, удовлетворяющая условию $\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{x}} V_1(\boldsymbol{x}_0) \ne \boldsymbol{0}$. Тогда для всякого $\varepsilon > 0$ существуют $\boldsymbol{x}_+, \boldsymbol{x}_- \in B(\boldsymbol{x}_0, \varepsilon)$, $\boldsymbol{u}_+, \boldsymbol{u}_- \in \mathbb{U}$ такие, что:*

$$\big\langle \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{x}} V_1(\boldsymbol{x}_+), \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_+, \boldsymbol{u}_+) \big\rangle > 0; \tag{3.7}$$

$$\big\langle \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{x}} V_1(\boldsymbol{x}_-), \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_-, \boldsymbol{u}_-) \big\rangle < 0. \tag{3.8}$$

Замечание 3.4. Существование векторов $\boldsymbol{x}_+$, $\boldsymbol{x}_-$, удовлетворяющих условиям (3.7)-(3.8) в сколь угодно малой ε-окрестности точки $\boldsymbol{x}_0$, является следствием свойства малости отклонений решений в определении локальной достижимости (определение 3.4). Если же характеризовать свойство достижимости из точки $\boldsymbol{x}_0$ в смысле определения 3.1, то, вообще говоря, нельзя гарантировать что управления $\boldsymbol{u}_+$, $\boldsymbol{u}_-$ найдутся для

близких к $\boldsymbol{x}_0$ фазовых векторов $\boldsymbol{x}_+$, $\boldsymbol{x}_-$. Поэтому при исследовании вопроса о стабилизируемости системы (2.1) методом функций Ляпунова будем предполагать, что достаточно близкие к особой точке состояния системы являются локально достижимыми (в смысле определения 3.4).

Свойства положительной ориентированности (3.3)-(3.6) могут быть записаны и в виде системы равенств (2.2) (с. 29). Сформулируем это утверждение в виде леммы.

Лемма 3.4. *Пусть точка $\boldsymbol{x}_0 \in D$ является точкой локальной достижимости для системы (2.1). Тогда для любых $\varepsilon > 0$ и непрерывных в $B(\boldsymbol{x}_0, \varepsilon) \times \mathbb{U}$ функций $\lambda_{ij}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$, $G_1(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$ ($\lambda_{i1} = 0$ при $i \geq 2$, G_1 — знакопостоянная функция) не существует знакопеременной функции $V_1 \in C^1\big(B(\boldsymbol{x}_0, \varepsilon)\big)$, $\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{x}} V_1(\boldsymbol{x}_0) \neq \boldsymbol{0}$ и знакопеременных либо тождественно равных нулю функций $V_i \in C^1\big(B(\boldsymbol{x}_0, \varepsilon)\big)$, $i = \overline{2, n-1}$, удовлетворяющих системе (2.2) при $\boldsymbol{x} \in B(\boldsymbol{x}_0, \varepsilon)$, $\boldsymbol{u} \in \mathbb{U}$.*

Доказательство. Предположим противное, а именно, что для некоторого $\varepsilon > 0$ найдутся непрерывные в $B(\boldsymbol{x}_0, \varepsilon) \times \mathbb{U}$ функции λ_{ij}, G_1 и знакопеременные непрерывно-дифференцируемые в $B(\boldsymbol{x}_0, \varepsilon)$ функции $V_i(\boldsymbol{x})$, обращающие систему (2.2) в тождество. Из системы (2.2) следует, что функции $V_i(\boldsymbol{x})$ удовлетворяют условиям (3.3)-(3.4) (если $G_1 \leq 0$), либо условиям (3.5)-(3.6) (если $G_1 \geq 0$). Таким образом, множество M_0, определяемое функциями $V_i(\boldsymbol{x})$, является положительно $\{\boldsymbol{x}_0, \varepsilon\}$ - ориентированным и содержит $\boldsymbol{x}_0$ в качестве граничной точки, что противоречит лемме 3.1.

Лемма 3.4 распространяет заключение теоремы 2.2 (в части необходимости) на случай локальной достижимости. Отметим, что свойство локальной достижимости следует из свойства локальной управляемости, поэтому, в частности, леммы 3.3 и 3.4 характеризуют необходимые условия локальной управляемости.

3.2. Неасимптотическая стабилизация управляемых систем с помощью разрывной обратной связи

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}), \quad \boldsymbol{f}(\mathbf{0}, \mathbf{0}) = \mathbf{0}. \tag{3.9}$$

Всюду в дальнейшем будем предполагать, что $\boldsymbol{x} \in D \subset \mathbb{R}^n$, $\boldsymbol{u} \in \mathbb{U} \subset \mathbb{R}^m$, $\boldsymbol{f} \in C^1(D \times \mathbb{U})$, $\mathbf{0} \in \operatorname{int} D$, $\mathbf{0} \in \mathbb{U}$. Как было отмечено выше, локальная управляемость системы (3.9) вблизи нуля не является достаточным условием существования управления с обратной связью $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$, удовлетворяющего условию $\boldsymbol{u}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ и обеспечивающего асимптотическую устойчивость положения равновесия $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.

Вместе с тем остается открытым вопрос о существовании обратной связи $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$, обеспечивающей (неасимптотическую) устойчивость положения равновесия в смысле Ляпунова, для произвольной нелинейной локально управляемой системы (3.9). Следующий пример показывает, что ответ на этот вопрос отрицателен, если в качестве класса допустимых обратных связей рассматривать класс непрерывных функций.

Пример 3.1. [10] Рассмотрим одномерную систему

$$\dot{x} = f(x, u) \equiv \begin{cases} x & \text{, при } |u| \le 1; \\ x + e^{1/(1-u)} & \text{, при } u > 1; \\ x - e^{1/(1+u)} & \text{, при } u < -1, \end{cases} \tag{3.10}$$

где $x \in D = (-e^{-1}, e^{-1})$, $u \in \mathbb{U} = [-2, 2]$. Нетрудно проверить, что функция $f(x, u)$ дифференцируема бесконечное число раз, и каждая точка области D является точкой локальной управляемости системы (3.10). Действительно, если $x_1 < x_2$, то точка x_2 может быть достигнута из x_1 с помощью управления $u(t) = 2$, иначе x_2 достигается из x_1 при $u(t) = -2$.

Предположим, что существует непрерывная в D обратная связь $u(x)$, $u(0) = u_0$, обеспечивающая устойчивость по Ляпунову особой точки $x = 0$

системы (3.10). Для того, чтобы нуль был особой точкой системы с обратной связью, необходимо, чтобы выполнялось условие $|u_0| \leq 1$. Возможны три случая.

1. $|u_0| < 1$. В силу непрерывности $u(x)$ заключаем, что $\dot{x} = x$ в достаточно малой окрестности нуля, следовательно, имеет место неустойчивость.

2. $u_0 = 1$. Для устойчивости решения $x = 0$ необходимо выполнение условия $\dot{x} \leq 0$ при малых положительных x, однако в рассматриваемом случае $\dot{x} > 0$ при $x > 0$.

3. $u_0 = -1$. В этом случае $\dot{x} < 0$ для отрицательных x вблизи нуля, т.е. тривиальное решение неустойчиво.

Таким образом, даже если не требовать условия $u(0) = 0$, то никакая непрерывная обратная связь не может обеспечить устойчивость положения равновесия $x = 0$ системы (3.10). Однако, разрывная обратная связь $u(x) = -2\,\mathrm{sign}\,(x)$ обеспечивает (асимптотическую) стабилизацию решения $x = 0$.

Приведенный пример показывает, что для решения задач неасимптотической стабилизации управляемых систем класс допустимых обратных связей должен содержать разрывные функции фазового вектора. При рассмотрении разрывных обратных связей необходимо корректно определять понятие решения системы дифференциальных уравнений, поскольку классическое определение решения в этом случае не пригодно (см. [34, с. 5]). В настоящем разделе решения разрывных систем определяются по А.Ф. Филиппову. (Используемые методы теории дифференциальных уравнений с разрывной правой частью описаны в подразделе 2.2).

Определение 3.7. Будем говорить, что система (3.9) *неасимптотически стабилизируема*, если в некоторой ε-окрестности нуля существует такая обратная связь $\boldsymbol{u} : B(\mathbf{0}, \varepsilon) \to \mathbb{U}$, $\boldsymbol{u}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ (вообще говоря,

разрывная), которая обеспечивает устойчивость по Ляпунову тривиального решения $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ системы

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})). \tag{3.11}$$

При этом решения системы (3.11) понимаются в смысле А.Ф. Филиппова (определение 2.5 на с. 30).

Имеет место следующая теорема [10].

Теорема 3.1. *Пусть $\mathbb{U}$ — компактное множество, и пусть при некотором $\varepsilon > 0$ каждая точка множества $B(\mathbf{0}, \varepsilon) \setminus \{\mathbf{0}\}$ является точкой локальной достижимости системы (3.9). Тогда система (3.9) неасимптотически стабилизируема.*

Доказательство. Пусть $V(\boldsymbol{x}) \in C^1\big(B(\mathbf{0}, \varepsilon)\big)$ — произвольная определенно - положительная функция, для которой $\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{x}} V(\boldsymbol{x}) \neq \mathbf{0}$ при всех $\boldsymbol{x} \in B(\mathbf{0}, \varepsilon) \setminus \{\mathbf{0}\}$. Покажем, что существует функция $\boldsymbol{u} : B(\mathbf{0}, \varepsilon) \to \mathbb{U}$, $\boldsymbol{u}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, удовлетворяющая условию

$$\forall \boldsymbol{x} \in B(\mathbf{0}, \varepsilon) \;\Rightarrow\; \big\langle \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{x}} V(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}))\big\rangle \leq 0. \tag{3.12}$$

Действительно, пусть $\{\varepsilon_n\}$ — последовательность положительных чисел, стремящихся к нулю при $n \to \infty$. По лемме 3.3 для каждого $\boldsymbol{x}_0 \in B(\mathbf{0}, \varepsilon) \setminus \{\mathbf{0}\}$ при любом $\varepsilon_n > 0$ существуют $\boldsymbol{x}_n \in B(\boldsymbol{x}_0, \varepsilon_n) \cap B(\mathbf{0}, \varepsilon)$, $\boldsymbol{u}_n \in \mathbb{U}$, удовлетворяющие неравенству:

$$\big\langle \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{x}} V_1(\boldsymbol{x}_n), \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_n, \boldsymbol{u}_n)\big\rangle < 0,$$

где $V_1(\boldsymbol{x}) = V(\boldsymbol{x}) - V(\boldsymbol{x}_0)$ — знакопеременная в точке $\boldsymbol{x}_0$ функция. В силу компактности $\mathbb{U}$ найдется некоторая сходящаяся подпоследовательность $\{\boldsymbol{u}_{n_k}\}$:

$$\lim_{k \to \infty} (\boldsymbol{u}_{n_k}) = \boldsymbol{u}_0 \in \mathbb{U}.$$

Поскольку функции $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$ и $\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{x}} V_1(\boldsymbol{x})$ непрерывны, то переходя в неравенстве $\big\langle \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{x}} V_1(\boldsymbol{x}_{n_k}), \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_{n_k}, \boldsymbol{u}_{n_k})\big\rangle < 0$ к пределу при $k \to \infty$, получим следующее неравенство:

$$\big\langle \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{x}} V_1(\boldsymbol{x}_0), \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{u}_0)\big\rangle \leq 0, \quad \boldsymbol{u}_0 \in \mathbb{U}.$$

Заметим, что $\boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{x}} V_1(\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{x}} V(\boldsymbol{x}_0)$. Таким образом, каждому $\boldsymbol{x}_0 \in B(\mathbf{0}, \varepsilon)$ может быть поставлено в соответствие управление $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{u}_0$, $\boldsymbol{u}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, удовлетворяющее условию (3.12).

Остается доказать, что решения системы (3.11) в смысле А.Ф. Филиппова существуют при всех достаточно малых начальных значениях, и что $V(\boldsymbol{x})$ является функцией Ляпунова для соответствующей системы дифференциальных включений. Поскольку функция $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$ непрерывна на $B(\mathbf{0}, \varepsilon) \times \mathbb{U}$, то по первой теореме Вейерштрасса она ограничена на всяком множестве вида $K \times \mathbb{U}$, где K — компакт из $B(\mathbf{0}, \varepsilon)$. Следовательно, правая часть системы (3.11) локально ограничена в $B(\mathbf{0}, \varepsilon)$. По лемме 2.1 (с. 31) многозначная функция $H(\boldsymbol{x})$, которая для каждого $\boldsymbol{x}_0$ представляет из себя множество всех предельных значений функции $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}))$ при $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{x}_0$, дополненное значением $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}_0))$, является β-непрерывной в $B(\mathbf{0}, \varepsilon)$. Таким образом, правая часть дифференциального включения

$$\boldsymbol{x} \in \operatorname{co} H(\boldsymbol{x}) \tag{3.13}$$

удовлетворяет основным условиям (с. 31), гарантирующим существование и продолжимость решений в любой замкнутой области $K \subset B(\mathbf{0}, \varepsilon)$.

Покажем, что из (3.12) для всех $\boldsymbol{x} \in B(\mathbf{0}, \varepsilon)$ вытекает следующее неравенство:

$$\dot{V}^*(\boldsymbol{x}) = \sup_{\boldsymbol{p} \in \operatorname{co} H(\boldsymbol{x})} \big\langle \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{x}} V(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{p} \big\rangle \le 0. \tag{3.14}$$

Благодаря непрерывности функции $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$, из неравенства (3.12) следует, что

$$\forall \boldsymbol{x} \in B(\mathbf{0}, \varepsilon),\ \boldsymbol{p} \in H(\boldsymbol{x}) \ \ \Rightarrow \ \ \big\langle \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{x}} V(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{p} \big\rangle \le 0. \tag{3.15}$$

Пусть теперь $\boldsymbol{p} \in \operatorname{co} H(\boldsymbol{x})$. Это означает, что найдутся $\boldsymbol{p}_1, \boldsymbol{p}_2 \in H(\boldsymbol{x})$ и число $\lambda \in [0, 1]$, такие что

$$\boldsymbol{p} = \lambda \boldsymbol{p}_1 + (1 - \lambda) \boldsymbol{p}_2.$$

Отсюда с помощью неравенства (3.15) получим, что

$$\big\langle \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{x}} V(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{p} \big\rangle = \lambda \big\langle \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{x}} V(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{p}_1 \big\rangle + (1 - \lambda) \big\langle \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{x}} V(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{p}_2 \big\rangle \le 0.$$

Таким образом, неравенство (3.14) доказано, т.е. верхняя граница производных функции $V(\boldsymbol{x})$ в силу включения (3.13) является отрицательно-постоянной функцией. На основании теоремы 2.4 (с. 32) заключаем, что тривиальное решение системы (3.11) устойчиво по Ляпунову. Итак, система (3.9) неасимптотически стабилизируема, что и требовалось доказать.

Поскольку свойство достижимости является более слабым, чем управляемость, то теорема 3.1 справедлива в случае, когда каждая точка множества $B(\mathbf{0}, \varepsilon) \setminus \{\mathbf{0}\}$ удовлетворяет свойству локальной управляемости (определение 3.3).

Замечание 3.5. Доказанная теорема соприкасается с основным результатом работы [8], в которой установлено, что всякая асимптотически нуль-управляемая система стабилизируема с помощью разрывной обратной связи. Однако, решения разрывной системы в [8] ("π - траектории") определяются на основе разбиения временной полуоси дискретными моментами времени и применения кусочно-постоянных управлений между соседними моментами. Такое определение решения, вообще говоря, не эквивалентно определению решения разрывной системы в смысле А.Ф. Филиппова.

Замечание 3.6. Как показывает пример 3.1, условия теоремы 3.1 не являются достаточными для существования неасимптотически стабилизирующей непрерывной обратной связи. С другой стороны, из теоремы Райана [3] и примера Брокетта (3.1) следует, что локальная управляемость автономной системы (3.9) не гарантирует ее эквиасимптотическую стабилизируемость с помощью разрывной обратной связи $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$. Таким образом, если определять решения по А.Ф. Филиппову, то заключение теоремы 3.1, вообще говоря, не может быть усилено.

3.3. Исследование областей непрерывности функции обратной связи

Рассмотрим случай, когда правая часть системы (3.9) линейна по управлению:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) \equiv \boldsymbol{f}_0(\boldsymbol{x}) + \sum_{i=1}^{m} u_i \boldsymbol{f}_i(\boldsymbol{x}), \quad \boldsymbol{f}_0(\mathbf{0}) = \mathbf{0}. \tag{3.16}$$

Для всякой дифференцируемой функции $V(\boldsymbol{x})$ ее производная в силу системы (3.16) может быть записана в виде:

$$\dot{V} = a(\boldsymbol{x}) + \big\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{b}(\boldsymbol{x}) \big\rangle,$$

где

$$a(\boldsymbol{x}) = \big\langle \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{x}} V(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{f}_0(\boldsymbol{x}) \big\rangle, \ b_i(\boldsymbol{x}) = \big\langle \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{x}} V(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{f}_i(\boldsymbol{x}) \big\rangle, \ i = \overline{1, m}. \tag{3.17}$$

Следующая теорема характеризует множество точек разрыва функции обратной связи для линейной по управлению системы.

Теорема 3.2. *Предположим, что $\mathbb{U}$ — выпуклый компакт, и при некотором $\varepsilon > 0$ каждая точка множества $B(\mathbf{0}, \varepsilon) \setminus \{\mathbf{0}\}$ является точкой локальной достижимости системы (3.16). Предположим также, что функции $\boldsymbol{f}_i(\boldsymbol{x})$, $i = \overline{1, m}$ аналитичны в $B(\mathbf{0}, \varepsilon)$.*

Тогда система (3.16) неасимптотически стабилизируема с помощью обратной связи $\boldsymbol{u} \in C\big(B(\mathbf{0}, \varepsilon) \setminus M\big)$, где M — гладкое многообразие размерности не выше $n - 1$ (многообразием нулевой размерности считается множество $M = \{\mathbf{0}\}$).

Доказательство. Пусть $V(\boldsymbol{x})$ — определенно-положительная, аналитическая в $B(\mathbf{0}, \varepsilon)$ функция. Тогда всякому $\boldsymbol{x} \in B(\mathbf{0}, \varepsilon)$ может быть поставлено в соответствие множество

$$U(\boldsymbol{x}) = \{\boldsymbol{u} \in \mathbb{U} \ : \ a(\boldsymbol{x}) + \big\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{b}(\boldsymbol{x}) \big\rangle \leq 0\}, \tag{3.18}$$

где функции $a(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x})$ определяются выражениями (3.17). Из доказательства теоремы 3.1 следует, что $U(\boldsymbol{x}) \neq \varnothing$ при всех $\boldsymbol{x} \in B(\mathbf{0}, \varepsilon)$. Очевидно, что $\mathbf{0} \in U(\mathbf{0})$, множество $U(\boldsymbol{x})$ компактно и выпукло при всех $\boldsymbol{x} \in B(\mathbf{0}, \varepsilon)$.

Докажем, что многозначная функция (3.18) β-непрерывна в ε - окрестности нуля. Для этого достаточно показать, что при любых $\boldsymbol{x} \in B(\mathbf{0}, \varepsilon)$ и $\varepsilon' > 0$ найдется $\delta(\boldsymbol{x}, \varepsilon') > 0$ такое, что для всех $\boldsymbol{x}' \in B(\boldsymbol{x}, \delta)$ выполнено включение:

$$U(\boldsymbol{x}') \subset \bigcup_{\boldsymbol{u} \in U(\boldsymbol{x})} B(\boldsymbol{u}, \varepsilon').$$

Будем рассуждать от противного. Предположим, что для некоторых $\boldsymbol{x} \in B(\mathbf{0}, \varepsilon)$, $\varepsilon' > 0$ существует последовательность $\{\boldsymbol{x}_n\}_{n=1}^{\infty}$, сходящаяся к $\boldsymbol{x}$, а также последовательность $\{\boldsymbol{u}_n\}$: $\boldsymbol{u}_n \in U(\boldsymbol{x}_n)$, удовлетворяющая при всех $n \geq 1$ неравенству:

$$\rho\big(\boldsymbol{u}_n, U(\boldsymbol{x})\big) \geq \varepsilon', \tag{3.19}$$

где

$$\rho(\boldsymbol{u}, U) = \inf_{\boldsymbol{v} \in U} |\boldsymbol{u} - \boldsymbol{v}|.$$

Тогда в силу компактности $\mathbb{U}$ найдется сходящаяся подпоследовательность $\{\boldsymbol{u}_{n_k}\}$: $\boldsymbol{u}_{n_k} \to \boldsymbol{u}^* \in \mathbb{U}$ при $k \to \infty$. Из неравенства (3.19) следует, что $\rho\big(\boldsymbol{u}^*, U(\boldsymbol{x})\big) \geq \varepsilon'$, т.е. $\boldsymbol{u}^* \notin U(\boldsymbol{x})$. С другой стороны, переходя в неравенстве $\big\langle \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{x}} V(\boldsymbol{x}_{n_k}), \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}_{n_k}, \boldsymbol{u}_{n_k}) \big\rangle \leq 0$ к пределу при $k \to \infty$, будем иметь $\big\langle \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{x}} V(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}^*) \big\rangle \leq 0$. Это означает, что $\boldsymbol{u}^* \in U(\boldsymbol{x})$. Полученное противоречие доказывает β-непрерывность $U(\boldsymbol{x})$.

Рассмотрим множество

$$M = \{\boldsymbol{x} \in B(\mathbf{0}, \varepsilon) \ : \ \boldsymbol{b}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}\}.$$

Докажем, что многозначная функция $U(\boldsymbol{x})$ является α-непрерывной на множестве $B(\mathbf{0}, \varepsilon) \setminus M$. Для этого воспользуемся рассуждением от противного: допустим, что для некоторых $\boldsymbol{x} \in B(\mathbf{0}, \varepsilon) \setminus M$, $\varepsilon' > 0$ существует последовательность $\{\boldsymbol{x}_n\}$: $\boldsymbol{x}_n \to \boldsymbol{x}$ при $n \to \infty$, которая удовлетворяет при всех $n \geq 1$ неравенству:

$$\alpha\big(U(\boldsymbol{x}_n), U(\boldsymbol{x})\big) \geq \varepsilon', \tag{3.20}$$

где α — отклонение множеств по Хаусдорфу (с. 30). Поскольку функция $U(\boldsymbol{x})$ является β-непрерывной, то $\beta\big(U(\boldsymbol{x}_n), U(\boldsymbol{x})\big) < \varepsilon'$ для всех $n \geq N(\varepsilon')$. Следовательно, из неравенства (3.20) вытекает, что $\beta\big(U(\boldsymbol{x}), U(\boldsymbol{x}_n)\big) \geq \varepsilon'$ при $n \geq N(\varepsilon')$. Это означает, что существует последовательность $\{\boldsymbol{u}_n\}$: $\boldsymbol{u}_n \in U(\boldsymbol{x})$, для которой

$$\rho\big(\boldsymbol{u}_n, U(\boldsymbol{x}_n)\big) \geq \varepsilon' \quad \text{при} \quad n \geq N(\varepsilon').$$

Используя компактность $U(\boldsymbol{x})$ заключаем, что существует подпоследовательность $\{\boldsymbol{u}_{n_k}\}$, сходящаяся к некоторому $\boldsymbol{u}^* \in U(\boldsymbol{x})$, и удовлетворяющая неравенству $\rho(\boldsymbol{u}_{n_k}, U(\boldsymbol{x}_{n_k})) \geq \varepsilon'$ при всех $k \geq 1$. Поскольку $\boldsymbol{u}_{n_k} \to \boldsymbol{u}^*$ при $k \to \infty$, то существует $K(\varepsilon') > 0$ такое, что $|\boldsymbol{u}_{n_k} - \boldsymbol{u}^*| < \varepsilon'/2$ при $k > K(\varepsilon')$. Таким образом, при всех $k > K(\varepsilon')$ справедливо неравенство:

$$\rho\big(\boldsymbol{u}^*, U(\boldsymbol{x}_{n_k})\big) \geq \rho\big(\boldsymbol{u}_{n_k}, U(\boldsymbol{x}_{n_k})\big) - |\boldsymbol{u}_{n_k} - \boldsymbol{u}^*| \geq \frac{1}{2}\varepsilon'. \tag{3.21}$$

Из определения многозначной функции (3.18), с учетом условия $\boldsymbol{u}^* \in U(\boldsymbol{x})$ следует, что

$$a(\boldsymbol{x}) + \big\langle \boldsymbol{u}^*, \boldsymbol{b}(\boldsymbol{x})\big\rangle \leq 0. \tag{3.22}$$

Если в (3.22) имеет место строгое неравенство, то благодаря непрерывности функций a, $\boldsymbol{b}$ оно сохраняется и для достаточно близких к $\boldsymbol{x}$ значений $\boldsymbol{x}_{n_k}$. А значит, $\boldsymbol{u}^* \in U(\boldsymbol{x}_{n_k})$ при достаточно больших k, что противоречит неравенству (3.21). Остается рассмотреть случай, когда в (3.22) имеет место равенство. Поскольку $\boldsymbol{x} \notin M$, то $b_j(\boldsymbol{x}) \neq 0$ для некоторого j. Нетрудно видеть, что если $\boldsymbol{x}_{n_k}$ принадлежит достаточно малой окрестности $\boldsymbol{x}$, то множество $U(\boldsymbol{x}_{n_k})$ содержит следующее управление:

$$\tilde{u}_i = u_i^* \ (1 \leq i \leq m,\ i \neq j), \quad \tilde{u}_j = -\frac{1}{b_j(\boldsymbol{x}_{n_k})}\big\{a(\boldsymbol{x}_{n_k}) + \sum_{l \neq j} b_l(\boldsymbol{x}_{n_k}) u_l^*\big\}.$$

Принимая во внимание непрерывность функций a, $\boldsymbol{b}$, получаем, что $|\tilde{\boldsymbol{u}} - \boldsymbol{u}^*| \to 0$ при $\boldsymbol{x}_{n_k} \to \boldsymbol{x}$, вопреки неравенству (3.21). Полученное противоречие доказывает α-непрерывность функции (3.18) на множестве $B(\boldsymbol{0}, \varepsilon) \setminus M$.

Поскольку система (3.16) линейна по управлению, и многозначная функция $U(\boldsymbol{x})$ является β-непрерывной с непустыми, компактными и выпуклыми значениями, то правая часть дифференциального включения

$$\dot{\boldsymbol{x}} \in \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, U(\boldsymbol{x})) \tag{3.23}$$

в области $B(\mathbf{0}, \varepsilon)$ удовлетворяет основным условиям (в смысле определения 2.8 на с. 31). Вычисляя верхнюю производную функции $V(\boldsymbol{x})$ в силу включения (3.23), с учетом (3.18) будем иметь:

$$\dot{V}^* = \sup_{\boldsymbol{u} \in U(\boldsymbol{x})} \Big\{ a(\boldsymbol{x}) + \big\langle \boldsymbol{u}, \boldsymbol{b}(\boldsymbol{x}) \big\rangle \Big\} \leq 0. \tag{3.24}$$

Таким образом, все условия теоремы 2.4 (с. 32) выполнены, следовательно, тривиальное решение $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ включения (3.23) устойчиво. Легко видеть, что всякая однозначная функция (селектор) $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$, удовлетворяющая условиям $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) \in U(\boldsymbol{x})$ при всех $\boldsymbol{x} \in B(\mathbf{0}, \varepsilon)$, $\boldsymbol{u}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$, не увеличивает оценку производной (3.24) в силу дифференциального включения, построенного по системе (3.11). Таким образом, всякий селектор $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$, обладающий упомянутыми свойствами, обеспечивает неасимптотическую стабилизацию системы (3.16) в смысле определения 3.7. Для выделения селектора многозначной функции $U(\boldsymbol{x})$ воспользуемся теоремой 2.3 (с. 31). Поскольку функции $V(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{f}_i(\boldsymbol{x})$ аналитичны в $B(\mathbf{0}, \varepsilon)$, то функция $\varphi(\boldsymbol{x}) = |\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x})|^2$ также аналитична, и возможны следующие три случая.

1. Функция $\varphi(\boldsymbol{x})$ тождественно равна нулю. В этом случае любая обратная связь обеспечивает устойчивость положения равновесия, в частности, можно положить $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) = \mathbf{0}$.

2. Точка $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ — изолированный нуль функции $\varphi(\boldsymbol{x})$, т.е. $M = \{\mathbf{0}\}$. По доказанному функция $U(\boldsymbol{x})$ является α-непрерывной в $B(\mathbf{0}, \varepsilon) \setminus \{\mathbf{0}\}$ с замкнутыми и выпуклыми значениями. Согласно теореме 2.3 существует однозначная функция $\boldsymbol{u} \in C\big(B(\mathbf{0}, \varepsilon) \setminus \{\mathbf{0}\}\big)$, которая при

доопределении $\boldsymbol{u}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ обеспечивает устойчивость положения равновесия $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.

3. Множество M является гладким многообразием максимальной размерности не выше $n-1$ [102]. С помощью теоремы 2.3 заключаем, что существует обратная связь $\boldsymbol{u} : B(\mathbf{0}, \varepsilon) \to \mathbb{U}$, непрерывная на множестве $B(\mathbf{0}, \varepsilon) \setminus M$, обеспечивающая устойчивость тривиального решения.

Теорема доказана.

Замечание 3.7. В случае $M = \{\mathbf{0}\}$ функция $V(\boldsymbol{x})$ является *управляемой функцией Ляпунова* [38] для системы (3.16), т.е. для всякого $\boldsymbol{x} \in B(\mathbf{0}, \varepsilon) \setminus \{\mathbf{0}\}$ найдется $\boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^m$ такое, что

$$\left\langle \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{x}} V(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) \right\rangle < 0.$$

Следовательно, если ограничивающее множество $\mathbb{U}$ содержит достаточно большие по абсолютной величине управления, то на основании теоремы Артстейна [9, Теорема 5.1] можно утверждать, что система (3.16) *асимптотически* стабилизируема с помощью обратной связи $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ класса $C\big(B(\mathbf{0}, \varepsilon) \setminus \{\mathbf{0}\}\big)$.

Для иллюстрации того факта, что в условиях теоремы 3.2 нельзя гарантировать α-непрерывность многозначной функции $U(\boldsymbol{x})$ (равно как и непрерывность однозначной функции $u(x)$) во всей ε-окрестности нуля, рассмотрим следующий пример.

Пример 3.2. Пусть

$$\dot{x} = x^2 \operatorname{sign} x + u x^2, \tag{3.25}$$

где $x \in \mathbb{R}$, $\mathbb{U} = [-2, 2]$. Легко видеть, что система (3.25) удовлетворяет всем условиям теоремы 3.2. В качестве функции Ляпунова для системы (3.25) можно положить $V(x) = x^2/2$, тогда $a(x) = |x|^3$, $b(x) = x^3$.

Многозначная обратная связь (3.18) запишется следующим образом:

$$U(x) = \begin{cases} [1,2] & \text{, при } x < 0; \\ [-2,-2] & \text{, при } x = 0; \\ [-2,-1] & \text{, при } x > 0. \end{cases}$$

Из доказательства теоремы 3.2 следует, что функция $U(x)$ β-непрерывна в $\mathbb{R}$, а также α-непрерывна на интервалах $\mathcal{I}_- = (-\infty, 0)$ и $\mathcal{I}_+ = (0, +\infty)$. В соответствии с теоремой 2.3, на каждом из этих интервалов существуют однозначные непрерывные селекторы многозначной функции $U(x)$: $u_- : \mathcal{I}_- \to \mathbb{U}$, $u_+ : \mathcal{I}_+ \to \mathbb{U}$. Однако, функция $U(\boldsymbol{x})$ не является α-непрерывной в нуле, и для нее не существует однозначного селектора $u(x)$, непрерывного при всех $x \in \mathbb{R}$. С помощью непрерывных ветвей $u_-(x)$, $u_+(x)$ нетрудно построить обратную связь $u(x)$, определенную при всех x и непрерывную на множестве $\mathcal{I}_- \cup \mathcal{I}_+$:

$$u(x) = \begin{cases} u_-(x) & \text{, при } x < 0; \\ 0 & \text{, при } x = 0; \\ u_+(x) & \text{, при } x > 0. \end{cases}$$

Например, можно положить $u(x) = -\gamma \operatorname{sign} x$, $\gamma \in [1,2]$. Отметим, что при $\gamma > 1$ стабилизация является асимптотической.

3.4. Оптимальная стабилизация в случае устойчивости по приближению конечного порядка

3.4.1. Постановка задачи. Предположим, что система (3.9) может быть записана в виде:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = A\boldsymbol{x} + \boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}), \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n \ (n \geq 4), \ \boldsymbol{u} \in \mathbb{R}^m, \tag{3.26}$$

где функция $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$ аналитична и ее разложение в ряд Маклорена не содержит линейных членов. Предположим также, что матрица A имеет

q пар чисто мнимых собственных значений $\pm i\omega_s$, $s = \overline{1,q}$ $(q \geq 2)$, при этом вещественные части остальных собственных значений отрицательны. В качестве класса допустимых обратных связей для системы (3.26) будем рассматривать некоторое подмножество $\mathcal{U}$ множества аналитических функций $\boldsymbol{u} : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, удовлетворяющих условию $\boldsymbol{u}(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$.

Для решения задачи стабилизации системы (3.26) с помощью обратной связи класса $\mathcal{U}$ в нерезонансном несущественно особенном критическом случае могут быть использованы методы, описанные в подразделе 2.3. А именно, путем подстановки обратной связи $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) \in \mathcal{U}$ с неопределенными коэффициентами в правую часть системы (3.26) и применения преобразований, изложенных в подразделе 2.3, решение задачи стабилизации системы (3.26) сводится к определению коэффициентов разложения функции $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$, исходя из условия асимптотической устойчивости соответствующей нормализованной системы (2.20), содержащей только критические переменные:

$$\dot{r}_s = F_s(r_1, r_2, ..., r_q; u), \quad s = \overline{1,q}, \tag{3.27}$$

где F_s — однородные функции переменных r_1, r_2, ..., r_q степени $N \geq 3$. Число N характеризует наименьший порядок нелинейных членов, входящих в нормальную форму укороченной системы. Правая часть системы (3.27) содержит параметры — коэффициенты разложения функции $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ в ряд Тейлора. С помощью замены $\rho_s = {r_s}^2$ исследование устойчивости системы (3.27) сводится к исследованию устойчивости тривиального решения $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{0}$ модельной системы

$$\dot{\rho}_s = \rho_s \sum_{|k_s| = \left[\frac{N-1}{2}\right]} G_s^{(k_{s1},...,k_{sq})} \rho_1^{k_{s1}} \cdots \rho_q^{k_{sq}}, \quad s = \overline{1,q}, \tag{3.28}$$

в конусе $\rho_s \geq 0$. Критериями асимптотической устойчивости системы (3.28) являются теорема 2.11 (случай $N = 3$) и теорема 2.12 (случай $q = 2$).

Предположим, что для всякого $\boldsymbol{u} \in \mathcal{U}_0 \subseteq \mathcal{U}$ $(\mathcal{U}_0 \neq \emptyset)$ тривиальное решение системы (3.27) асимптотически устойчиво, и при этом степень

функций F_s постоянна (и равна N). Предположим далее, что для всех $\boldsymbol{u} \in \mathcal{U} \setminus \mathcal{U}_0$ степень правой части соответствующей системы (3.27) выше либо равна N, причем в случае равенства нулевое решение системы (3.27) не является асимптотически устойчивым.

При сделанных предположениях для любого $\boldsymbol{u} \in \mathcal{U}_0$ по теореме Н.Н. Красовского и В.И. Зубова (теорема 2.10 на с. 42) на каждом решении $\boldsymbol{r}(t)$ соответствующей системы (3.27) определены функционалы:

$$\phi^-[\boldsymbol{r}(t)] = \varliminf_{t\to+\infty}\{t^{1/(N-1)}|\boldsymbol{r}(t)|\},$$
$$\phi^+[\boldsymbol{r}(t)] = \varlimsup_{t\to+\infty}\{t^{1/(N-1)}|\boldsymbol{r}(t)|\}. \tag{3.29}$$

При этом $\phi^+[\boldsymbol{r}(t)] < +\infty$, и $\phi^-[\boldsymbol{r}(t)] > 0$ если $\boldsymbol{r}(0) \neq \boldsymbol{0}$.

Нетрудно видеть, что при сделанных выше предположениях для любого $\boldsymbol{u} \in \mathcal{U} \setminus \mathcal{U}_0$ найдется решение $\boldsymbol{r}(t)$ соответствующей системы (3.27), на котором функционал ϕ^+ обращается в бесконечность. Функционалы (3.29) характеризуют асимптотическую скорость убывания евклидовой нормы критических переменных, поэтому для асимптотической минимизации возмущений следует рассматривать обратные связи из $\mathcal{U}_0$, при которых реализуются наименьшие значения функционалов (3.29). С учетом сделанных предположений поставим задачу об оптимальной стабилизации. Обозначим через $\boldsymbol{r}(t;\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{u})$ решение системы (3.27), соответствующее обратной связи $\boldsymbol{u} \in \mathcal{U}$ и удовлетворяющее начальному условию $\boldsymbol{r}(0;\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{r}_0$.

Определение 3.8. Будем говорить, что обратная связь $\boldsymbol{u}^* \in \mathcal{U}$ решает задачу об *оптимальной по скорости затухания стабилизации* системы (3.26), если тривиальное решение соответствующей системы (3.27) асимптотически устойчиво, и для всякой обеспечивающей асимптотическую устойчивость обратной связи $\boldsymbol{u} \in \mathcal{U}$ выполнено неравенство:

$$\sup_{\boldsymbol{r}_0\in\mathbb{R}^q}\{\phi^+[\boldsymbol{r}(t;\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{u}^*)]\} \leq \sup_{\boldsymbol{r}_0\in\mathbb{R}^q}\{\phi^+[\boldsymbol{r}(t;\boldsymbol{r}_0,\boldsymbol{u})]\}. \tag{3.30}$$

Условие оптимальности (3.30) означает, что при использовании оптимального управления $\boldsymbol{u}^*(\boldsymbol{x})$ решение соответствующей системы (3.27)

с наибольшей евклидовой нормой убывает при $t \to +\infty$ наибыстрейшим из допустимых способов.

Замечание 3.8. Подобная минимаксная постановка задачи об оптимальной стабилизации была рассмотрена в работе К. Пайффера и А.Я. Савченко [55] (без конкретного задания функционалов) применительно к задачам пассивной стабилизации путем размораживания параметров. Авторами [55] установлено, что если в критическом случае одной пары чисто мнимых корней существует функция Ляпунова в виде многочлена четвертой степени, то норма критической компоненты решения полной системы допускает асимптотическое представление вида $G(t)^{-1/2}$ при $t \to +\infty$, где G — константа, определяемая правой частью системы. В связи с этим в цитируемой работе было предложено определять параметры динамической обратной связи, решающей задачу об оптимальной пассивной стабилизации, из условия минимальности константы G.

Для решения поставленной задачи об оптимальной стабилизации необходимо вычислять функционалы (3.29) по начальным условиям решения и коэффициентам модельной системы (3.28). Отметим, что оценки (3.29) могут быть получены методом функций Ляпунова непосредственно из доказательства теоремы Н.Н. Красовского - В.И. Зубова [27, с. 114-115], однако в этой теореме функция Ляпунова строится неконструктивно.

Ниже будут установлены значения пределов (3.29) при выполнении условий теорем 2.11, 2.12. В частности, будет доказано, что в критическом случае двух пар чисто мнимых корней значения функционалов ϕ^+ и ϕ^- совпадают, т.е. для при выполнении условий теоремы 2.12 для всякого решения $\boldsymbol{r}(t)$ системы (3.27) существует предел:

$$\lim_{t\to+\infty}\{t^{1/(N-1)}|\boldsymbol{r}(t)|\},$$

который определяется инвариантными лучами модельной системы (3.28). Перейдем к изложению этих результатов.

3.4.2. Оценка нормы решений с помощью функции Ляпунова. Рассмотрим случай $N = 3$, и предположим, что для модельной системы выполнен критерий А.М. Молчанова (теорема 2.11). В этом случае для удобства записи перепишем модельную систему (3.28) следующим образом:

$$\dot{\rho}_s = \rho_s \sum_{k=1}^{q} a_{sk}\rho_k, \quad s = \overline{1,q}, \tag{3.31}$$

где $a_{s1} = G_s^{(1,0,...,0)}$, $a_{s2} = G_s^{(0,1,...,0)}$, ..., $a_{sq} = G_s^{(0,0,...,1)}$.

Получим оценки функционалов (3.28) на решениях системы (3.29) с помощью построения функции Ляпунова для системы (3.31) методом А.М. Молчанова [28]. В соответствии с идеей работы [28] будем искать функцию Ляпунова для системы (3.31) в виде

$$v(\boldsymbol{\rho}) = v_0(\boldsymbol{\rho}) + \sum_{k=1}^{q} \alpha_k v_k(\boldsymbol{\rho}), \tag{3.32}$$

где $v_0(\boldsymbol{\rho}) = \rho_1^{z_1}\rho_2^{z_2}...\rho_q^{z_q}$; $v_k(\boldsymbol{\rho})$ — функции Ляпунова граней $\rho_k = 0$, рекуррентно определяемые выражениями типа (3.32) через функции Ляпунова граней меньших размерностей; числа $\alpha_k > 0$ подбираются достаточно малыми для положительной определенности производной dv/dt всюду в конусе $\rho_k \geq 0$.

Можно показать [28], что при выполнении условий теоремы 2.11 существует решение системы неравенств:

$$\sum_{k=1}^{q} a_{kj}\theta_k \leq -1; \theta_j \geq 1; \quad j = 1, 2, ..., q. \tag{3.33}$$

Зададимся произвольным числом $z > 0$. Пусть $(\theta_1, \theta_2, ..., \theta_q)$ — решение системы (3.33). Положим $z_k = z\theta_k/(\theta_1 + \theta_2 + .. + \theta_q) > 0$. При этом v_0 — однородная функция степени z в конусе $\rho_k \geq 0$. Кроме того, очевидно, $\zeta_j = -\sum_{k=1}^{q} a_{kj}z_k > 0$ при $j = 1, 2, ..., q$. Поскольку функции v_k также строятся в виде (3.32), то можно считать, что v_k — определенно-положительные однородные функции степени z в конусе $\rho_k \geq 0$, и функция $v(\boldsymbol{\rho})$ — однородная определенно-положительная функция при любом

выборе чисел α_k. Вычислим производную dv/dt в силу системы (3.31)

$$\frac{dv}{dt} = \frac{dv_0}{dt} + \sum_{k=1}^{q} \alpha_k \frac{dv_k}{dt} = -v_0 \sum_{j=1}^{q} \zeta_j \rho_j + \sum_{j,k,l} \alpha_k \frac{\partial v_k}{\partial \rho_j} a_{jl} \rho_j \rho_l =$$

$$= -v_0 \sum_{j=1}^{q} \zeta_j \rho_j + \sum_{j=1}^{q} \alpha_k \Big(\frac{dv_k}{dt}\Big|_{\rho_k=0} \Big) + \sum_{j,k} \alpha_k \frac{\partial v_k}{\partial \rho_j} a_{jk} \rho_j \rho_k,$$

где выражение $\frac{dv_k}{dt}\Big|_{\rho_k=0}$ равняется производной $\frac{dv_k}{dt}$, вычисленной в точке $\boldsymbol{\rho} = (\rho_1, ..., \rho_{k-1}, 0, \rho_{k+1}, ..., \rho_q)$.

Поскольку v_k — функция Ляпунова грани $\rho_k = 0$, то $\frac{dv_k}{dt}\Big|_{\rho_k=0} < 0$ при $\boldsymbol{\rho} \neq \mathbf{0}$ (v_k не зависит от ρ_k); обозначим

$$\Phi_k^{(z)} = \sum_{j=1}^{q} \frac{\partial v_k}{\partial \rho_j} a_{jk} \rho_j.$$

$\Phi_k^{(z)}$ — однородная функция степени z, не зависящая от ρ_k, с помощью которой производная dv/dt запишется следующим образом:

$$\frac{dv}{dt} = \sum_{k=1}^{q} \rho_k (-v_0 \zeta_k + \alpha_k \Phi_k^{(z)}) + \sum_{k=1}^{q} \alpha_k \Big(\frac{dv_k}{dt}\Big|_{\rho_k=0} \Big).$$

$\frac{dv_k}{dt}\Big|_{\rho_k=0}$ — определенно-отрицательная функция степени $z+1$, $\rho_k \Phi_k^{(z)}$ — функция степени $z+1$, следовательно, существует $\nu > 0$, такое что

$$\rho_k \Phi_k^{(z)} + \frac{dv_k}{dt}\Big|_{\rho_k=0} < 0 \qquad \text{при} \quad \rho_k \leq \nu \|\boldsymbol{\rho}\|_1 \neq 0,$$

где $\|\boldsymbol{\rho}\|_1 = \sum_{j=1}^{q} |\rho_j|$. В конусе $\rho_k \geq \nu \|\boldsymbol{\rho}\|_1$ функция v_0 положительна при $\boldsymbol{\rho} \neq \mathbf{0}$, выберем числа $\alpha_k > 0$ так, чтобы при $\rho_k > \nu \|\boldsymbol{\rho}\|_1$ выполнялось неравенство

$$-v_0 \zeta_k + \alpha_k \Phi_k^{(z)} < 0.$$

При таком выборе чисел α_k производная dv/dt — определенно - отрицательная однородная функция степени $z+1$ в конусе $\rho_k \geq 0$. Обозначим

$$c_1 = \sup_{\|\boldsymbol{\rho}\|_1=1} v^{1/z}, \; c_2 = \inf_{\|\boldsymbol{\rho}\|_1=1} v^{1/z},$$

$$M_1 = \sup_{\|\boldsymbol{\rho}\|_1=1} \Big(-\frac{dv/dt}{v^{(z+1)/z}} \Big), \; M_2 = \inf_{\|\boldsymbol{\rho}\|_1=1} \Big(-\frac{dv/dt}{v^{(z+1)/z}} \Big). \tag{3.34}$$

Интегрируя неравенства

$$-M_1 v^{(z+1)/z} \le \frac{dv}{dt} \le -M_2 v^{(z+1)/z},$$

при $\boldsymbol{\rho}(t) \neq \mathbf{0}$ приходим к следующим соотношениям:

$$\Big(\frac{c_1 M_1}{z} t + c_1 v\big(\boldsymbol{\rho}(t_0)\big)^{-1/z}\Big)^{-1} \le \|\boldsymbol{\rho}(t)\|_1 \le \Big(\frac{c_2 M_2}{z} t + c_2 v\big(\boldsymbol{\rho}(t_0)\big)^{-1/z}\Big)^{-1}, \ t \ge t_0. \tag{3.35}$$

Поскольку соответствующие решения систем (3.27) и (3.31) связаны соотношением $|\boldsymbol{r}(t)|^2 = \|\boldsymbol{\rho}(t)\|_1$, то из неравенств (3.35) с помощью предельного перехода при $t \to +\infty$ вытекают оценки функционалов (3.29). Итак, доказано следующее утверждение [12].

Лемма 3.5. *Предположим, что $N = 3$ и для модельной системы (3.31) выполнены условия критерия А.М. Молчанова (с. 43). Тогда на всяком решении $\boldsymbol{r}(t) \neq \mathbf{0}$ соответствующей системы (3.27) функционалы (3.29) удовлетворяют следующим неравенствам:*

$$0 < \sqrt{\frac{z}{c_1 M_1}} \le \phi^-[\boldsymbol{r}(t)] \le \phi^+[\boldsymbol{r}(t)] \le \sqrt{\frac{z}{c_2 M_2}},$$

где константы c_i, M_i определяются выражениями (3.34) через функцию Ляпунова (3.32) степени однородности z.

3.4.3. Асимптотическое интегрирование модельной системы. Исследуем характер стремления решений модельной системы (3.31) к особой точке $\boldsymbol{\rho} = \mathbf{0}$ в случае $q = 2$ при выполнении критерия асимптотической устойчивости А.М. Молчанова. Нетрудно проверить, что в рассматриваемом случае критерий асимптотической устойчивости эквивалентен пересечению условий $a_{11} < 0$, $a_{22} < 0$ с каким-нибудь из нижеперечисленных:

$$a_{11} \ge a_{21}; \tag{3.36}$$

$$a_{22} \ge a_{12}; \tag{3.37}$$

$$a_{11} < a_{21}; \ a_{22} < a_{12}; \ \Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} > 0. \tag{3.38}$$

Сначала рассмотрим вырожденный случай с $\Delta = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} = 0$. В этом случае критерий устойчивости требует отрицательность всех коэффициентов, и, будем полагать, что $a_{21} = ka_{11}$, $a_{22} = ka_{12}$, $k > 0$.

Если $k = 1$ (строки матрицы коэффициентов одинаковы), то через каждую точку квадранта $\rho_1 \geq 0, \rho_2 \geq 0$ проходит устойчивый инвариантный луч системы (3.31) и можно записать общее решение:

$$\rho_1(t) = -\frac{1}{a_{11} + a_{12}C_1}(t + C_2)^{-1};\ \rho_2(t) = -\frac{C_1}{a_{11} + a_{12}C_1}(t + C_2)^{-1}.$$

Обозначим

$$\phi = \lim_{t\to\infty}\Big\{t\big(\rho_1(t) + \rho_2(t)\big)\Big\} = \frac{1 + C_1}{-(a_{11} + a_{12}C_1)}.$$

Нетрудно видеть, что ϕ как функция от C_1 монотонна на положительной полуоси и положительные числа $-1/a_{11}$ и $-1/a_{22}$ являются точными верхней и нижней границами для ϕ по всевозможным начальным условиям $\rho_1(0) = {\rho_1}^0 \geq 0$, $\rho_2(0) = {\rho_2}^0 \geq 0$.

Рассмотрим случай $k \neq 1$. Система (3.31) в этом случае допускает понижение порядка

$$\begin{aligned} &\rho_2 = C_1{\rho_1}^{k-1};\\ &\dot\rho_1 = {\rho_1}^2(a_{11} + a_{12}C_1{\rho_1}^{k-1}). \end{aligned} \tag{3.39}$$

Запишем интеграл второго уравнения системы (3.39):

$$t = \int_{{\rho_1}^0}^{\rho_1} \frac{dx}{x^2(a_{11} + a_{12}C_1x^{k-1})}.$$

Выполняя интегрирование по частям, получаем

$$\begin{aligned} t &= -\frac{1}{x(a_{11} + a_{12}C_1x^{k-1})}\Big|_{{\rho_1}^0}^{\rho_1} - a_{12}C_1(k-1)\int_{{\rho_1}^0}^{\rho_1} \frac{dx}{x^{1-k}(a_{11} + a_{12}C_1x^{k-1})^2} = \\ &= -\frac{1 + \varepsilon(\rho_1)}{\rho_1(a_{11} + a_{12}C_1{\rho_1}^{k-1})} + \frac{1}{{\rho_1}^0(a_{11} + a_{12}C_1(\rho_1)^{k-1})}, \end{aligned} \tag{3.40}$$

где

$$\varepsilon(\rho_1) = a_{12}C_1(k-1)\rho_1(a_{11} + a_{12}C_1{\rho_1}^{k-1})\int_{{\rho_1}^0}^{\rho_1} \frac{dx}{x^{1-k}(a_{11} + a_{12}C_1x^{k-1})^2}.$$

Возвращаясь к (3.40), запишем $\rho_1(t)$ в виде:

$$\rho_1(t) = \frac{1+\varepsilon(\rho_1)}{-(a_{11}+a_{12}C_1{\rho_1}^{k-1})\Big(t-\frac{1}{{\rho_1}^0(a_{11}+a_{12}C_1({\rho_1}^0)^{k-1})}\Big)}. \tag{3.41}$$

Пользуясь правилом Лопиталя, получаем, что в случае $k>1$ имеет место равенство:

$$\lim_{t\to+\infty}\varepsilon\big(\rho_1(t)\big) = \lim_{\rho_1\to+0}\varepsilon(\rho_1) = 0,$$

поэтому из (3.41) следует, что при $k>1$ для всякого решения с положительными компонентами при $t\to\infty$ справедливо асимптотическое представление:

$$\rho_1(t) = -\frac{1}{a_{11}}t^{-1}+o\big(t^{-1}\big);\ \rho_2(t) = c\,t^{(a_{22}/a_{12}-1)}+o\big(t^{(a_{22}/a_{12}-1)}\big), \tag{3.42}$$

где константа $c>0$ определяется начальными данными. Для рассмотрения случая $k<1$ совершим замену $\tilde\rho_1=\rho_2, \tilde\rho_2=\rho_1$ и применим к системе

$$\dot{\tilde\rho}_1 = \tilde\rho_1(a_{22}\tilde\rho_1+a_{21}\tilde\rho_2);\ \dot{\tilde\rho}_2 = \tilde\rho_2(a_{12}\tilde\rho_1+a_{11}\tilde\rho_2) \tag{3.43}$$

рассуждения, проведенные выше для случая $k>1$. В результате получим, что при $\Delta=0$, $k<1$ для всякого решения с положительными компонентами системы (3.31) имеет место представление:

$$\rho_1(t) = c\,t^{(a_{12}/a_{22}-1)}+o\big(t^{(a_{12}/a_{22}-1)}\big);\ \rho_2(t) = -\frac{1}{a_{22}}t^{-1}+o\big(t^{-1}\big).$$

Для исследования системы (3.31) при $\Delta\neq0$, $\rho_1>0$, $\rho_2>0$ совершим замену переменных $\rho_2(t)=\rho_1(t)w(t)$, после чего получим такую систему

$$\begin{aligned}\dot\rho_1 &= {\rho_1}^2(a_{11}+a_{12}w);\\ \dot w &= \rho_1 w\{(a_{21}-a_{11})+(a_{22}-a_{12})w\}.\end{aligned} \tag{3.44}$$

Система (3.44) имеет первый интеграл, который в зависимости от значений коэффициентов a_{kj} записывается следующим образом

$$\rho_1 = Cw^{\frac{a_{11}}{a_{21}-a_{11}}}\Big|(a_{22}-a_{12})w+(a_{21}-a_{11})\Big|^{\frac{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}{(a_{11}-a_{21})(a_{22}-a_{12})}},$$

при $a_{11}\neq a_{21}, a_{22}\neq a_{12}$;

$$\rho_1 = Cw^{\frac{a_{11}}{a_{21}-a_{11}}}e^{\frac{a_{12}w}{a_{21}-a_{11}}},\quad \text{при } a_{22}=a_{12}\neq0;$$

$$\rho_1 = Cw^{\frac{a_{12}}{a_{22}-a_{12}}}e^{-\frac{a_{11}}{(a_{22}-a_{12})w}},\quad \text{при } a_{11}=a_{21}\neq0.$$

(3.45)

Интеграл (3.45) вместе с соотношением $\rho_2 = \rho_1 w$ можно рассматривать как параметрическое представление интегральных линий уравнения (3.31) с параметром $w > 0$. Из второго уравнения системы (3.44) видно, что $\dot{w} = 0$ только на инвариантных лучах системы (3.31), следовательно, $w(t)$ — монотонная функция. Пусть $\rho_1(t), w(t)$ — решение системы (3.44), и положительные числа w_1, w_2 таковы, что

$$w(t_1) = w_1, \ \operatorname{sign} h(w_1) = \operatorname{sign} h(w_2) = \operatorname{sign}(w_2 - w_1),$$

где

$$h(w) = w\{(a_{21} - a_{11}) + (a_{22} - a_{12})w\}.$$

Тогда, как видно из интеграла (3.45), при изменении w от w_1 до w_2 функция $\rho_1\big(w(t)\big)$ ограничена снизу некоторым положительным числом ρ^*, и $|\dot{w}| \geq \rho^* |h(w)|$. Следовательно, $w(t)$ достигнет значения w_2 за конечное время.

Приведенные соображения показывают, что при $t \to +\infty$ обязательно имеет место один из следующих случаев:

1) $w(t) \to 0$; 2) $w(t) \to w^* = \frac{a_{11}-a_{21}}{a_{22}-a_{12}}$; 3) $w(t) \to +\infty$.

Итак, установлено, что при выполнении критерия устойчивости всякое неотрицательное решение системы (3.44) при $t \to +\infty$ входит в особую точку $\rho_1 = \rho_2 = 0$ по направлению одного из инвариантных лучей. Для выяснения характера стремления решения $\rho_1(t)$, $\rho_2(t)$ к нулю, подставим интеграл (3.45) во второе уравнение системы (3.44) и проанализируем получающиеся квадратурные формулы для $\rho_1(t)$, $\rho_2(t)$ при $t \to +\infty$.

1. Исследуем случаи, когда $w(t) \to 0$ при $t \to +\infty$. Это имеет место тогда и только тогда, когда $h({\rho_2}^0/{\rho_1}^0) < 0$ и $h(w) < 0$ для достаточно малых w. Возможны 3 варианта.

1.1. $a_{21} < a_{11}$, $a_{12} \neq a_{22}$, $(a_{21} - a_{11})\rho_1(t_0) + (a_{22} - a_{12})\rho_2(t_0) < 0$. Подстановка интеграла (3.45) во второе уравнение системы (3.44) дает

$$\dot{w} = -Cw^{\alpha+1}\left\{-(a_{22} - a_{12})w + (a_{11} - a_{21})\right\}^{\beta+1},$$

где $\alpha = \frac{a_{11}}{a_{21}-a_{11}} > 0$, $\beta = \frac{a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}}{(a_{11}-a_{21})(a_{22}-a_{12})}$.

$$Ct = -\int_{w_0}^{w} v^{-(\alpha+1)} \left\{(a_{11}-a_{21})-(a_{22}-a_{12})v\right\}^{-(\beta+1)} dv =$$

$$= \frac{v^{-\alpha}}{\alpha} \left\{(a_{11}-a_{21})-(a_{22}-a_{12})v\right\}^{-(\beta+1)} \Big|_{w_0}^{w} +$$

$$+\frac{(a_{22}-a_{12})(\beta+1)}{\alpha} \int_{w}^{w_0} v^{-\alpha} \left\{(a_{11}-a_{21})-(a_{22}-a_{12})v\right\}^{-(\beta+2)} dv.$$

Обозначим

$$\varepsilon(w) = \frac{(a_{22}-a_{12})(\beta+1)\int_{w}^{w_0} v^{-\alpha} \left\{(a_{11}-a_{21})-(a_{22}-a_{12})v\right\}^{-(\beta+2)} dv}{w^{-\alpha} \left\{(a_{11}-a_{21})-(a_{22}-a_{12})w\right\}^{-(\beta+2)}}.$$

Нетрудно показать, что $\varepsilon(w) \to 0$ при $w \to 0$, следовательно

$$w(t) = \Big\{\alpha(a_{11}-a_{21})^{\beta+1}Ct\Big\}^{-1/\alpha} + o(t^{-1/\alpha}) \quad \text{при } t \to \infty. \tag{3.46}$$

Используя интеграл (3.45), приходим к соотношению

$$\rho_1(t) = \frac{1+\varepsilon(w)}{\left\{(a_{11}-a_{21})-(a_{22}-a_{12})w\right\}\left(\frac{a_{11}}{a_{21}-a_{11}}t + \frac{1}{\rho_1(t_0)(a_{11}-a_{21})-(a_{22}-a_{12})w_0}\right)}. \tag{3.47}$$

Из формул (3.46) и (3.47) при $t \to +\infty$ вытекает следующее асимптотическое представление:

$$\rho_1(t) = -\frac{1}{a_{11}}t^{-1} + o\big(t^{-1}\big);\ \rho_2(t) = c\,t^{-a_{21}/a_{11}} + o\big(t^{-a_{21}/a_{11}}\big), \tag{3.48}$$

где положительная константа c зависит от начальных данных.

1.2. $a_{21} < a_{11}, a_{12} = a_{22}$. Обозначим $\gamma = \frac{a_{12}}{a_{21}-a_{11}} > 0$. Подставив интеграл (3.45) во второе уравнение системы (3.44), будем иметь

$$C(a_{21}-a_{11})t = \int_{w_0}^{w} v^{-(\alpha+1)} e^{-\gamma v} dv = -\frac{1}{\alpha} v^{-\alpha} e^{-\gamma v}\Big|_{w_0}^{w} - \frac{\gamma}{\alpha}\int_{w_0}^{w} v^{-\alpha} e^{-\gamma v} dv. \tag{3.49}$$

Обозначим

$$\varepsilon(w) = \frac{\gamma\int_{w_0}^{w} v^{-\alpha} e^{-\gamma v} dv}{w^{-\alpha} e^{-\gamma w}}.$$

Поскольку $\varepsilon(w) \to 0$ при $w \to 0$, то из выражения (3.49) вытекает представление (3.46) с $\beta = 0$. Запишем выражение для $\rho_1(t)$:

$$\rho_1(t) = \frac{1+\varepsilon(w)}{-a_{11}t + 1/\rho_1{}^0}. \tag{3.50}$$

Отсюда с помощью (3.46) получаем (3.48).

1.3. $a_{11} = a_{21}$, $a_{22} < a_{12}$ Выполняя преобразования, аналогичные приведенным выше, и обозначая

$$\varepsilon(w) = \frac{a_{12}\int_{w_0}^{w} v^{-\frac{a_{22}}{a_{22}-a_{12}}} e^{\frac{a_{11}}{(a_{22}-a_{12})v}} dv}{(a_{22}-a_{12}) w^{-\frac{a_{12}}{a_{22}-a_{12}}} e^{\frac{a_{11}}{(a_{22}-a_{12})w}}},$$

получим выражение (3.50) для $\rho_1(t)$ и следующее представление для $w(t)$:

$$w(t) = \frac{a_{11}}{a_{22}-a_{12}}(\ln t)^{-1} + o\Big((\ln t)^{-1}\Big) \quad \text{при } t \to \infty.$$

Убедившись в том, что $\varepsilon(w) \to 0$ при $w \to 0$, получим:

$$\rho_1(t) = -\frac{1}{a_{11}} t^{-1} + o\big(t^{-1}\big);\ \rho_2(t) = \frac{1}{a_{12}-a_{22}}(t\ln t)^{-1} + o\Big((t\ln t)^{-1}\Big). \quad (3.51)$$

2. Случаи с $w \to w^* = \frac{a_{11}-a_{21}}{a_{22}-a_{12}}$ $(w_0 \neq w^*)$ возможны только при условиях $w^* > 0$, $h(w^*-\delta) > 0$, $h(w^*+\delta) < 0$, для малых $\delta > 0$. Такие условия задаются выражениями (3.38). Не ограничивая общности считаем, что $w < w^*$, поскольку при $w > w^*$ можно сделать замену $\tilde{\rho}_1 = \rho_2$, $\tilde{\rho}_2 = \rho_1$ и рассмотреть систему (3.43). Подставив интеграл (3.45) во второе уравнение (3.44) будем иметь

$$\dot{w} = C w^{\alpha+1}\Big\{(a_{22}-a_{12})w + (a_{21}-a_{11})\Big\}^{(\beta+1)}.$$

После несложных преобразований получим

$$\rho_1(t) = \frac{1+\varepsilon(w(t))}{w(t)\Big\{\frac{\Delta}{a_{21}-a_{11}}t + 1/\rho_2{}^0\Big\}}, \quad (3.52)$$

где

$$\varepsilon(w) = \frac{(\alpha+1)\int_{w_0}^{w} v^{-(\alpha+2)}\Big\{(a_{22}-a_{12})v + (a_{21}-a_{11})\Big\}^{-\beta} dv}{w^{-(\alpha+1)}\Big\{(a_{22}-a_{12})v + (a_{21}-a_{11})\Big\}^{-\beta}}.$$

Можно показать, что $\varepsilon(w) \to 0$ при $w \to w^*-0$, поэтому из формулы (3.52) при $t \to \infty$ вытекает асимптотическое представление:

$$\rho_1(t) = \frac{a_{12}-a_{22}}{\Delta}t^{-1} + o(t^{-1});\ \rho_2(t) = \frac{a_{21}-a_{11}}{\Delta}t^{-1} + o(t^{-1}).$$

3. Случаи с $w \to +\infty$ при $t \to \infty$ после перехода к системе (3.43) сводятся к ранее рассмотренным случаям 1.1, 1.2, 1.3. Таким образом, проанализированы все случаи асимптотической устойчивости системы (3.31).

Проведенные выше рассуждения доказывают следующую теорему.

Теорема 3.3. [12] *Пусть тривиальное решение модельной системы (3.31) асимптотически устойчиво в квадранте* $\rho_1 \geq 0$, $\rho_2 \geq 0$, $q = 2$. *Тогда для произвольных начальных условий* $\rho_1(t_0) = {\rho_1}^0 > 0$, $\rho_2(t_0) = {\rho_2}^0 > 0$ *соответствующее решение* $\rho_1(t), \rho_2(t)$ *системы (3.31) допускает при* $t \to +\infty$ *асимптотическое представление:*

1. *Если выполнены условия* $\Big(a_{11} > a_{21},\, a_{12} < a_{22},\, \frac{{\rho_2}^0}{{\rho_1}^0} < \frac{a_{11}-a_{21}}{a_{22}-a_{12}}\Big)$ *или* $\Big(a_{11} \geq a_{21},\, a_{12} \geq a_{22},\, \Delta \neq 0\Big)$ *или* $\Big(a_{11} > a_{21}, \Delta = 0\Big)$, *то*

$$\rho_1(t) = -\frac{1}{a_{11}} t^{-1} + o(t^{-1}),\ \rho_2(t) = O\Big((t \ln t)^{-1}\Big). \tag{3.53}$$

2. *Если выполнено условие* $\Big(a_{11} < a_{21},\, a_{12} > a_{22},\, \Delta > 0\Big)$ *или* $\Big(a_{11} > a_{21},\, a_{12} < a_{22},\, \frac{{\rho_2}^0}{{\rho_1}^0} = \frac{a_{11}-a_{21}}{a_{22}-a_{12}}\Big)$, *то*

$$\rho_1(t) = \frac{a_{12} - a_{22}}{\Delta} t^{-1} + o(t^{-1}),\ \rho_2(t) = \frac{a_{21} - a_{11}}{\Delta} t^{-1} + o(t^{-1}). \tag{3.54}$$

3. *Если выполнено условие* $\Big(a_{11} > a_{21},\, a_{12} < a_{22},\, \frac{{\rho_2}^0}{{\rho_1}^0} > \frac{a_{11}-a_{21}}{a_{22}-a_{12}}\Big)$ *или* $\Big(a_{11} \leq a_{21},\, a_{12} \leq a_{22},\, \Delta \neq 0\Big)$ *или* $\Big(a_{11} < a_{21},\, \Delta = 0\Big)$, *то*

$$\rho_1(t) = O\Big((t \ln t)^{-1}\Big),\ \rho_2(t) = -\frac{1}{a_{22}} t^{-1} + o(t^{-1}). \tag{3.55}$$

4. *Если* $\Big(a_{11} = a_{21} < 0,\, a_{12} = a_{22} < 0\Big)$, *то*

$$\rho_1(t) = -\frac{{\rho_1}^0}{a_{11}{\rho_1}^0 + a_{12}{\rho_2}^0} t^{-1} + o(t^{-1}),\ \rho_2(t) = -\frac{{\rho_2}^0}{a_{11}{\rho_1}^0 + a_{12}{\rho_2}^0} t^{-1} + o(t^{-1}). \tag{3.56}$$

Приведенные условия 1-4 содержат все случаи асимптотической устойчивости модельной системы, при этом конкретный вид функций

$O\Big((t\ln t)^{-1}\Big)$ *в (3.53), (3.55) определяется выражениями (3.42), (3.48), (3.51).*

Из теоремы 3.3 следует, что в асимптотически устойчивом случае $q = 2$ всякое решение модельной системы (3.31) аппроксимируется решением из некоторого устойчивого инвариантного луча с погрешностью порядка $o(t^{-1})$ при $t \to +\infty$. Действительно, выражение (3.53) соответствует решениям, принадлежащим инвариантному лучу $\rho_1 \geq 0$, $\rho_2 = 0$; выражение (3.54) — инвариантному лучу, определяемому системой (2.25) при $\rho_1 > 0$, $\rho_2 > 0$; выражение (3.55) — инвариантному лучу $\rho_1 = 0$, $\rho_2 \geq 0$. Выражение (3.56) соответствует вырожденному случаю, когда через каждую точку положительного квадранта проходит устойчивый инвариантный луч системы (3.31).

Отметим любопытное свойство решений модельной системы (3.31) при существовании в квадранте $\rho_1 \geq 0$, $\rho_2 \geq 0$ ровно трех устойчивых инвариантных лучей: если выбрать коэффициенты a_{kj} так, чтобы выполнялись условия (3.38), то будем иметь случай (3.54); если же коэффициенты системы удовлетворяют соотношениям $a_{21} < a_{11} < 0$, $a_{12} < a_{22} < 0$, то имеют место случаи (3.53) или (3.55), в зависимости от того, с какой стороны от инвариантного луча $\frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{a_{11}-a_{21}}{a_{22}-a_{12}}$ лежат начальные данные.

С помощью теоремы 3.3 могут быть вычислены функционалы (3.29) на решениях системы (3.27), соответствующей модельной системе (3.31). Действительно, в условиях теоремы 3.3 на каждом решении системы (3.27) значения пределов (3.39) совпадают и равны величине

$$\phi = \lim_{t\to+\infty} \sqrt{t\big(\rho_1(t) + \rho_2(t)\big)}, \tag{3.57}$$

где $\rho_1(t), \rho_2(t)$ — решение из некоторого устойчивого инвариантным луча модельной системы (3.31). Таким образом, в случае $q = 2$, $N = 3$ для нахождения точных верхних границ в условии оптимальности (3.30) достаточно вычислить пределы (3.57) на всех решениях из устойчивых инвариантных лучей соответствующей модельной системы (3.57). Ниже

этот важный вывод будет распространен на случай произвольного $N \geq 3$.

3.4.4. Асимптотические оценки решений при выполнении критерия Г.В. Каменкова. Предположим, что $q = 2$, $N \geq 3$, и что тривиальной решение модельной системы (3.28) асимптотически устойчиво в квадранте $\rho_1 \geq 0$, $\rho_2 \geq 0$. Согласно критерию устойчивости — теореме 2.12 (с. 43) это означает, что для каждого $E \geq 0$ алгебраическая система (2.25) либо не имеет нетривиальных решений, либо соответствующее нетривиальное решение $\tilde{\rho}_1, \tilde{\rho}_2$ удовлетворяет условию $\tilde{\rho}_1 < 0$ (или $\tilde{\rho}_2 < 0$). Отметим, что с ростом числа N растет и количество коэффициентов модельной системы (3.28), следовательно, асимптотическое интегрирование системы (3.28) для произвольного $N > 3$ путем анализа соответствующих квадратурных формул при $t \to +\infty$ сопряжено с довольно громоздкими выкладками. Поэтому существование пределов

$$l_k = \lim_{t \to +\infty} \left\{ t^{2/(N-1)} \rho_k(t) \right\}, \ k = 1, 2 \tag{3.58}$$

на решениях модельной системы (3.28) для произвольного $N \geq 3$ докажем с помощью методов качественной теории дифференциальных уравнений.

Будем считать, что решения системы (3.28) с начальными условиями $\rho_1(0) \geq 0$, $\rho_2(0) \geq 0$ из некоторой окрестности начала координат определены при $-T \leq t < +\infty$, где $T > 0$. Для исследования асимптотических свойств решений модельной системы при $t \to +\infty$ совершим замену:

$$\tau = \ln(t + T), \ \rho_j(t) = \eta_j(\tau) e^{-2\tau/(N-1)}, \ j = 1, 2. \tag{3.59}$$

В результате замены (3.59) получим следующую автономную систему дифференциальных уравнений относительно $\eta_1(\tau) \geq 0$, $\eta_2(\tau) \geq 0$:

$$\frac{d\eta_j}{d\tau} = \eta_j \Big(\sum_{k_1 + k_2 = [(N-1)/2]} G_j^{(k_1,k_2)} {\eta_1}^{k_1} {\eta_2}^{k_2} + \frac{2}{N-1} \Big), \quad j = 1, 2. \tag{3.60}$$

Легко видеть, что координаты особых точек системы (3.60) удовлетворяют системе уравнений для инвариантных лучей (2.25) при значении

параметра $E = -2/(N-1)$. С целью исследования ω-предельных множеств решений системы (3.60) приведем необходимые утверждения из качественной теории автономных систем на плоскости. Пусть L — траектория системы (3.60). Если положительная полутраектория траектории L лежит в ограниченной области, то будем говорить, что траектория L (и соответствующее ей решение системы) *положительно устойчива по Лагранжу* [103, с. 24].

Утверждение 3.1. [103, с. 29] *Если множество ω-предельных точек положительно устойчивой по Лагранжу траектории L не содержит особой точки, то все ω-предельные точки траектории L лежат на замкнутой траектории L_1, к которой L приближается при $\tau \to +\infty$.*

Утверждение 3.2. [103, с. 31] *Если положительно устойчивая по Лагранжу траектория L содержит в числе своих ω-предельных точек одну особую точку P и сверх того имеет и неособые предельные точки, то существует неособая траектория L_1, которая примыкает к P как при $\tau \to +\infty$, так и при $\tau \to -\infty$.*

Утверждение 3.3. [103, с. 32] *Внутри плоской области G, ограниченной замкнутой траекторией и целиком принадлежащей области существования и единственности решений, существует по крайней мере одна особая точка.*

Опираясь на эти утверждения, докажем следующую лемму.

Лемма 3.6. *Пусть $q = 2$, и пусть тривиальное решение модельной системы (3.28) асимптотически устойчиво в квадранте $\rho_1 \geq 0$, $\rho_2 \geq 0$. Тогда всякое решение $\eta_1(t), \eta_2(t)$ системы (3.60), лежащее в квадранте $\eta_1 \geq 0$, $\eta_2 \geq 0$, стремится при $\tau \to +\infty$ к некоторой ненулевой особой точке системы (3.60).*

Доказательство. Пусть $\eta_1(\tau), \eta_2(\tau)$ — решение системы (3.60) из положительного квадранта. Соответствующее ему решение $\rho_1(t), \rho_2(t)$ по теореме 2.10 (с. 42) удовлетворяет следующей степенной оценке

при $t \to +\infty$:

$$\rho_1(t) + \rho_2(t) = O\big(t^{-2/(N-1)}\big). \tag{3.61}$$

Поскольку соответствующие решения систем (3.28) и (3.60) связаны соотношениями (3.59), то из оценки (3.61) вытекает, что траектория

$$L = \{\, (\eta_1(\tau), \eta_2(\tau)) \,:\, -\infty < \tau < +\infty \,\}$$

является положительно устойчивой по Лагранжу. Следовательно, множество L_ω — множество ω-предельных точек траектории L не пусто и ограничено. Рассмотрим три случая.

1. Множество L_ω не содержит особых точек. Тогда по утверждению 3.1 L_ω представляет собой неособую замкнутую траекторию L_1 системы (3.60). Внутри области, ограниченной траекторией L_1 существует (утверждение 3.3) особая точка системы, которая принадлежит некоторому инвариантных лучу. Следовательно, замкнутая траектория L_1 должна пересекать инвариантный луч (который состоит из незамкнутых траекторий), что противоречит свойству единственности решений системы (3.60).

2. Множество L_ω содержит более одной особой точки. Все особые точки системы (3.60) лежат на инвариантных лучах, причем любое решение из инвариантного луча стремится при $t \to +\infty$ к единственной особой точке. Поскольку выражение $\frac{d}{d\tau}(\eta_1/\eta_2)$ сохраняет знак внутри конуса, ограниченного инвариантными лучами, то траектория L не может примыкать к различным инвариантным лучам, а значит, множество L_ω не может содержать более одной особой точки.

3. Множество L_ω содержит одну особую точку P. Если кроме того, есть и неособые ω-предельные точки, то по утверждению 3.2 существует неособая траектория L_1, примыкающая к особой точке при $\tau \to \pm\infty$. Единственной особой точкой, к которой L_1 может примыкать при

$\tau \to -\infty$, является начало координат. Действительно, решения системы (3.28) определены на $[-T, +\infty)$, а значит $\rho_j = \eta_j(\tau)e^{-2\tau/(N-1)}$ ограничены при $\tau \to -\infty$ (при $t \to -T+0$). Отсюда вытекает, что $\eta_1 \to 0$, $\eta_2 \to 0$ при $\tau \to -\infty$. С другой стороны, начало координат является экспоненциально неустойчивым узлом системы (3.60) по линейному приближению. Следовательно, никакая траектория системы (3.60), отличная от нуля, не может примыкать к нулю при $\tau \to +\infty$. Таким образом, $L_\omega \setminus \{P\} = \emptyset$.

Итак, ω-предельное множество траектории L состоит из единственной особой точки P, т.е. $\big(\eta_1(\tau), \eta_2(\tau)\big) \to P \neq (0,0)$ при $\tau \to +\infty$. Лемма доказана.

Поскольку система (3.60) получена из (3.28) с помощью замены (3.59), то из леммы 3.6 следует, что *в случае асимптотической устойчивости для каждого нетривиального решения модельной системы (3.28) из положительного квадранта существуют не равные нулю одновременно пределы (3.58), которые удовлетворяют системе алгебраических уравнений (2.25) (с l_k вместо $\tilde{\rho}_k$) при значении параметра $E = -2/(N-1)$.*

С другой стороны, каждое неотрицательное решение системы (2.25) при $E = -2/(N-1)$ соответствует значениям пределов (3.58) на решении системы (3.28) из соответствующего устойчивого инвариантного луча. Следовательно, верхняя граница функционалов (3.29) может быть вычислена с помощью системы (2.25). Приведенные рассуждения доказывают следующую теорему [14].

Теорема 3.4. *Предположим, что тривиальное решение модельной системы (3.28) асимптотически устойчиво в квадранте $\rho_1 \geq 0$, $\rho_2 \geq 0$, $q = 2$. Тогда для всякого решения $\boldsymbol{r}(t)$ соответствующей системы (3.27) существует конечный предел*

$$\phi^+[\boldsymbol{r}(t)] = \phi^-[\boldsymbol{r}(t)] = \lim_{t\to+\infty}\big\{t^{1/(N-1)}|\boldsymbol{r}(t)|\big\}.$$

При этом

$$\phi^* \equiv \sup_{\boldsymbol{r}(0)\in\mathbb{R}^2} \left\{\phi^+[\boldsymbol{r}(t)]\right\} = \sup \sqrt{\tilde{\rho}_1 + \tilde{\rho}_2}\,, \tag{3.62}$$

где верхняя граница в правой части равенства (3.62) берется по всевозможным решениям $\tilde{\rho}_1 \geq 0$, $\tilde{\rho}_2 \geq 0$ *системы алгебраических уравнений (2.25) при* $E = -\frac{2}{N-1}$, $l = \frac{N-1}{2}$.

Итак, в критическом случае двух пар чисто мнимых корней решение задачи об оптимальной (в смысле определения 3.8) стабилизации сведено к задаче о нахождении допустимой обратной связи $\boldsymbol{u} \in \mathcal{U}_0$, минимизирующей значение (3.62), которое конструктивно определяется по коэффициентам соответствующей модельной системы (а значит, и по коэффициентам разложения обратной связи).

В частности, если $N = 3$, то система (2.25) распадается на три системы линейных алгебраических уравнений, и для вычисления значения ϕ^* по коэффициентам модельной системы (3.31) достаточно рассмотреть максимум выражения $\tilde{\rho}_1 + \tilde{\rho}_2$ на решениях этих линейных систем. Таким образом, в случае $N = 3$, $q = 2$ имеет место равенство:

$$\left(\phi^*\right)^2 = \max\left\{-\frac{1}{a_{11}}, -\frac{1}{a_{22}}, \frac{a_{12} - a_{22} + a_{21} - a_{11}}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}}\right\}, \tag{3.63}$$

где последнее выражение в фигурных скобках учитывается только при условии существования устойчивого инвариантного луча, проходящего строго внутри квадранта $\rho_1 \geq 0$, $\rho_2 \geq 0$, т.е. при выполнении одного из следующих условий

$$(a_{21} > a_{11},\, a_{12} > a_{22},\, a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} > 0) \tag{3.64}$$

$$(a_{21} < a_{11},\, a_{12} < a_{22}). \tag{3.65}$$

Заметим, что выражение (3.63) и условия (3.64), (3.65) могут быть получены с помощью теоремы 3.3.

Для иллюстрации применения формул (3.62), (3.63) в задачах оптимальной стабилизации рассмотрим следующий пример.

Пример 3.3. Пусть задана система

$$\dot{x}_1 = -\omega_1 y_1 - \frac{1}{2}x_1({x_1}^2 + {y_1}^2) - \frac{1}{2}x_1 u_2;$$
$$\dot{y}_1 = \omega_1 x_1 - \frac{1}{2}y_1({x_1}^2 + {y_1}^2) - \frac{1}{2}y_1 u_2;$$
$$\dot{x}_2 = -\omega_2 y_2 - \frac{1}{2}x_2({x_2}^2 + {y_2}^2) - \frac{1}{2}x_2 u_1;$$
$$\dot{y}_2 = \omega_2 x_2 - \frac{1}{2}y_2({x_2}^2 + {y_2}^2) - \frac{1}{2}y_2 u_1, \tag{3.66}$$

где ω_1, ω_2 — ненулевые вещественные константы. Таким образом, при любом управлении с обратной связью класса C^1 для соответствующей замкнутой системы имеет место критический случай двух пар чисто мнимых корней. В качестве класса $\mathcal{U}$ допустимых обратных связей для системы (3.66) будем рассматривать множество функций вида

$$u_1 = \beta({x_1}^2 + {y_1}^2),\ u_2 = \alpha({x_2}^2 + {y_2}^2), \tag{3.67}$$

где константы α, β стеснены ограничениями $\alpha_1 \le \alpha \le \alpha_2$, $\beta_1 \le \beta \le \beta_2$. Подставляя обратную связь (3.67) в правую часть системы (3.66), с помощью замены переменных

$$x_s = r_s \cos\theta_s,\ y_s = r_s \sin\theta_s, \quad s = 1, 2$$

получим следующую систему:

$$\dot{r}_1 = -\frac{1}{2}r_1({r_1}^2 + \alpha {r_2}^2);\ \dot{r}_2 = -\frac{1}{2}r_2(\beta {r_1}^2 + {r_2}^2);$$
$$\dot{\theta}_1 = \omega_1;\ \dot{\theta}_1 = \omega_2.$$

Отсюда путем замены $\rho_s = {r_s}^2$ приходим к модельной системе:

$$\dot{\rho}_1 = -\rho_1(\rho_1 + \alpha\rho_1);$$
$$\dot{\rho}_2 = -\rho_2(\beta\rho_1 + \rho_2). \tag{3.68}$$

Необходимые и достаточные условия асимптотической устойчивости решения $\rho_1 = \rho_2 = 0$ модельной системы (3.68) в конусе $\rho_1 \ge 0$, $\rho_2 \ge 0$ описываются неравенствами (3.36)-(3.38). Обозначим

$$M_1 = \{(\alpha, \beta) :\ \alpha < 1,\ \beta < 1,\ \alpha\beta < 1\},$$

$$M_2 = \{(\alpha, \beta) : \alpha \geq 1 \text{ или } \beta \geq 1\}.$$

В соответствии с неравенствами (3.36)-(3.38), тривиальное решение является асимптотически устойчивым тогда и только тогда, когда $(\alpha, \beta) \in M_1 \cup M_2$ (в плоскости параметров α, β устойчивые системы лежат выше отрицательной ветви гиперболы $\alpha\beta = 1$).

Таким образом, необходимым и достаточным условием разрешимости задачи стабилизации в классе $\mathcal{U}$ является условие $(\alpha_2, \beta_2) \in M_1 \cup M_2$. Обозначим через $\mathcal{U}_0 \subset \mathcal{U}$ множество допустимых управлений, для которых $(\alpha, \beta) \in M_1 \cup M_2$. Согласно теореме 3.4, для всякого $\boldsymbol{u} \in \mathcal{U}_0$ значение величины (3.62) определяется инвариантными лучами модельной системы. Вычисляя (3.63) через коэффициенты модельной системы (3.68), будем иметь:

$$\phi^{*2} = \begin{cases} \frac{2-\alpha-\beta}{1-\alpha\beta}, & \text{при } (\alpha, \beta) \in M_1; \\ 1, & \text{при } (\alpha, \beta) \in M_2. \end{cases} \tag{3.69}$$

Нетрудно показать, что при $(\alpha, \beta) \in M_1$ выполнены неравенства

$$f(\alpha, \beta) \equiv \frac{2 - \alpha - \beta}{1 - \alpha\beta} > 1,$$

$$\frac{\partial f(\alpha, \beta)}{\partial \alpha} < 0, \ \frac{\partial f(\alpha, \beta)}{\partial \beta} < 0.$$

Это означает, что в области M_1 функция (3.69) монотонно убывает по α при фиксированном β (и по β при фиксированном α); кроме того легко видеть, что

$$\inf_{(\alpha,\beta)\in M_1} \phi^* = 1.$$

Итак, если $(\alpha_2, \beta_2) \in M_1 \cup M_2$, то задача об оптимальной (в смысле определения 3.8) стабилизации для системы (3.66) решается в классе $\mathcal{U}$, при этом оптимальными являются значения параметров $\alpha = \alpha_2$, $\beta = \beta_2$. Если $(\alpha_2, \beta_2) \in M_1$, то задача об оптимальной стабилизации имеет единственное решение. Если же $(\alpha_2, \beta_2) \in M_2$, то решение, вообще говоря, неединственно (всякая обратная связь с параметрами из множес-

тва $\big([\alpha_1, \alpha_2] \times [\beta_1, \beta_2]\big) \cap M_2$ удовлетворяет условию оптимальности (3.30), при этом оптимальное значение величин (3.62) равно единице).

3.5. Выводы

В разделе 3 исследовались задачи стабилизации нелинейных автономных систем с помощью управления с обратной связью вида $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$. Перечислим основные результаты этих исследований.

1. В подразделе 3.1 получены условия локальной достижимости (леммы 3.1, 3.3-3.4) и локальной управляемости (лемма 3.2) в терминах ориентированных многообразий, распространяющие результаты А.М. Ковалёва [43, Гл. 1.2, 2.1] на локальный случай.

2. На основе результатов подраздела 3.1 и аппарата дифференциальных включений в подразделе 3.2 доказана теорема 3.1, согласно которой всякая система, обладающая свойством локальной достижимости (управляемости), является неасимптотически стабилизируемой с помощью разрывной обратной связи. При этом решения системы дифференциальных уравнений с разрывной правой частью определяются по А.Ф. Филиппову. Приведенные примеры (система Брокетта (3.1) и пример 3.1) показывают, что в общем случае утверждение теоремы 3.1 не может быть усилено.

3. В подразделе 3.3 для линейной по управлению системы доказана теорема 3.2 о характере множества точек разрыва функции обратной связи, обеспечивающей неасимптотическую стабилизацию в условиях теоремы 3.1. Из теоремы 3.2 следует, что множество точек разрыва искомой обратной связи не может быть “слишком большим”, т.е. оно заведомо содержится в некотором гладком многообразии размерности не выше $n - 1$.

4. В подразделе 3.4 поставлена задача об оптимальной по скорости затухания стабилизации (определение 3.8). Для критического случая q пар чисто мнимых корней доказана лемма 3.5, с помощью которой могут быть построены оценки неинтегральных функционалов качества (3.29), входящих в условие оптимальности (3.30).

5. Для критического случая двух пар чисто мнимых корней получены асимптотические оценки решений модельной системы при $t \to +\infty$ (теоремы 3.3, 3.4 и лемма 3.6). Отметим, что с помощью теоремы 3.3 могут быть найдены пределы (3.58) в зависимости от начальных условий. Теорема 3.4 сводит решение поставленной задачи об оптимальной стабилизации к минимизации величины (3.62), конструктивно вычисляемой через решения вспомогательной алгебраической системы. Такое сведение проиллюстрировано с помощью примера 3.3.

РАЗДЕЛ IV
СТАБИЛИЗАЦИЯ ПО ОТНОШЕНИЮ К ЧАСТИ ПЕРЕМЕННЫХ

Как было отмечено в обзоре В.И. Воротникова [4, с. 53], в задаче о стабилизации по части переменных основной проблемой является разработка конструктивных способов построения стабилизирующих законов управления, как для достаточно общих, так и для конкретных систем. Для решения этой проблемы представляется целесообразным использовать универсальные методы, применяемые в задачах стабилизации по всем переменным.

Одним из эффективных методов исследования в задачах стабилизации по всем переменным является метод "управляемых функций Ляпунова" [9, 38, 49]. Напомним [38], что управляемой функцией Ляпунова для автономной системы (3.9) в окрестности нуля B называется такая определенно-положительная функция $V(\boldsymbol{x})$, для которой при всех $\boldsymbol{x} \in B \setminus \{\mathbf{0}\}$ выполнено неравенство:

$$\inf_{\boldsymbol{u}\in\mathbb{U}} \big\langle \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{x}} V(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) \big\rangle < 0.$$

В работе [9] доказана эквивалентность свойства стабилизируемости автономной системы и существования у нее управляемой функции Ляпунова, если в качестве допустимых обратных связей рассматривать непрерывные в $B \setminus \{\mathbf{0}\}$ обобщенные (relaxed) обратные связи $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$. В частном случае, для линейной по управлению системы справедливо следующее утверждение.

Теорема Артстейна. [9] *Пусть $\mathbb{U}$ — выпуклое множество. Для стабилизируемости системы (3.16) с помощью обратной связи $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ класса $C(\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\})$ необходимо и достаточно, чтобы в некоторой окрестности нуля B существовала управляемая функция Ляпунова $V(\boldsymbol{x})$. Кроме того, система глобально стабилизируема, если и только если можно выбрать $B = \mathbb{R}^n$ и $V(\boldsymbol{x}) \to \infty$ при $|\boldsymbol{x}| \to \infty$.*

Если система (3.9) не является линейной по управлению, то утверждение теоремы Артстейна, вообще говоря, не может быть усилено до существования обратной связи класса $C(\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\})$. В качестве примера рассмотрим вполне управляемую систему, приведенную в работе [20]:

$$\dot{x}_1 = u_2 u_3, \ \dot{x}_2 = u_1 u_3, \ \dot{x}_3 = u_1 u_2. \tag{4.1}$$

Легко видеть, что функция $V(\boldsymbol{x}) = {x_1}^2 + {x_2}^2 + {x_3}^2$ является управляемой функцией Ляпунова для системы (4.1). Однако, система (4.1) не является стабилизируемой с помощью обратной связи $u(\boldsymbol{x})$ класса $C(\mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\})$, поскольку она не удовлетворяет необходимому условию Брокетта — теореме 1.1. Действительно, для любого $\varepsilon \neq 0$ система алгебраических уравнений

$$(u_2 u_3, u_1 u_3, u_1 u_2)^T = (0, \varepsilon, \varepsilon)^T$$

не разрешима относительно $\boldsymbol{u}$, т.е. условие Брокетта не выполнено.

Следует отметить, что доказательство теоремы Артстейна в [9] носит неконструктивный характер. В работе [37] для случая системы (3.16) с одномерным управлением ($m = 1$) методом динамического программирования Беллмана построена стабилизирующая обратная связь, при условии существования управляемой функции Ляпунова $V(\boldsymbol{x})$. Предложенная обратная связь имеет вид:

$$u_1(\boldsymbol{x}) = -\frac{a + \sqrt{a^2 + {b_1}^2}}{b_1} \ \text{ при } \ b_1 \neq 0; \quad u_1(\boldsymbol{x}) = 0 \ \text{ при } \ b_1 = 0, \tag{4.2}$$

где функции a, b_1 определяются выражениями (3.17). Стабилизирующая формула типа (4.2) обобщена на случай произвольной размерности m в статьях [39, 38].

В данном разделе диссертации вводится определение управляемых функций Ляпунова по части переменных. С помощью функций такого типа будут предложены конструктивные способы построения управления с обратной связью, решающего задачу о частичной стабилизации нелинейной системы.

4.1. Построение обратной связи с помощью управляемой функции Ляпунова по части переменных

Рассмотрим неавтономную систему:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}), \quad \boldsymbol{x} \in \mathbb{R}^n, \ \boldsymbol{u} \in \mathbb{U} \subset \mathbb{R}^m. \tag{4.3}$$

Система (4.3) рассматривается на промежутке времени $\mathcal{I} = [0, +\infty)$. Предполагается, что $\mathbf{0} \in \mathbb{U}$, $\boldsymbol{f}(t, \mathbf{0}, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$ при всех $t \in \mathcal{I}$. Запишем фазовый вектор системы в виде

$$\boldsymbol{x} = (y_1, ..., y_{n_1}, z_1, ..., z_{n_2})^T = \left(\boldsymbol{y}^T, \boldsymbol{z}^T\right)^T, \ n_1 + n_2 = n.$$

Тогда система (4.3) примет вид

$$\dot{\boldsymbol{y}} = \boldsymbol{Y}(t, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{u}), \ \ \dot{\boldsymbol{z}} = \boldsymbol{Z}(t, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}, \boldsymbol{u}). \tag{4.4}$$

Будем предполагать, что $\boldsymbol{Y}(t, \mathbf{0}, \boldsymbol{z}, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$ для всех $t \in \mathcal{I}$, $\boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^{n_2}$; функции $\boldsymbol{Y}$, $\boldsymbol{Z}$ предполагаются непрерывными на множестве $D \times \mathbb{U}$, где

$$D = \{(t, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) : \ t \in \mathcal{I}, \ |\boldsymbol{y}| \le H, \ \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^{n_2}\}, \quad (H = \text{const} > 0). \tag{4.5}$$

Кроме того, всюду в дальнейшем будем предполагать, что решения системы (4.4) $\boldsymbol{z}$-продолжимы, т.е. для всякой измеримой функции $\boldsymbol{u}(t) : \mathcal{I} \to \mathbb{U}$ любое решение $\boldsymbol{x}(t)$ системы (4.4) определено при всех $t \in \mathcal{I}$, для которых $|\boldsymbol{y}(t)| \le H$. Под задачей стабилизации системы (4.3) по переменным $\boldsymbol{y}$ будем понимать задачу нахождения обратной связи

$$\boldsymbol{u} : D \to \mathbb{U}, \ \boldsymbol{u}(t, \mathbf{0}, \boldsymbol{z}) = \mathbf{0},$$

которая обеспечивает равномерную асимптотическую устойчивость множества $M = \{\boldsymbol{x} : \ \boldsymbol{y} = \mathbf{0}\}$ для системы

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}(t, \boldsymbol{x})) \tag{4.6}$$

в смысле определения 2.17 (с. 46).

Пусть $V(t,\boldsymbol{x})$ — функция класса $C^1(\mathcal{I}\times\mathbb{R}^n)$. Обозначим через $\dot V(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})$ ее производную в силу системы (4.3), (4.4):

$$\dot V(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}) = \frac{\partial V(t,\boldsymbol{x})}{\partial t} + \big\langle \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{x}} V(t,\boldsymbol{x}), \boldsymbol{f}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})\big\rangle.$$

Введем следующие определения.

Определение 4.1. Функция $V(t,\boldsymbol{x})\in C^1(D)$ называется *управляемой функцией Ляпунова по переменным* $\boldsymbol{y}$ для системы (4.4), если она удовлетворяет следующим условиям:

$$c_1(|\boldsymbol{y}|)\le V(t,\boldsymbol{x})\le c_2(|\boldsymbol{y}|),$$

$$\forall(t,\boldsymbol{x})\in D \;\Rightarrow\; \inf_{\boldsymbol{u}\in\mathbb{U}} \dot V(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}) \le -\alpha(|\boldsymbol{y}|), \tag{4.7}$$

где $c_1, c_2, \alpha\in\mathcal{K}$, $\mathcal{K}$ — класс функций Хана (определение 2.10).

Определение 4.2. Будем говорить, что функция Ляпунова $V(t,\boldsymbol{x})\in C^1(D)$ удовлетворяет *свойству малости управления*, если для любых $\varepsilon>0$, $t_0\ge 0$, $\boldsymbol{x}_0\in M=\{\boldsymbol{x}:\ \boldsymbol{y}=\boldsymbol{0}\}$ найдется такая δ-окрестность $B(t_0,\boldsymbol{x}_0;\delta)$ точки $(t_0,\boldsymbol{x}_0)$, что

$$\forall(t,\boldsymbol{x})\in B(t_0,\boldsymbol{x}_0;\delta)\cap D \;\Rightarrow\; \inf_{|\boldsymbol{u}|<\varepsilon} \dot V(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}) \le -\alpha(|\boldsymbol{y}|), \quad \alpha\in\mathcal{K}. \tag{4.8}$$

Замечание 4.1. Если правая часть системы (4.6) непрерывна в D, ограничена и удовлетворяет условию Липшица по $\boldsymbol{x}$, то справедлива теорема 2.14 (с. 47). Следовательно, если выполнены следующие условия:

1. равномерная асимптотическая устойчивость множества M системы (4.4) обеспечивается обратной связью $\boldsymbol{u}(t,\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})\in C(D)$, удовлетворяющей условию Липшица по $(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z})$ в D;

2. функции $\boldsymbol{Y}(t,\boldsymbol{y},\boldsymbol{z},\boldsymbol{u})$, $\boldsymbol{Z}(t,\boldsymbol{y},\boldsymbol{z},\boldsymbol{u})$ удовлетворяют условию Липшица по $(\boldsymbol{y},\boldsymbol{z},\boldsymbol{u})$ на всяком множестве вида $D\times\mathbb{U}_0$, где $\mathbb{U}_0\subseteq\mathbb{U}$ — компакт,

то для системы (4.4) существует управляемая функция Ляпунова по переменным $\boldsymbol{y}$. Как отмечено в монографии В.В. Румянцева и А.С. Озиранера [56, с.82], теоремы метода функций Ляпунова об асимптотической

$\boldsymbol{y}$-устойчивости особой точки $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$ вообще говоря необратимы без дополнительных предположений относительно области $\boldsymbol{y}$-притяжения. Поэтому необходимые и достаточные условия частичной стабилизируемости могут быть описаны в терминах управляемых функций Ляпунова для задачи стабилизации множества $\{\boldsymbol{x} : \boldsymbol{y} = \mathbf{0}\}$, а не решения $\boldsymbol{x} = \mathbf{0}$.

Предположим, что система (4.4) имеет управляемую функцию Ляпунова $V(t, \boldsymbol{x})$. Тогда, в силу неравенства (4.7) всяким $(t, \boldsymbol{x}) \in D$ может быть поставлено в соответствие управление $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}(t, \boldsymbol{x})$, при котором формально вычисленная производная $\dot{V}(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}(t, \boldsymbol{x}))$ является отрицательно - определенной функцией по переменным $\boldsymbol{y}$. Однако, при такой обратной связи правая часть системы (4.6) является, вообще говоря, разрывной функцией. В этом случае будем определять решение системы (4.6) с разрывной правой частью в смысле А.Ф. Филиппова (определение 2.5, с. 30).

Если $\mathbb{U}$ — компакт, то для всякого ограниченного множества $D_0 \subset D$ функция $\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$ ограничена на $D_0 \times \mathbb{U}$ в силу ее непрерывности. Таким образом, в случае компактности $\mathbb{U}$ правая часть соответствующего дифференциального включения (2.4) удовлетворяет основным условиям (с. 31), обеспечивающим существование (и продолжимость до выхода на границу D или неограниченно) решений задачи Коши с начальными условиями $\boldsymbol{x}(t_0) \in \operatorname{int} D$, $t_0 \geq 0$.

Для нелинейной системы (4.4) имеет место следующая теорема о стабилизации в смысле дифференциальных включений [13].

Теорема 4.1. *Пусть $\mathbb{U}$ — компакт, и пусть для системы (4.4) существует управляемая функция Ляпунова $V(t, \boldsymbol{x})$ по переменным $\boldsymbol{y}$. Тогда существует (вообще говоря, разрывная) обратная связь $\boldsymbol{u}(t, \boldsymbol{y}, \boldsymbol{z}) : D \to \mathbb{U}$, $\boldsymbol{u}(t, \mathbf{0}, \boldsymbol{z}) = \mathbf{0}$, обеспечивающая равномерную асимптотическую устойчивость множества $M = \{\boldsymbol{x} : \boldsymbol{y} = \mathbf{0}\}$. При этом решения системы (4.6) определяются по А.Ф. Филиппову (определение 2.5). Если, кроме того, $D = \mathcal{I} \times \mathbb{R}^n$ и $V(t, \boldsymbol{x}) \to \infty$ при $|\boldsymbol{y}| \to \infty$*

равномерно по $(t, \boldsymbol{z}) \in \mathcal{I} \times \mathbb{R}^{n_2}$, *то указанная обратная связь обеспечивает равномерную асимптотическую устойчивость* M *в целом.*

Доказательство. Для произвольных $(t, \boldsymbol{x}) \in D$ нижняя граница в (4.7) достигается на некотором $\boldsymbol{u} \in \mathbb{U}$ в силу компактности $\mathbb{U}$. Следовательно, существует функция $\boldsymbol{u} : D \to \mathbb{U}$, $\boldsymbol{u}(t, \boldsymbol{0}, \boldsymbol{z}) = \boldsymbol{0}$, удовлетворяющая неравенству:

$$\dot{V}(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}(t, \boldsymbol{x})) \leq -\alpha(|\boldsymbol{y}|), \quad (t, \boldsymbol{x}) \in D, \ \alpha \in \mathcal{K}.$$

Для произвольных фиксированных $(t_0, \boldsymbol{x}_0) \in D$ определим множество $H(t_0, \boldsymbol{x}_0)$ как множество всех предельных значений функции $\boldsymbol{f}(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}(t, \boldsymbol{x}))$ при $(t, \boldsymbol{x}) \to (t_0, \boldsymbol{x}_0)$, дополненное значением $\boldsymbol{f}(t_0, \boldsymbol{x}_0, \boldsymbol{u}(t_0, \boldsymbol{x}_0))$. В силу непрерывности функций $\dot{V}(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u})$, $\alpha(|\boldsymbol{y}|)$ выполнено следующее неравенство:

$$\frac{\partial V(t_0, \boldsymbol{x}_0)}{\partial t} + \left\langle \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{x}} V(t_0, \boldsymbol{x}_0), \boldsymbol{p} \right\rangle \leq -\alpha(|\boldsymbol{y}_0|), \quad \forall \boldsymbol{p} \in H(t_0, \boldsymbol{x}_0).$$

Отсюда с помощью определения выпуклого множества вытекает неравенство:

$$\dot{V}^*(t, \boldsymbol{x}) \equiv \frac{\partial V(t, \boldsymbol{x})}{\partial t} + \sup_{\boldsymbol{p} \in \operatorname{co} H(t, \boldsymbol{x})} \left\langle \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{x}} V(t, \boldsymbol{x}), \boldsymbol{p} \right\rangle \leq -\alpha(|\boldsymbol{y}|), \quad \forall (t, \boldsymbol{x}) \in D. \tag{4.9}$$

Функция $\dot{V}^*(t, \boldsymbol{x})$ является верхней оценкой для $\dot{V}\big(t, \boldsymbol{x}(t), \boldsymbol{u}(t, \boldsymbol{x}(t))\big)$ на решениях соответствующего дифференциального включения (2.4) [34, с. 116]. Доказательство теоремы 2.13 (с. 46), проведенное в монографии [56], остается справедливым и для дифференциальных включений (при использовании оценки $\dot{V}^*(t, \boldsymbol{x})$ вместо $\dot{V}$). Таким образом, на основании неравенства (4.9) и теоремы 2.13 имеет место равномерная асимптотическая устойчивость множества M (в целом, если $V(t, \boldsymbol{x}) \to \infty$ при $|\boldsymbol{y}| \to \infty$ равномерно по $(t, \boldsymbol{z})$). Теорема доказана.

В дальнейшем будем предполагать, что система (4.4) линейна по управлению, т.е. система (4.4) может быть записана в виде

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}_0(t, \boldsymbol{x}) + \sum_{i=1}^{m} u_i \boldsymbol{f}_i(t, \boldsymbol{x}). \tag{4.10}$$

В этом случае производная $\dot{V}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})$ записывается следующим образом:

$$\dot{V}(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}) = a(t,\boldsymbol{x}) + \sum_{i=1}^{m} u_i b_i(t,\boldsymbol{x}),$$

где

$$\begin{aligned} a(t,\boldsymbol{x}) &= \frac{\partial V(t,\boldsymbol{x})}{\partial t} + \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V(t,\boldsymbol{x})}{\partial x_j} f_{0j}(t,\boldsymbol{x}), \\ b_i(t,\boldsymbol{x}) &= \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial V(t,\boldsymbol{x})}{\partial x_j} f_{ij}(t,\boldsymbol{x}), \quad i=\overline{1,m}, \\ \boldsymbol{b}(t,\boldsymbol{x}) &= \big(b_1(t,\boldsymbol{x}), b_2(t,\boldsymbol{x}), ..., b_m(t,\boldsymbol{x})\big). \end{aligned} \tag{4.11}$$

Теорема 4.2. [13] *Пусть для системы (4.10) существует управляемая функция Ляпунова $V(t,\boldsymbol{x})$ по переменным $\boldsymbol{y}$, удовлетворяющая свойству малости управления, и пусть $\mathbb{U} = \mathbb{R}^m$. Тогда существует обратная связь $\boldsymbol{u}(t,\boldsymbol{y},\boldsymbol{z}) \in C(D)$, $\boldsymbol{u}(t,\boldsymbol{0},\boldsymbol{z}) = \boldsymbol{0}$, обеспечивающая равномерную асимптотическую устойчивость множества $M = \{\boldsymbol{x} : \boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}\}$. Указанная обратная связь задается следующим выражением:*

$$u_i(t,\boldsymbol{x}) = \begin{cases} 0 & , \ \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}; \\ -\frac{b_i}{|\boldsymbol{b}|^2}\Big(a + \sqrt{a^2 + |\boldsymbol{b}|^4}\Big) & , \ \boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}, \ 2\sqrt{a^2+|\boldsymbol{b}|^4} \geq \alpha(|\boldsymbol{y}|); \quad i=\overline{1,m}, \\ -\frac{b_i}{2|\boldsymbol{b}|^2}\Big(2a + \alpha(|\boldsymbol{y}|)\Big) & , \ \text{иначе}, \end{cases} \tag{4.12}$$

где функции $a(t,\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{b}(t,\boldsymbol{x})$ определяются из (4.11), $\alpha \in \mathcal{K}$ – любая функция Хана, удовлетворяющая неравенствам (4.7), (4.8). Если, кроме того, $D = \mathcal{I} \times \mathbb{R}^n$ и $V(t,\boldsymbol{x}) \to \infty$ при $|\boldsymbol{y}| \to \infty$ равномерно по $(t,\boldsymbol{z}) \in \mathcal{I} \times \mathbb{R}^{n_2}$, то управление (4.12) обеспечивает равномерную асимптотическую устойчивость множества M в целом.

Доказательство. Вычислим производную $\dot{V}\big(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}(t,\boldsymbol{x})\big)$ в силу системы (4.10), используя обратную связь (4.12):

$$\dot{V}\big(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}(t,\boldsymbol{x})\big) = \begin{cases} a(t,\boldsymbol{x}) & , \ \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0}; \\ -\sqrt{a(t,\boldsymbol{x})^2 + |\boldsymbol{b}(t,\boldsymbol{x})|^4} & , \ \boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0}, \ 2\sqrt{a^2+|\boldsymbol{b}|^4} \geq \alpha(|\boldsymbol{y}|); \\ -\frac{1}{2}\alpha(|\boldsymbol{y}|) & , \ \text{иначе}. \end{cases} \tag{4.13}$$

Поскольку $V(t,\boldsymbol{x})$ является управляемой функцией Ляпунова по переменным $\boldsymbol{y}$, то для всех $(t,\boldsymbol{x})$ из множества

$$S=\{(t,\boldsymbol{x}):\ \boldsymbol{b}(t,\boldsymbol{x})=\boldsymbol{0},\ (t,\boldsymbol{x})\in D\}$$

выполнено неравенство $\dot V(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}(t,\boldsymbol{x}))\le -\alpha(|\boldsymbol{y}|)\le -\frac{1}{2}\alpha(|\boldsymbol{y}|)$; следовательно, из (4.13) вытекает неравенство

$$\dot V(t,\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}(t,\boldsymbol{x}))\le -\frac{1}{2}\alpha(|\boldsymbol{y}|),\quad \forall (t,\boldsymbol{x})\in D. \tag{4.14}$$

Нетрудно видеть, что обратная связь (4.12) непрерывна в каждой точке множества $D\setminus S$. Таким образом, для доказательства непрерывности $\boldsymbol{u}(t,\boldsymbol{x})$ в D достаточно показать, что

$$\forall (t_0,\boldsymbol{x}_0)\in S\ \Rightarrow \lim_{\substack{(t,\boldsymbol{x})\to(t_0,\boldsymbol{x}_0)\\ (t,\boldsymbol{x})\in D\setminus S}} |\boldsymbol{u}(t,\boldsymbol{x})|=0.$$

Рассмотрим два случая.

1. $\boldsymbol{y}_0\ne\boldsymbol{0}$. В силу того, что $V(t,\boldsymbol{x})$ — управляемая функция Ляпунова по $\boldsymbol{y}$, $\boldsymbol{b}(t_0,\boldsymbol{x}_0)=\boldsymbol{0}$, заключаем, что $a(t_0,\boldsymbol{x}_0)\le -\alpha(|\boldsymbol{y}_0|)<0$, и $2\sqrt{a^2+|\boldsymbol{b}|^4}\ge\alpha(|\boldsymbol{y}|)$ в достаточно малой окрестности $(t_0,\boldsymbol{x}_0)$ благодаря непрерывности функций $a(t,\boldsymbol{x})$, $b_i(t,\boldsymbol{x})$, $\alpha(|\boldsymbol{y}|)$. А значит, при $(t,\boldsymbol{x})\notin S$ имеет место представление

$$|\boldsymbol{u}(t,\boldsymbol{x})|=\frac{a(t,\boldsymbol{x})+\sqrt{a(t,\boldsymbol{x})^2+|\boldsymbol{b}(t,\boldsymbol{x})|^4}}{|\boldsymbol{b}(t,\boldsymbol{x})|}=\frac{|\boldsymbol{b}(t,\boldsymbol{x})|^3}{2\,|a(t,\boldsymbol{x})|}+o\Big(\frac{|\boldsymbol{b}(t,\boldsymbol{x})|^3}{|a(t,\boldsymbol{x})|}\Big).$$

   Отсюда следует, что $|\boldsymbol{u}(t,\boldsymbol{x})|\to 0$ при $\boldsymbol{b}(t,\boldsymbol{x})\to\boldsymbol{0}$ (т.е. при $(t,\boldsymbol{x})\to(t_0,\boldsymbol{x}_0)$).

2. $\boldsymbol{y}_0=\boldsymbol{0}$. По свойству малости управления для любого $\varepsilon>0$ существует такое $\delta(\varepsilon)>0$, что для всех $(t,\boldsymbol{x})\in B(t_0,\boldsymbol{x}_0;\delta)\cap D$ найдется $\boldsymbol{u}:\ |\boldsymbol{u}|<\varepsilon$, удовлетворяющее неравенству

$$a(t,\boldsymbol{x})+\sum_{i=1}^m u_i b_i(t,\boldsymbol{x})\le -\frac{1}{2}\alpha(|\boldsymbol{y}|).$$

Отсюда с помощью неравенства Коши - Буняковского получаем:

$$a(t,\boldsymbol{x}) - \varepsilon|\boldsymbol{b}(t,\boldsymbol{x})| < -\frac{1}{2}\alpha(|\boldsymbol{y}|),$$

или

$$\frac{2a(t,\boldsymbol{x}) + \alpha(|\boldsymbol{y}|)}{2\,|\boldsymbol{b}(t,\boldsymbol{x})|} < \varepsilon \ \text{ при } (t,\boldsymbol{x}) \in B(t_0,\boldsymbol{x}_0;\delta) \cap D,\ \boldsymbol{b}(t,\boldsymbol{x}) \neq \boldsymbol{0}. \quad (4.15)$$

Если $2\sqrt{a(t,\boldsymbol{x})^2 + |\boldsymbol{b}(t,\boldsymbol{x})|^4} < \alpha(|\boldsymbol{y}|)$, то использование неравенства (4.15) в (4.12) дает

$$|\boldsymbol{u}(t,\boldsymbol{x})| = \frac{2a(t,\boldsymbol{x}) + \alpha(|\boldsymbol{y}|)}{2\,|\boldsymbol{b}(t,\boldsymbol{x})|} < \varepsilon \ \text{ при } (t,\boldsymbol{x}) \in B(t_0,\boldsymbol{x}_0;\delta) \cap D,\ \boldsymbol{b}(t,\boldsymbol{x}) \neq \boldsymbol{0}.$$

Остается рассмотреть случай, когда $2\sqrt{a(t,\boldsymbol{x})^2 + |\boldsymbol{b}(t,\boldsymbol{x})|^4} \geq \alpha(|\boldsymbol{y}|)$. Путем применения очевидного неравенства $\sqrt{a^2 + |\boldsymbol{b}|^4} \leq |a| + |\boldsymbol{b}|^2$ убеждаемся в том, что $|\boldsymbol{u}(t,\boldsymbol{x})| \leq |\boldsymbol{b}(t,\boldsymbol{x})|$ при $a(t,\boldsymbol{x}) \leq 0$, и

$$|\boldsymbol{u}(t,\boldsymbol{x})| < 2\varepsilon + |\boldsymbol{b}(t,\boldsymbol{x})|$$

при $a(t,\boldsymbol{x}) > 0$. Поскольку функция $\boldsymbol{b}(t,\boldsymbol{x})$ непрерывна и $\boldsymbol{b}(t_0,\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{0}$, то найдется такое $\delta_1(\varepsilon) > 0$, что $|\boldsymbol{b}(t,\boldsymbol{x})| < \varepsilon$ при $(t,\boldsymbol{x}) \in B(t_0,\boldsymbol{x}_0;\delta_1) \cap D$. Таким образом, для всякого $\varepsilon > 0$ при $(t,\boldsymbol{x}) \in B(t_0,\boldsymbol{x}_0;\delta_2) \cap D$ выполняется неравенство $|\boldsymbol{u}(t,\boldsymbol{x})| < 3\varepsilon$, где положительное число $\delta_2(\varepsilon)$ определяется как наименьшее из $\delta(\varepsilon)$, $\delta_1(\varepsilon)$.

Итак доказано, что $\boldsymbol{u}(t,\boldsymbol{x}) \in C(D)$. По теореме 2.13 с учетом неравенства (4.14) заключаем, что обратная связь (4.12) обеспечивает равномерную асимптотическую устойчивость множества $M = \{\boldsymbol{x} : \boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}\}$ (в целом, если $V(t,\boldsymbol{x}) \to \infty$ при $|\boldsymbol{y}| \to \infty$ равномерно по $(t,\boldsymbol{z}) \in \mathcal{I} \times \mathbb{R}^{n_2}$), что и требовалось доказать.

Замечание 4.2. Покажем, что если свойство малости управления для $V(t,\boldsymbol{x})$ (определение 4.2) нарушено, то не существует допустимой обратной связи $\boldsymbol{u}(t,\boldsymbol{x})$, непрерывной во всех точках множества M и обеспечивающей отрицательную определенность $\dot{V}$ по переменным $\boldsymbol{y}$. Действительно, предположим, что такая обратная связь $\boldsymbol{u}(t,\boldsymbol{x})$ существует, т.е.

$\dot{V}\big(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}(t, \boldsymbol{x})\big) \leq -\alpha(|\boldsymbol{y}|)$, $\alpha \in \mathcal{K}$, и пусть $V(t, \boldsymbol{x})$ не обладает свойством малости управления. Тогда существуют $\boldsymbol{x}_0 \in M$, $t_0 \geq 0$, $\varepsilon > 0$ такие, что для любого $\delta > 0$ найдутся $(t, \boldsymbol{x}) \in B(t_0, \boldsymbol{x}_0; \delta)$, удовлетворяющие неравенству:

$$\dot{V}(t, \boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) > -\alpha(|\boldsymbol{y}|), \quad \forall \boldsymbol{u} : |\boldsymbol{u}| \leq \varepsilon. \tag{4.16}$$

Легко видеть, что неравенство (4.16) противоречит непрерывности функции $\boldsymbol{u}(t, \boldsymbol{x})$ в точке $(t_0, \boldsymbol{x}_0)$, поскольку всякая допустимая обратная связь обращается в нуль на множестве $\mathcal{I} \times M$. Итак, свойство малости управления является необходимым для построения непрерывной обратной связи с помощью управляемой функции Ляпунова по части переменных.

Теорема 4.2 распространяет теорему Артстейна [9, 38] на случай стабилизации неавтономных систем по отношению к части переменных.

4.2. Применение функций Ляпунова со знакопостоянной производной для стабилизации по части переменных

Предположим, что правая часть системы (4.10) не зависит явно от времени, т.е. система (4.10) может быть записана в виде:

$$\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) \equiv \boldsymbol{f}_0(\boldsymbol{x}) + \sum_{i=1}^{m} u_i \boldsymbol{f}_i(\boldsymbol{x}), \tag{4.17}$$

где $\boldsymbol{f}_i \in C(\mathcal{D}_H)$ $(i = \overline{0, m})$,

$$\mathcal{D}_H = \{\boldsymbol{x} : \ |\boldsymbol{y}| \leq H, \ \boldsymbol{z} \in \mathbb{R}^{n_2}\}, \quad (H = \text{const} > 0).$$

Следует отметить, что на практике нахождение управляемой функции Ляпунова по переменным $\boldsymbol{y}$ для системы (4.17) может оказаться затруднительным, в то время как функция Ляпунова $V(\boldsymbol{x})$ со знакопостоянной нижней границей производных в силу системы (4.17) может быть в ряде случаев построена исходя из физических соображений (например, если система (4.17) консервативна при $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$). Этот факт обуславливает интерес к конструктивному определению обратной связи с помощью

определенно-положительной по части переменных функции $V(\boldsymbol{x})$, удовлетворяющей условию знакопостоянства производной:

$$\forall \boldsymbol{x} \in \mathcal{D}_H \;\Rightarrow\; \inf_{\boldsymbol{u}\in\mathbb{U}} \big\langle \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{x}} V(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}) \big\rangle \le 0. \tag{4.18}$$

В работах [29, 47] получено управление с обратной связью, решающее задачу стабилизации системы (4.17) по всем фазовым переменным, при условиях локальной управляемости системы в окрестности нуля и существования у системы (4.17) при $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$ функции Ляпунова с отрицательно - постоянной производной. При этом условие локальной управляемости системы в терминах скобок Ли, использованное в [29], гарантирует выполнение условий теоремы Е.А. Барбашина - Н.Н. Красовского на траектории системы с обратной связью.

Настоящий подраздел посвящен решению задачи стабилизации автономной системы (4.17) по отношению к части переменных при условии, если известна функция Ляпунова типа (4.18) [16].

Нетрудно видеть, что функция $V(\boldsymbol{x})$ удовлетворяет свойству (4.18) тогда и только тогда, когда при всех $\boldsymbol{x} \in \mathcal{D}_H$ выполнена импликация:

$$|\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x})| = 0 \;\Rightarrow\; a(\boldsymbol{x}) \le 0,$$

где функции a, $\boldsymbol{b}$ определяются выражениями типа (4.11). Докажем теорему о стабилизации системы (4.17) по переменным $\boldsymbol{y}$.

Теорема 4.3. *Пусть* $\mathbb{U} = \mathbb{R}^m$, *и пусть существует функция* $V(\boldsymbol{x}) \in C^1(\mathcal{D}_H)$, *удовлетворяющая условиям:*

1. $c_1(|\boldsymbol{y}|) \le V(\boldsymbol{x}) \le c_2(|\boldsymbol{y}|)$, $c_1, c_2 \in \mathcal{K}$;

2. *Для всякого* $\boldsymbol{x}$ *из замкнутой области* $\mathcal{D}_H$ *выполнено неравенство на нижнюю границу производных в силу системы (4.17):*

$$\inf_{\boldsymbol{u}\in\mathbb{U}} \big\langle \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{x}} V(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u}) \big\rangle \le 0;$$

3. *Система* $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}_0(\boldsymbol{x})$ *не содержит целых полутраекторий при* $t \ge 0$

на множестве M_0,

$$M_0 = \{\boldsymbol{x} \in \mathcal{D}_H : \inf_{\boldsymbol{u}\in\mathbb{U}} \big\langle \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{x}} V(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})\big\rangle = 0,\ \boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{0}\};$$

4. *Для всяких* $\boldsymbol{x}_0 : \boldsymbol{b}(\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{0}$, $\varepsilon > 0$ *найдется такое* $\delta(\boldsymbol{x}_0, \varepsilon) > 0$, *что*

$$\boldsymbol{x} \in \mathcal{D}_H,\ |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0| < \delta \ \Rightarrow\ \inf_{|\boldsymbol{u}|<\varepsilon} \big\langle \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{x}} V(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x},\boldsymbol{u})\big\rangle \leq 0;$$

5. *Существует такое число* $\Delta_0 > 0$, *для которого каждое решение* $\boldsymbol{x}(t)$ *системы (4.17) с обратной связью*

$$u_i(\boldsymbol{x}) = -b_i \frac{a + \sqrt{a^2 + |\boldsymbol{b}|^4}}{|\boldsymbol{b}|^2} \text{ при } \boldsymbol{b} \neq \boldsymbol{0};\ \ u_i(\boldsymbol{x}) = 0 \text{ при } \boldsymbol{b} = \boldsymbol{0},\ \ i = \overline{1,m}, \tag{4.19}$$

удовлетворяющее начальному условию $|\boldsymbol{y}(0)| < \Delta_0$, *ограничено при всех* $t \geq 0$;

Тогда обратная связь (4.19) непрерывна в $\mathcal{D}_H$ *и обеспечивает асимптотическую устойчивость множества* $M = \{\boldsymbol{x} : \boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}\}$ *(функции* $a(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x})$ *определяются формулами (4.11)).*

Доказательство. Докажем, что обратная связь (4.19) непрерывна в каждой точке $\boldsymbol{x}_0 \in \mathcal{D}_H$, удовлетворяющей условию $\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{0}$, тем самым будет доказана непрерывность (4.19) в $\mathcal{D}_H$. Рассуждения, аналогичные проведенным при доказательстве теоремы 4.2, показывают, что для любого $\varepsilon > 0$ при выполнении условия 4 существует $\delta(\boldsymbol{x}_0, \varepsilon) > 0$ такое, что выполняется неравенство:

$$|\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})| \leq 2\varepsilon + |\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x})| \quad \text{при} \quad |\boldsymbol{x} - \boldsymbol{x}_0| < \delta. \tag{4.20}$$

Из неравенства (4.20) в силу непрерывности $\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x})$ и условия $\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x}_0) = \boldsymbol{0}$ следует непрерывность $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$ в точке $\boldsymbol{x}_0$. Итак, доказано, что $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}) \in C^0(\mathcal{D}_H)$.

Вычислим производную функции $V(\boldsymbol{x})$ в силу системы (4.17) с обратной связью (4.19):

$$\dot{V}(\boldsymbol{x}) = a(\boldsymbol{x}) + \big\langle \boldsymbol{u}(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{b}(\boldsymbol{x})\big\rangle = \begin{cases} a(\boldsymbol{x}) & \text{, при } \boldsymbol{b}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}; \\ -\sqrt{a(\boldsymbol{x})^2 + |\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x})|^4} & \text{, при } \boldsymbol{b}(\boldsymbol{x}) \neq \boldsymbol{0}. \end{cases}$$

Из условия 2 теоремы вытекает, что для всех $\boldsymbol{x} \in \mathcal{D}_H$, удовлетворяющих условию $\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}$, выполнено неравенство $a(\boldsymbol{x}) \leq 0$. Следовательно, $\dot{V}(\boldsymbol{x}) \leq 0$, т.е. множество M равномерно устойчиво на основании теоремы 5.3 из монографии В.В. Румянцева и А.С. Озиранера [56]. Рассмотрим множество

$$E = \{\boldsymbol{x} \in \mathcal{D}_H : \dot{V}(\boldsymbol{x}) = 0\}.$$

Нетрудно показать, что

$$E = \{\boldsymbol{x} \in \mathcal{D}_H : \inf_{\boldsymbol{u} \in \mathbb{U}} \big\langle \boldsymbol{\nabla}_{\boldsymbol{x}} V(\boldsymbol{x}), \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}) \big\rangle = 0\}. \tag{4.21}$$

Пусть $\boldsymbol{x}(t; \boldsymbol{x}_0)$ — решение системы (4.17) с обратной связью (4.19), удовлетворяющее условию $|\boldsymbol{y}_0| < \Delta_0$. По условию 5 теоремы $\boldsymbol{x}(t; \boldsymbol{x}_0)$ ограничено при всех $t \geq 0$, а значит его ω-предельное множество $\Omega(\boldsymbol{x})$ не пусто и ограничено. Согласно принципу инвариантности Ла-Салля (теорема 2.5) $\boldsymbol{x}(t; \boldsymbol{x}_0) \to E_0$ при $t \to +\infty$, где множество E_0 является объединением всех положительных полутраекторий системы, целиком лежащих в E. При $\boldsymbol{x} \in E$ обратная связь (4.19) равна нулю, следовательно, траектории системы (4.17),(4.19) и системы $\dot{\boldsymbol{x}} = \boldsymbol{f}_0(\boldsymbol{x})$, целиком принадлежащие E, совпадают. Из условия 3 теоремы следует, что $E_0 \subseteq \{\boldsymbol{x} : \boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}\}$, а значит $|\boldsymbol{y}(t; \boldsymbol{x}_0)| \to 0$ при $t \to +\infty$, для всякого решения системы (4.17) с обратной связью (4.19), удовлетворяющего условию $|\boldsymbol{y}_0| < \Delta_0$. Теорема доказана.

Замечание 4.3. При доказательстве теоремы 4.3 предполагается только непрерывность правой части системы (4.17), и не предполагается единственность решений системы (4.17) с обратной связью (4.19). Если, кроме того, имеет место единственность решений, то доказательство асимптотической y-устойчивости можно провести с помощью теоремы К. Ризито и В.В. Румянцева (теорема 2.15), распространяющей теорему Е.А. Барбашина - Н.Н. Красовского на случай асимптотической устойчивости по части переменных.

Стабилизирующая обратная связь, полученная в теореме 4.3, равна

нулю на множестве (4.21). В следующей теореме предлагается способ построения управления с обратной связью, которое, вообще говоря, не обнуляется при $\boldsymbol{x} \in E$.

Теорема 4.4. *Пусть* $\mathbb{U} = \mathbb{R}^m$, *и пусть существует функция* $V(\boldsymbol{x}) \in C^1(\mathcal{D}_H)$, *удовлетворяющая следующим условиям:*

1. $c_1(|\boldsymbol{y}|) \leq V(\boldsymbol{x}) \leq c_2(|\boldsymbol{y}|),\ c_1, c_2 \in \mathcal{K}$;

2. *Уравнение*
$$a(\boldsymbol{x}) + \sum_{i=1}^{m} u_i^0(\boldsymbol{x}) b_i(\boldsymbol{x}) = 0$$
имеет непрерывное в $\mathcal{D}_H$ *решение* $\boldsymbol{u}^0(\boldsymbol{x})$, *для которого множество*
$$M_1 = \{\boldsymbol{x} \in \mathcal{D}_H : \boldsymbol{b}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{0}, \boldsymbol{y} \neq \boldsymbol{0}\}$$
не содержит положительных полутраекторий системы (4.17) с управлением $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}^0(\boldsymbol{x})$;

3. *Существует функция* $h \in C(\mathcal{D}_H)$, $h(\boldsymbol{x}) > 0$, *для которой всякое решение системы (4.17) с обратной связью*
$$u_i(\boldsymbol{x}) = u_i^0(\boldsymbol{x}) - h(\boldsymbol{x}) b_i(\boldsymbol{x}), \quad i = \overline{1, m}, \tag{4.22}$$
начинающееся в достаточно малой окрестности положения равновесия $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$, *ограничено по переменным* $\boldsymbol{z}$.

Тогда обратная связь (4.22) обеспечивает асимптотическую $\boldsymbol{y}$ *- устойчивость (в смысле определения 2.16) решения* $\boldsymbol{x} = \boldsymbol{0}$ *системы (4.17). (Функции* $a(\boldsymbol{x})$, $\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x})$ *определяются выражениями (4.11)).*

Доказательство. Вычислим производную функции V в силу системы (4.17) с обратной связью $\boldsymbol{u}(\boldsymbol{x})$, определяемой выражением (4.22):
$$\dot{V} = -h(\boldsymbol{x}) \left|\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x})\right|^2 \leq 0. \tag{4.23}$$

Условие 1 вместе с неравенством (4.23) обеспечивают $\boldsymbol{y}$-устойчивость тривиального решения на основании теоремы В.В. Румянцева [56, с. 28].

Докажем теперь свойство $\boldsymbol{y}$-притяжения. Из $\boldsymbol{y}$-устойчивости и свойства $\boldsymbol{z}$-ограниченности (условие 3) решений следует, что при некотором $\Delta_0 > 0$ всякое решение $\boldsymbol{x}(t;\boldsymbol{x}_0)$ системы (4.17), (4.22), удовлетворяющее начальному условию $|\boldsymbol{x}_0| < \Delta_0$, ограничено по всем переменным. Таким образом, ω-предельное множество $\Omega(\boldsymbol{x})$ решения $\boldsymbol{x}(t;\boldsymbol{x}_0)$ не пусто и ограничено при $|\boldsymbol{x}_0| < \Delta_0$. Отсюда с помощью принципа инвариантности (теорема 2.5) следует, что $\Omega(\boldsymbol{x}) \subset E$, где множество E является объединением всех положительных полутраекторий системы (4.17), (4.22), целиком лежащих во множестве

$$Z_V = \{\boldsymbol{x} \in \mathcal{D}_H : \dot{V}(\boldsymbol{x}) = 0\}.$$

Поскольку функция $h(\boldsymbol{x})$ не равна нулю, то левая часть неравенства (4.23) обращается в нуль на следующем множестве:

$$M_0 = \{\boldsymbol{x} \in \mathcal{D}_H : |\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x})| = 0\}.$$

Легко видеть, что обратная связь (4.22) равна $\boldsymbol{u}^0(\boldsymbol{x})$ на множестве M_0. Поэтому, согласно условию 2 множество M_0 не содержит положительных полутраекторий системы (4.17) с обратной связью (4.22), за исключением траекторий с $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}$. Следовательно, $E \subseteq \{\boldsymbol{x} : \boldsymbol{y} = \boldsymbol{0}\}$, а значит $|\boldsymbol{y}(t;\boldsymbol{x}_0)| \to 0$ при $t \to +\infty$, что и требовалось доказать.

Замечание 4.4. Для применения теорем 4.3 и 4.4 необходимо проверять ограниченность решений по отношению к части переменных. (Показано [56, с. 100], что утверждение теорем типа Е.А. Барбашина - Н.Н. Красовского об асимптотической устойчивости по части переменных, вообще говоря, неверно без предположения об ограниченности решений). Условия ограниченности решений по части переменных описаны в теореме 2.16 (с. 49).

Доказанные теоремы будут использованы в следующем подразделе для построения управлений с обратной связью, решающих задачу о частичной стабилизации ориентации твердого тела.

4.3. Частичная стабилизация ориентации твердого тела с помощью двух управляющих моментов

Основные результаты настоящего подраздела были доложены на II Всеукраинской молодежной конференции “Людина і Космос” [17] (доклад отмечен Дипломом конференции). Результаты по стабилизации с помощью реактивных двигателей докладывались также и на Международных конференциях [15, 16].

4.3.1. Одноосная стабилизация тела с помощью реактивных двигателей ориентации. Рассмотрим модельную задачу о движении спутника как абсолютно твердого тела вокруг центра масс в ограниченной постановке под действием реактивных управляющих моментов без учета изменения массы. Уравнения движения могут быть записаны в форме Эйлера - Пуассона:

$$\dot{\omega}_1 = \frac{A_2 - A_3}{A_1}\omega_2\omega_3 + u_1;\ \dot{\omega}_2 = \frac{A_3 - A_1}{A_2}\omega_1\omega_3 + u_2;\ \dot{\omega}_3 = \frac{A_1 - A_2}{A_3}\omega_1\omega_2, \quad (4.24)$$

$$\dot{\nu}_1 = \omega_3\nu_2 - \omega_2\nu_3 \quad (123), \quad (4.25)$$

где $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ — координаты вектора угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ в главной системе координат (в системе, оси которой направлены по главным осям инерции тела); ν_1, ν_2, ν_3 — координаты неподвижного орта ориентации $\boldsymbol{\nu}$ в главной системе координат; A_1, A_2, A_3 — главные центральные моменты инерции тела; u_1, u_2 — управляющие моменты, реализуемые реактивными двигателями ориентации.

Система (4.24), (4.25) при $u_1 = u_2 = 0$ допускает следующее частное решение:

$$\omega_1 = \omega_2 = \omega_3 = 0,\ \nu_1 = \nu_2 = 0,\ \nu_3 = 1. \quad (4.26)$$

Решение (4.26) соответствует положению равновесия, при котором третья главная ось инерции тела направлена по вектору $\boldsymbol{\nu}$. Заметим, что решение (4.26) не может быть асимптотически стабилизировано по всем

переменным, поскольку у системы (4.24), (4.25) существует геометрический интеграл: $\nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = \mathrm{const}$.

Заметим, что для случая *трехмерного* вектора управления задача стабилизация решения (4.26) по переменным $\boldsymbol{\omega}, \nu_1, \nu_2$ решена в монографии В.И. Зубова [70, с. 409]. Стабилизируемость решения $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{0}$ системы динамических уравнений Эйлера (4.24) (без учета уравнений Пуассона (4.25)) под действием одномерного ("косопоставленного") управляющего момента изучена в [74] для случая динамически несимметричного тела, а также в [75] для тела с двумя одинаковыми главными моментами инерции. В работе [76] исследованы условия стабилизируемости равномерных вращений под действием одномерного вектора управления. Вопросы робастной стабилизации тривиального решения динамических уравнений (4.24) под действием двумерного управляющего момента изучены в статье [77].

Применим результаты предыдущего подраздела для стабилизации решения (4.26) системы (4.24), (4.25) по следующим переменным:

$$(\omega_1, \omega_2, \nu_1, \nu_2). \tag{4.27}$$

Такой выбор переменных соответствует задаче об одноосной стабилизации твердого тела, т.е. проекции ν_1, ν_2 и их производные $\dot{\nu}_1, \dot{\nu}_2$ должны быть "малыми" и стремящимися к нулю при $t \to +\infty$, при этом остальные компоненты решения системы предполагаются ограниченными.

Воспользуемся теоремой 4.4 с функцией $V(\boldsymbol{x})$, определенной следующим образом:

$$V = \frac{1}{2}(A_1\omega_1^2 + A_2\omega_2^2) + \frac{1}{2}(\nu_1^2 + \nu_2^2).$$

Вычислим функции (4.11):

$$a(\boldsymbol{x}) = (A_2 - A_1)\omega_1\omega_2\omega_3 + \nu_3(\omega_1\nu_2 - \omega_2\nu_1),$$

$$b_1(\boldsymbol{x}) = A_1\omega_1,\ b_2(\boldsymbol{x}) = A_2\omega_2. \tag{4.28}$$

Уравнение $a(\boldsymbol{x}) + \langle \boldsymbol{u}^0, \boldsymbol{b}(\boldsymbol{x}) \rangle = 0$ запишем в виде

$$\omega_1\big(A_1 u_1^0 - A_1\omega_2\omega_3 + \nu_2\nu_3\big) + \omega_2\big(A_2 u_2^0 + A_2\omega_1\omega_3 - \nu_1\nu_3\big) = 0.$$

Отсюда получим следующее частное решение:

$$u_1^0(\boldsymbol{x}) = \omega_2\omega_3 - \frac{1}{A_1}\nu_2\nu_3;\ u_2^0(\boldsymbol{x}) = -\omega_1\omega_3 + \frac{1}{A_2}\nu_1\nu_3. \tag{4.29}$$

Для проверки условия 2 теоремы 4.4 необходимо исследовать свойства траекторий системы (4.24), (4.25) с обратной связью (4.29) на множестве $M_0 = \{\boldsymbol{x} :\ |\boldsymbol{b}(\boldsymbol{x})| = 0\}$, т.е. на множестве вида

$$M_0 = \{(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \nu_1, \nu_2, \nu_3)^T :\ \omega_1 = \omega_2 = 0\}.$$

Нетрудно проверить, что для достаточно близких к (4.26) начальных условий все положительные полутраектории исследуемой системы, лежащие в M_0, удовлетворяют также условию $\omega_3 = \mathrm{const}$, $\nu_1 = \nu_2 = 0$, $\nu_3 = \mathrm{const}$, следовательно, множество

$$M_1 = \{(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \nu_1, \nu_2, \nu_3)^T \in M_0 :\ \nu_1^2 + \nu_2^2 \neq 0\}$$

не содержит указанных полутраекторий.

Теперь проверим условие 3 теоремы 4.4. Решения системы (4.24), (4.25) ограничены по переменной ν_3 благодаря наличию геометрического интеграла. Остается проверить ограниченность решений по ω_3, для чего воспользуемся теоремой 2.16 со следующей функцией:

$$W = \frac{1}{2}(A_1\omega_1^2 + A_2\omega_2^2 + A_3\omega_3^2) + \frac{1}{2}(\nu_1^2 + \nu_2^2).$$

Производная от $W(\boldsymbol{x})$ в силу системы (4.24),(4.25) с обратной связью вида (4.22) равна

$$\dot{W}(\boldsymbol{x}) = (A_1 - A_2)\omega_1\omega_2\omega_3 - h(\boldsymbol{x})\,(A_1^2\omega_1^2 + A_2^2\omega_2^2).$$

Согласно теореме 2.16, для ω_3-ограниченности достаточно, чтобы выполнялось неравенство $\dot{W} \leq 0$, т.е. чтобы функция $h(\boldsymbol{x}) > 0$ удовлетворяла следующему условию:

$$h(\boldsymbol{x})\,(A_1^2\omega_1^2 + A_2^2\omega_2^2) \geq (A_1 - A_2)\omega_1\omega_2\omega_3. \tag{4.30}$$

Используя неравенство $2A_1A_2\omega_1\omega_2 \leq A_1^2\omega_1^2 + A_2^2\omega_2^2$ убеждаемся в том, что для выполнения (4.30) достаточно положить

$$h(\boldsymbol{x}) = \Big|\frac{A_1 - A_2}{2A_1A_2}\omega_3\Big| + \varepsilon, \tag{4.31}$$

где ε — произвольное положительное число. Запишем выражение для стабилизирующей обратной связи (4.22), принимая во внимание (4.28), (4.29), (4.31) [15]:

$$u_1 = \omega_2\omega_3 - \frac{1}{A_1}\nu_2\nu_3 - \Big(\frac{|A_1 - A_2|}{2A_2}|\omega_3| + \varepsilon A_1\Big)\omega_1;$$

$$u_2 = -\omega_1\omega_3 + \frac{1}{A_2}\nu_1\nu_3 - \Big(\frac{|A_1 - A_2|}{2A_1}|\omega_3| + \varepsilon A_2\Big)\omega_2, \ (\varepsilon > 0). \tag{4.32}$$

Таким образом, *с помощью теоремы 4.4 получено управление с обратной связью (4.32), решающее задачу стабилизации положения равновесия (4.26) системы (4.24), (4.25) по отношению к переменным (4.27).* Отметим, что поскольку у системы (4.25) имеется геометрический интеграл, и поскольку $\dot{W} \leq 0$, то положение равновесия (4.26) неасимптотически устойчиво по всем фазовым переменным в силу теоремы В.В. Румянцева [56, с. 28].

На рис. 4.1 показано частное решение системы (4.24), (4.25) с обратной связью (4.32), полученное с помощью численного интегрирования методом Рунге - Кутта четвертого порядка (значения параметров $A_2 = \frac{3}{2}A_1$, $A_3 = 2A_1$, $\varepsilon = 1$). Из рис. 4.1 видно, что с возрастанием времени переменные (4.27) стремятся к нулю, при этом координата $\omega_3(t)$ стремится к некоторому предельному значению. Таким образом, предельными движениями тела являются равномерные вращения вокруг неподвижного вектора ориентации $\boldsymbol{\nu}$, который при таких вращениях направлен по третьей главной оси инерции.

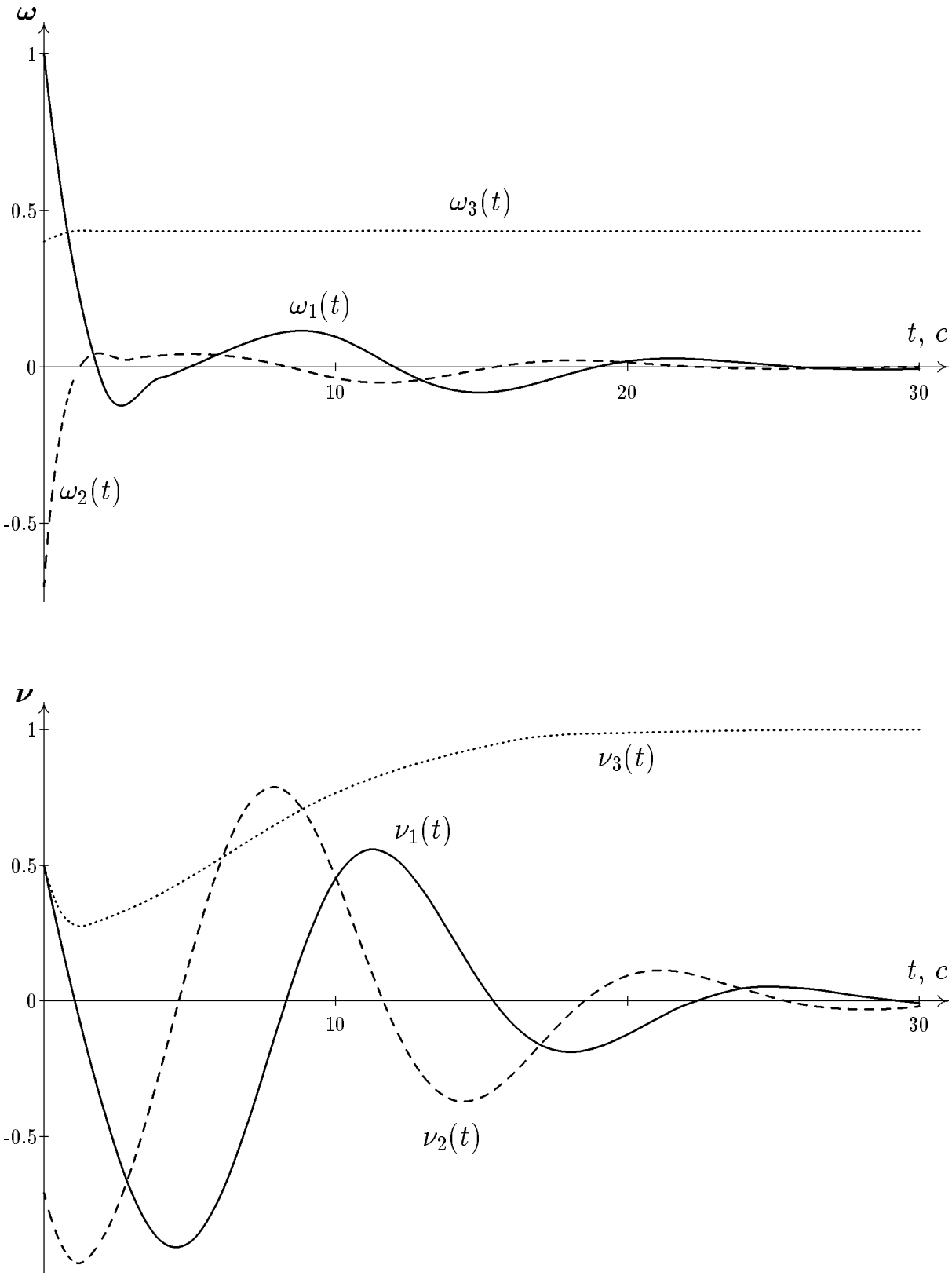

Рис. 4.1. Решение системы (4.24), (4.25) с обратной связью (4.32).

4.3.2. Одноосная стабилизация спутника с помощью двух маховиков. Динамические уравнения движения твердого тела, содержащего пару симметричных маховиков, могут быть записаны в следующем виде [70, с. 436]:

$$(A_1 - I_1)\dot{\omega}_1 = (A_2 - A_3)\omega_2\omega_3 + I_2\Omega_2\omega_3 - u_1;$$

$$(A_2 - I_2)\dot{\omega}_2 = (A_3 - A_1)\omega_1\omega_3 - I_1\Omega_1\omega_3 - u_2;$$

$$A_3\dot{\omega}_3 = (A_1 - A_2)\omega_1\omega_2 + I_1\Omega_1\omega_2 - I_2\Omega_2\omega_1;$$

$$I_1(\dot{\Omega}_1 + \dot{\omega}_1) = u_1;\ \ I_2(\dot{\Omega}_2 + \dot{\omega}_2) = u_2, \tag{4.33}$$

где ω_i — координаты вектора угловой скорости тела-носителя в главной системе координат; Ω_1, Ω_2 — относительные угловые скорости первого и второго маховиков; A_i — главные моменты инерции всей системы, состоящей из тела-носителя и маховиков; I_1, I_2 — осевые моменты инерции маховиков (предполагается, что $A_1 > I_1$, $A_2 > I_2$); u_1, u_2 — управляющие моменты сил, приложенные к первому и второму маховику, соответственно.

Система уравнений (4.33), (4.25) при $u_1 = u_2 = 0$ допускает следующее частное решение:

$$\omega = 0,\ \Omega_1 = \mathrm{const}, \Omega_2 = \mathrm{const}, \nu_1 = \nu_2 = 0,\ \nu_3 = 1. \tag{4.34}$$

Решение (4.34) соответствует положению равновесия тела-носителя, при котором третья главная ось инерции системы направлена по неподвижному орту ориентации $\boldsymbol{\nu}$, а маховики вращаются с постоянными угловыми скоростями. Положение равновесия (4.34) не может быть стабилизировано по всем фазовым переменным, поскольку система (4.33), (4.25) имеет интегралы:

$$\Phi_1 = (A_1\omega_1 + I_1\Omega_1)^2 + (A_2\omega_2 + I_2\Omega_2)^2 + (A_3\omega_3)^2 = \mathrm{const};$$

$$\Phi_2 = (A_1\omega_1 + I_1\Omega_1)\nu_1 + (A_2\omega_2 + I_2\Omega_2)\nu_2 + A_3\omega_3\nu_3 = \mathrm{const};$$

$$\Phi_3 = \nu_1^2 + \nu_2^2 + \nu_3^2 = \text{const}. \tag{4.35}$$

Для стабилизации системы (4.33), (4.25) по переменным (4.27) воспользуемся теоремой 4.4 со следующей функцией:

$$V(\boldsymbol{x}) = \frac{1}{2}\big\{(A_1 - I_1)\omega_1^2 + (A_2 - I_2)\omega_2^2 + \nu_1^2 + \nu_2^2\big\}.$$

Вычисляя функции (4.11), будем иметь

$$a(\boldsymbol{x}) = (A_2 - A_1)\omega_1\omega_2\omega_3 + (I_2\Omega_2\omega_1 - I_1\Omega_1\omega_2)\omega_3 + (\omega_1\nu_2 - \omega_2\nu_1)\nu_3,$$

$$b_1(\boldsymbol{x}) = -\omega_1,\ b_2(\boldsymbol{x}) = -\omega_2.$$

Обратная связь $\boldsymbol{u}^0(\boldsymbol{x})$ из условия 2 теоремы 4.4 является решением следующего уравнения:

$$\big\{(A_2\omega_2 + I_2\Omega_2)\omega_3 + \nu_2\nu_3 - u_1^0\big\}\omega_1 - \big\{(A_1\omega_1 + I_1\Omega_1)\omega_3 + \nu_1\nu_3 + u_2^0\big\}\omega_2 = 0. \tag{4.36}$$

В качестве частного решения уравнения (4.36) выберем функции

$$u_1^0 = \nu_2\nu_3 + (A_2\omega_2 + I_2\Omega_2)\omega_3,\ u_2^0 = -\nu_1\nu_3 - (A_1\omega_1 + I_1\Omega_1)\omega_3. \tag{4.37}$$

Нетрудно показать, что для таких функций множество

$$M_1 = \{(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \Omega_1, \Omega_2, \nu_1, \nu_2, \nu_3)^T :\ \omega_1 = \omega_2 = 0, \nu_1^2 + \nu_2^2 \neq 0\}$$

не содержит целых полутраекторий системы (4.33), (4.25) с обратной связью (4.37) в достаточно малой окрестности (4.34).

Положим $h(\boldsymbol{x}) = \varepsilon$, и покажем, что при любом положительном $\varepsilon = \text{const}$ соответствующая обратная связь

$$u_1 = \nu_2\nu_3 + (A_2\omega_2 + I_2\Omega_2)\omega_3 + \varepsilon\omega_1,$$

$$u_2 = -\nu_1\nu_3 - (A_1\omega_1 + I_1\Omega_1)\omega_3 + \varepsilon\omega_2,\ (\varepsilon > 0) \tag{4.38}$$

удовлетворяет условию 3 теоремы 4.4. Действительно, ограниченность решений по переменным $(\omega_3, \Omega_1, \Omega_2, \nu_3)$ следует из существования у системы (4.33), (4.25) интегралов Φ_1, Φ_3, определяемых выражениями (4.35).

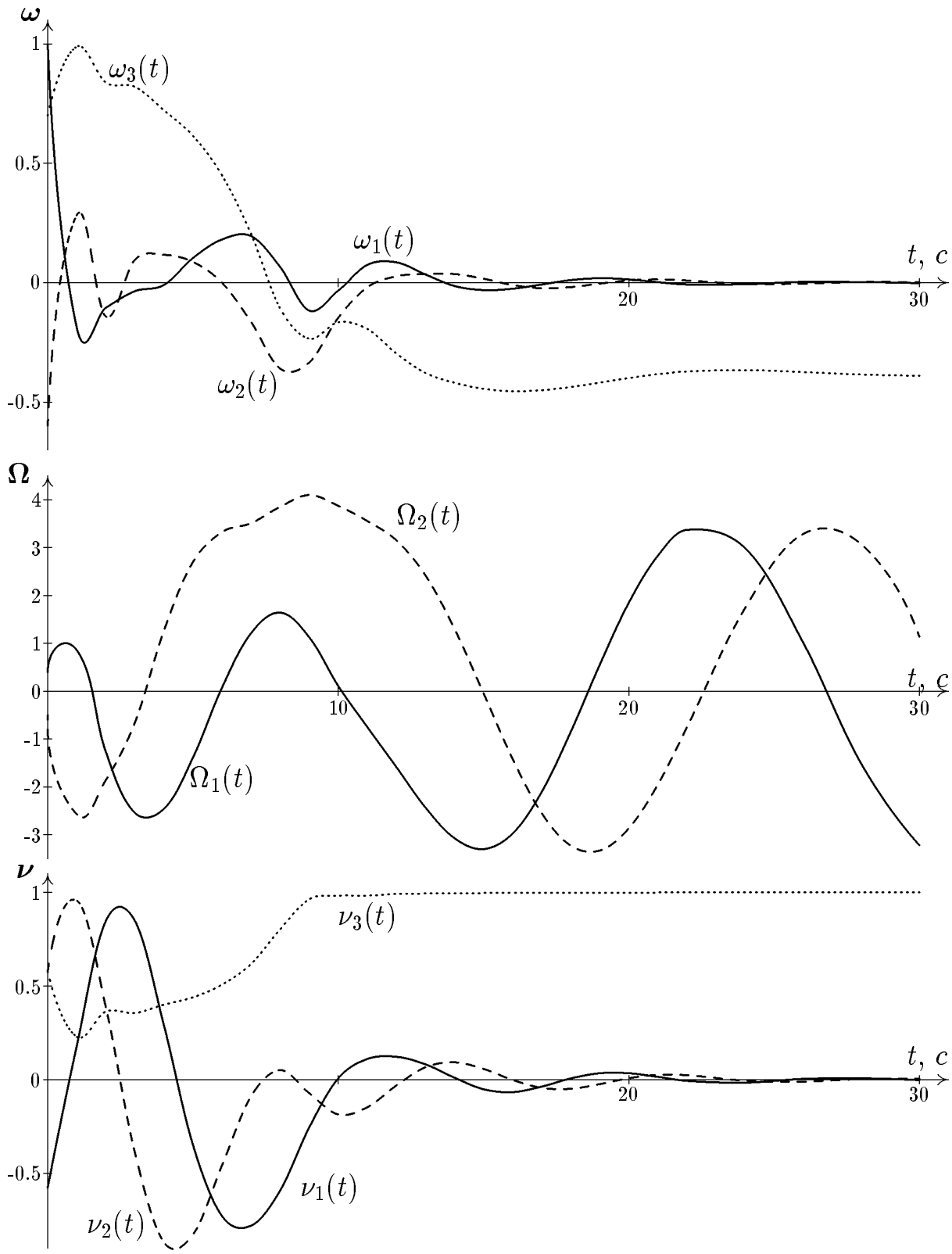

Рис. 4.2. Решение системы (4.33), (4.25) с обратной связью (4.38).

Итак, *с помощью теоремы 4.4 построено управление с обратной связью (4.38), обеспечивающее асимптотическую устойчивость решения (4.34) системы (4.33), (4.25) по отношению к переменным (4.27).*

На рис. 4.2 показаны результаты численного интегрирования системы (4.33), (4.25) при использовании найденной обратной связи (4.38) для значений параметров $A_1 = A_2 = 2I_1$, $A_3 = 3I_1$, $I_2 = I_1$, $\varepsilon = 1$. Легко видеть, что на рис. 4.2 все стабилизируемые переменные (4.27) стремятся к нулю с ростом времени, так что в пределе тело-носитель равномерно вращается вокруг вектора ориентации $\boldsymbol{\nu}$.

4.4. Выводы

В данном разделе с помощью метода функций Ляпунова предложены способы решения задач стабилизации нелинейных систем по отношению к части переменных. Выделим основные результаты раздела.

1. В подразделе 4.1 доказана теорема 4.1 о частичной стабилизируемости нелинейной неавтономной системы при условии существования управляемой функции Ляпунова по части переменных.

2. Для линейной по управлению неавтономной системы предложен конструктивный способ построения стабилизирующей непрерывной обратной связи с помощью управляемой функции Ляпунова по части переменных (теорема 4.2). Этот результат распространяет теорему Артстейна на случай частичной стабилизации.

3. Для линейных по управлению автономных систем доказаны теоремы 4.3 и 4.4, которые позволяют строить управление с обратной связью по известной функции Ляпунова, удовлетворяющей условию знакоотрицательности нижней границы производных.

4. В подразделе 4.3 решены задачи о частичной стабилизации ориен-

тации твердого тела с помощью двух управляющих моментов. Рассмотрены следующие случаи: в первом управляющие моменты реализуются реактивными двигателями ориентации, в во втором — парой маховиков. В каждом из этих случаев стабилизирующее управление построено с помощью теоремы 4.4. Эффективность найденных законов управления проиллюстрирована результатами численного интегрирования уравнений движения.

РАЗДЕЛ V
УСТОЙЧИВОСТЬ РАВНОМЕРНЫХ ВРАЩЕНИЙ МОДЕЛИ ВЕТРОДВИГАТЕЛЯ

Использование ветроэнергетических установок становится все более актуальным в связи с их экологической чистотой и неиспользованием невосполнимых природных ресурсов. Это обстоятельство инициирует проведение широкого круга исследований посредством математического моделирования различных динамических свойств таких конструкций, чтобы найти оптимальные режимы их функционирования и снизить стоимостные характеристики, не уменьшая прочностных. В работе [5] выделены основные факторы, влияющие на снижение стоимости ветродвигателей. К ним относится применение гибких упругих несущих башен с целью снижения веса конструкции и повышения высоты расположения вала ветроколеса, а также использование гибких лопастей с малой жесткостью для уменьшения веса ветроколеса и нагрузок на вал.

Таким образом, при составлении математической модели ветродвигателя необходимо учитывать податливость конструкции. Одним из эффективных методов исследования упругих объектов современной техники является широко распространенный в Донецкой школе механики метод моделирования с помощью систем связанных твердых тел (ССТТ) [82, 83, 87, 88].

В данном разделе исследуется устойчивость равномерных вращений модели узла быстроходного ветродвигателя без хвостовой пластины (флюгера). С целью упрощения задачи при составлении модели не учитываются влияния упругой несущей башни и подвижной гондолы с генератором. Таким образом, моделируемый узел состоит из двух лопастей ветроколеса, соединенных с валом.

Основные результаты настоящего раздела опубликованы в статье [11] и были доложены на Международной Конференции “Устойчивость, управление и динамика твердого тела” [104].

5.1. Вывод уравнений движения

5.1.1. Описание модели. Модель узла ветроэнергетической установки состоит из трех твердых тел: двух лопастей ветроколеса 1,2 и вала 3 (рис. 5.1).

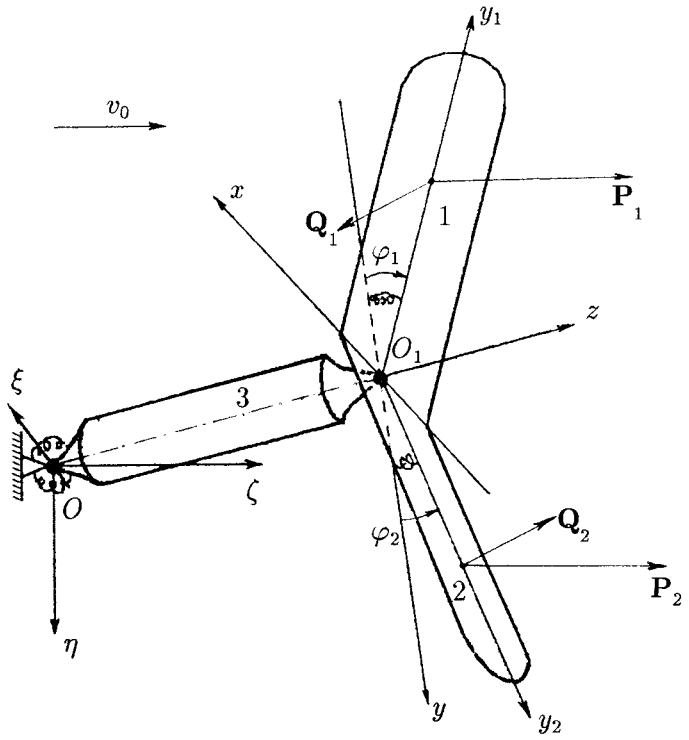

Рис. 5.1

Вал ветродвигателя может совершать трехстепенные вращения около неподвижной точки O, которая является началом отсчета неподвижной декартовой системы координат $O\xi\eta\zeta$. С телом 3 связаны декартовы системы координат O_1xyz и $OXYZ$ с координатными ортами $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$. При отклонении оси OZ от $O\zeta$, в сферическом шарнире в точке O возникает упругий момент $\boldsymbol{M}_\sigma$, направленный на совмещение осей OZ и $O\zeta$. Такой сферический шарнир моделирует упругие свойства вала ветродвигателя.

С лопастями 1 и 2 связаны координатные оси $O_1y_1 \perp O_1x$ и $O_1y_2 \perp O_1x$ соответственно. На оси O_1x находятся цилиндрические шарниры, позволяющие лопастям 1 и 2 совершать независимые вращения вокруг оси

O_1x. Введем обобщенные координаты: φ_1 — угол между отрицательным направлением оси O_1y и осью O_1y_1; φ_2 — угол между осями O_1y и O_1y_2. Предполагается, что лопасти одинаковы (тела 1 и 2 при $\varphi_1 = \varphi_2$ симметричны относительно поворота вокруг оси O_1z на угол π). Будем считать относительную толщину профиля и угол установки лопастей пренебрежимо малыми величинами, т.е. лопасти 1 и 2 полностью лежат в тонком слое плоскостей O_1xy_1 и O_1xy_2 соответственно. В шарнирах на оси O_1x действуют упругие восстанавливающие моменты, зависящие от углов φ_1, φ_2, стремящиеся совместить лопасти с плоскостью O_1xy. Величина этих восстанавливающих моментов определяются упругими свойствами материала лопастей. На каждую из лопастей действуют аэродинамические силы воздушного потока, скорость которого вдали от ветроколеса равна $v_0 = \mathrm{const}$ и направлена по оси $O\zeta$.

С целью упрощения задачи в данной модели не учитывается влияние автоматических регуляторов углов установки лопастей, т.е. исследуется динамика системы с отключенным управлением.

5.1.2. Кинетическая энергия системы. Пусть $\boldsymbol{\omega} = \omega_x\boldsymbol{i}+\omega_y\boldsymbol{j}+\omega_z\boldsymbol{k}$ — абсолютная угловая скорость тела 3. Полагая, что координатные оси системы $OXYZ$ являются главными осями инерции вала, запишем его кинетическую энергию:

$$T_3 = \frac{1}{2}(J_{xx}{\omega_x}^2 + J_{yy}{\omega_y}^2 + J_{zz}{\omega_z}^2), \tag{5.1}$$

где J_{xx}, J_{yy}, J_{zz} — моменты инерции вала относительно соответствующих осей.

По правилу сложения угловых скоростей находим абсолютные угловые скорости лопастей 1 и 2:

$$\boldsymbol{\omega}_1 = \boldsymbol{\omega} - \dot{\varphi}_1\boldsymbol{i},\ \boldsymbol{\omega}_2 = \boldsymbol{\omega} + \dot{\varphi}_2\boldsymbol{i}.$$

Используя теорему Кёнига, запишем выражение для кинетической энергии лопасти 2:

$$T_2 = \frac{1}{2}m|\boldsymbol{v}_{C_2}|^2 + \frac{1}{2}\langle A^c\boldsymbol{\omega}_2, \boldsymbol{\omega}_2\rangle, \tag{5.2}$$

где m — масса лопасти; $\boldsymbol{v}_{C_2}$ — скорость ее центра масс C_2; A^c — центральный тензор инерции лопасти 2. Для вычисления кинетической энергии приведем выражения базисных векторов $\boldsymbol{i}_2, \boldsymbol{j}_2, \boldsymbol{k}_2$ системы координат $O_1xy_2z_2$, связанной с лопастью 2:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{i}_2 &= \boldsymbol{i}; \\ \boldsymbol{j}_2 &= \quad \boldsymbol{j}\cos\varphi_2 + \boldsymbol{k}\sin\varphi_2; \\ \boldsymbol{k}_2 &= \quad -\boldsymbol{j}\sin\varphi_2 + \boldsymbol{k}\cos\varphi_2. \end{aligned} \tag{5.3}$$

Всюду в дальнейшем будем предполагать, что оси системы координат $O_1xy_2z_2$ являются главными осями эллипсоида инерции лопасти 2, и что центр масс этой лопасти (точка C_2) лежит на оси O_1y_2. С помощью (5.3) вычислим кинетическую энергию (5.2):

$$2T_2 = A_1\dot\varphi_2^2 + 2(mld\sin\varphi_2 + A_1)\dot\varphi_2\omega_x + (ml^2 + 2mld\sin\varphi_2 + A_1){\omega_x}^2 +$$

$$+(ml^2 + 2mld\sin\varphi_2 + A_2\cos^2\varphi_2 + A_3\sin^2\varphi_2){\omega_y}^2 -$$

$$-(2mld\cos\varphi_2 + (A_3 - A_2)\sin 2\varphi_2)\omega_y\omega_z + (A_2\sin^2\varphi_2 + A_3\cos^2\varphi_2){\omega_z}^2.$$

Здесь A_1, A_2, A_3 — моменты инерции лопасти 2 относительно осей O_1x, O_1y_2, O_1z_2 соответственно; $l = |\boldsymbol{OO}_1|$ — длина вала; $d = |\boldsymbol{O}_1\boldsymbol{C}_2|$ — расстояние от точки O_1 до центра масс лопасти 2.

Поскольку лопасти 1 и 2 одинаковы, то кинетическая энергия T_1 лопасти 1 получается из T_2 заменой φ_2 на $\pi - \varphi_1$, $\dot\varphi_2$ на $-\dot\varphi_1$.

Запишем полную кинетическую энергию T исследуемой системы связанных твердых тел:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 = \frac{1}{2}A_1\dot\varphi_1^2 + \frac{1}{2}A_1\dot\varphi_2^2 - (A_1 + mld\sin\varphi_1)\dot\varphi_1\omega_x +$$

$$+(A_1 + mld\sin\varphi_2)\dot\varphi_2\omega_x + \Big(\frac{1}{2}J_{xx} + A_1 + ml^2 + mld(\sin\varphi_1 + \sin\varphi_2)\Big){\omega_x}^2 +$$

$$+\frac{1}{2}\Big(J_{yy} + 2ml^2 + A_2(\cos^2\varphi_1 + \cos^2\varphi_2) + A_3(\sin^2\varphi_1 + \sin^2\varphi_2) +$$

$$+2mld(\sin\varphi_1 + \sin\varphi_2)\Big){\omega_y}^2 + \Big(\frac{1}{2}(A_3 - A_2)(\sin 2\varphi_1 - \sin 2\varphi_2) +$$

$$+mld(\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2)\Big)\omega_y\omega_z + \frac{1}{2}\Big(J_{zz} + A_2(\sin^2\varphi_1 + \sin^2\varphi_2) +$$

$$+A_3(\cos^2\varphi_1 + \cos^2\varphi_2)\Big){\omega_z}^2. \qquad (5.4)$$

Отметим, что для моментов инерции вытянутого вала 3 выполняется неравенство $J_{zz} < J_{xx} = J_{yy}$; для "почти плоских" лопастей считаем $A_3 \approx A_1 + A_2$, причем $A_2 \ll A_1$, т.к. хорда профиля лопасти пренебрежимо мала сравнительно с радиусом ветроколеса.

5.1.3. Кинетический момент системы. Известно [79], что кинетический момент $\boldsymbol{L}_3$ тела 3 относительно неподвижной точки O равен градиенту его кинетической энергии (5.1) по переменным $\boldsymbol{\omega}$:

$$\boldsymbol{L}_3 = \frac{\partial T_3}{\partial \omega_x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial T_3}{\partial \omega_y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial T_3}{\partial \omega_z}\boldsymbol{k}. \qquad (5.5)$$

По определению, кинетический момент лопасти 2 относительно неподвижной точки O равен

$$\boldsymbol{L}_2 = \int_{V_2} \boldsymbol{OM} \times \boldsymbol{v}_M\, \rho(M)dV,$$

где интегрирование производится по объему лопасти 2, $\boldsymbol{v}_M$ — скорость точки M рассматриваемой лопасти, $\rho(M)$ — плотность материала лопасти в точке M. С учетом правила сложения скоростей, выражение для $\boldsymbol{L}_2$ можно представить следующим образом:

$$\boldsymbol{L}_2 = \int_{V_2} (\boldsymbol{OO}_1 + \boldsymbol{O}_1\boldsymbol{M}) \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{OO}_1 + \boldsymbol{\omega}_2 \times \boldsymbol{O}_1\boldsymbol{M})\, \rho(M)dV =$$

$$= \boldsymbol{OO}_1 \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{OO}_1) \int_{V_2} \rho dV - (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{OO}_1) \times \int_{V_2} \boldsymbol{O}_1\boldsymbol{M}\, \rho dV +$$

$$+\boldsymbol{OO}_1 \times \Big(\boldsymbol{\omega}_2 \times \int_{V_2} \boldsymbol{O}_1\boldsymbol{M}\, \rho dV\Big) + \int_{V_2} \boldsymbol{O}_1\boldsymbol{M} \times (\boldsymbol{\omega}_2 \times \boldsymbol{O}_1\boldsymbol{M})\, \rho dV.$$

Поскольку

$$\int_{V_2} \boldsymbol{O}_1\boldsymbol{M}\, \rho(M)dV = md\boldsymbol{j}_2,$$

то

$$\boldsymbol{L}_2 = ml^2\boldsymbol{k} \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{k}) + mld\big(\boldsymbol{j}_2 \times (\boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{k}) + \boldsymbol{k} \times (\boldsymbol{\omega}_2 \times \boldsymbol{j}_2)\big) +$$

$$+ \int_{V_2} \boldsymbol{O}_1\boldsymbol{M} \times (\boldsymbol{\omega}_2 \times \boldsymbol{O}_1\boldsymbol{M})\, \rho dV.$$

Отсюда с помощью известных формул для двойного векторного произведения

$$\boldsymbol{a}\times(\boldsymbol{b}\times\boldsymbol{c})=\boldsymbol{b}\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{c}\rangle-\boldsymbol{c}\langle\boldsymbol{a},\boldsymbol{b}\rangle$$

получим:

$$\boldsymbol{L}_2=ml^2(\boldsymbol{\omega}-\omega_z\boldsymbol{k})+mld\Big(\langle\boldsymbol{j}_2,\boldsymbol{k}\rangle(2\boldsymbol{\omega}+\dot\varphi_2\boldsymbol{i})-\langle\boldsymbol{j}_2,\boldsymbol{\omega}\rangle\boldsymbol{k}-\omega_z\boldsymbol{j}_2\Big)+$$

$$+(\boldsymbol{\omega}+\dot\varphi_2\boldsymbol{i})\int_{V_2}|\boldsymbol{O}_1\boldsymbol{M}|^2\rho dV-\int_{V_2}\Big(\langle\boldsymbol{O}_1\boldsymbol{M},\boldsymbol{\omega}+\dot\varphi_2\boldsymbol{i}\rangle\boldsymbol{O}_1\boldsymbol{M}\Big)\rho dV.$$

Вычисляя скалярные произведения, будем иметь

$$\boldsymbol{L}_2=\Big((ml^2+2mld\sin\varphi_2+A^*)\omega_x+(mld\sin\varphi_2+A^*)\dot\varphi_2\Big)\boldsymbol{i}+$$

$$+\Big((ml^2+2mld\sin\varphi_2+A^*)\omega_y-mld\cos(\varphi_2)\,\omega_z\Big)\boldsymbol{j}+$$

$$+\Big(A^*\omega_z-mld\cos(\varphi_2)\,\omega_y\Big)\boldsymbol{k}-\boldsymbol{L}_{21},$$

где

$$A^*=\int_{V_2}|\boldsymbol{O}_1\boldsymbol{M}|^2\rho dV=\frac{1}{2}(A_1+A_2+A_3),$$

$$\boldsymbol{L}_{21}=\int_{V_2}\Big(\langle\boldsymbol{O}_1\boldsymbol{M},\boldsymbol{\omega}+\dot\varphi_2\boldsymbol{i}\rangle\boldsymbol{O}_1\boldsymbol{M}\Big)\rho dV=\frac{1}{2}(A_2+A_3-A_1)(\omega_x+\dot\varphi_2)\boldsymbol{i}_2+$$

$$+(A_1+A_3-A_2)(\omega_y\cos\varphi_2+\omega_z\sin\varphi_2)\boldsymbol{j}_2+(A_1+A_2-A_3)(\omega_z\cos\varphi_2-\omega_y\sin\varphi_2)\boldsymbol{k}_2.$$

Используя разложения базисных векторов (5.3), в результате несложных преобразований получим выражение для кинетического момента $\boldsymbol{L}_2$ в базисе $\boldsymbol{i},\boldsymbol{j},\boldsymbol{k}$:

$$\boldsymbol{L}_2=\Big((ml^2+2mld\sin\varphi_2+A_1)\omega_x+(mld\sin\varphi_2+A_1)\dot\varphi_2\Big)\boldsymbol{i}+$$

$$+\Big((ml^2+2mld\sin\varphi_2+A_2\cos^2\varphi_2+A_3\sin^2\varphi_2)\omega_y-$$

$$-(mld\cos\varphi_2+\frac{1}{2}(A_3-A_2)\sin2\varphi_2)\omega_z\Big)\boldsymbol{j}+$$

$$+\Big((A_2\sin^2\varphi_2+A_3\cos^2\varphi_2)\omega_z-(mld\cos\varphi_2+\frac{1}{2}(A_3-A_2)\sin2\varphi_2)\omega_y\Big)\boldsymbol{k}.\quad(5.6)$$

В силу симметрии кинетический момент $\boldsymbol{L}_1$ лопасти 1 получается из выражения (5.6) заменой φ_2 на $\pi-\varphi_1$, $\dot\varphi_2$ на $-\dot\varphi_1$.

Замечание 5.1. Легко видеть, что в базисе $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ вычисленный кинетический момент $\boldsymbol{L}_2$ равен градиенту кинетической энергии T_2 по переменным $\omega_x, \omega_y, \omega_z$. Учитывая формулу (5.5) для кинетического момента тела 3, приходим к выводу, что для кинетического момента $\boldsymbol{L} = \boldsymbol{L}_1 + \boldsymbol{L}_2 + \boldsymbol{L}_3$ *всей системы* относительно неподвижной точки O справедливо соотношение:

$$\boldsymbol{L} = \frac{\partial T}{\partial \omega_x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial T}{\partial \omega_y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial T}{\partial \omega_z}\boldsymbol{k}, \tag{5.7}$$

где T — кинетическая энергия системы, определяемая выражением (5.4).

5.1.4. Силы, действующие на модель. Упругий момент $\boldsymbol{M}_\sigma$ относительно точки O зададим следующим образом:

$$\boldsymbol{M}_\sigma = \sigma \boldsymbol{k} \times \boldsymbol{\gamma}, \tag{5.8}$$

где неотрицательная величина σ характеризует жесткость сферического шарнира в точке O, $\boldsymbol{\gamma}$ — орт оси $O\zeta$. Обобщенные силы, реализующие упругие восстанавливающие моменты в шарнирах на оси O_1x, определим потенциалом

$$\Pi_\kappa = -\kappa(\cos\varphi_1 + \cos\varphi_2), \tag{5.9}$$

где $\kappa > 0$ — жесткость цилиндрических шарниров.

Приведем систему аэродинамических сил к центрам давления лопастей. Будем предполагать, что центры давления лопастей 1 и 2 лежат на осях O_1y_1 и O_1y_2 соответственно, на расстояниях r от точки O_1. Каждый из главных векторов $\boldsymbol{R}_i$ аэродинамических сил, приложенных к i-й лопасти, разложим на две составляющие: $\boldsymbol{P}_i$ — коллинеарную $\boldsymbol{\gamma}$, и $\boldsymbol{Q}_i$ — перпендикулярную $\boldsymbol{\gamma}$. Абсолютные значения составляющих $\boldsymbol{P}_i, \boldsymbol{Q}_i$, а также расстояние r определяются по заданным характеристикам изучаемого режима работы ветродвигателя: скорости ветра v_0 и угловой скорости ветроколеса $\boldsymbol{\omega} = \omega_0\boldsymbol{\gamma}$ [91].

Будем предполагать, что значения r и $\boldsymbol{P}_i$ не меняются в первом приближении при малых колебаниях лопастей и малых отклонениях вектора

угловой скорости $\boldsymbol{\omega}$ от вектора $\omega_0\boldsymbol{k}$, где ω_0 — угловая скорость изучаемого режима равномерных вращений. При таком предположении потенциал сил $\boldsymbol{P}_i$ запишется следующим образом:

$$\Pi_p = -P\langle \boldsymbol{OO}_1 + r\boldsymbol{j}_1, \boldsymbol{\gamma}\rangle - P\langle \boldsymbol{OO}_1 + r\boldsymbol{j}_2, \boldsymbol{\gamma}\rangle =$$

$$= \gamma_y Pr(\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2) - \gamma_z(2lP + Pr(\sin\varphi_1 + \sin\varphi_2)), \qquad (5.10)$$

где $\gamma_x, \gamma_y, \gamma_z$ — проекции вектора $\boldsymbol{\gamma}$ на соответствующие оси системы координат O_1xyz, $\boldsymbol{j}_1, \boldsymbol{j}_2$ — орты осей O_1y_1, O_1y_2 соответственно, положительный параметр P характеризует силовой напор на лопасть; величина $2P$ в теории ветроколеса называется лобовым давлением [91].

Момент сил лобового давления $\boldsymbol{P}_i$ и сил $\boldsymbol{Q}_i$ относительно неподвижной точки O определим следующим образом:

$$\boldsymbol{M}_a = P(2\mathbf{O}\boldsymbol{O}_1 + r(\boldsymbol{j}_1 + \boldsymbol{j}_2)) \times \boldsymbol{\gamma} + \nu Pr\boldsymbol{k} -$$

$$-\tau(\omega_x\boldsymbol{i} + \omega_y\boldsymbol{j}) - \tau_1(\omega_z - \omega_0)\boldsymbol{k} + ..., \qquad (5.11)$$

где ω_0 — угловая скорость изучаемых равномерных вращений, многоточием обозначены члены выше первого порядка малости относительно возмущений обобщенных скоростей. Коэффициент $\nu > 0$ характеризует аэродинамическое качество профиля лопастей, коэффициенты $\tau \geq 0$, $\tau_1 \geq 0$ характеризуют демпфирующие свойства среды.

К валу в точке O приложен постоянный момент нагрузки $\boldsymbol{M}_n$, противодействующий вращающему моменту $\boldsymbol{M}_a$:

$$\boldsymbol{M}_n = -M_n\boldsymbol{\gamma}. \qquad (5.12)$$

5.1.5. Уравнения движения. Система уравнений движения рассматриваемой модели состоит из двух уравнений Лагранжа второго рода для обобщенных координат φ_1, φ_2, векторного уравнения изменения момента количества движения и векторного уравнения Пуассона:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}_1} - \frac{\partial T}{\partial\varphi_1} = -\frac{\partial\Pi}{\partial\varphi_1}; \quad \frac{d}{dt}\frac{\partial T}{\partial\dot{\varphi}_2} - \frac{\partial T}{\partial\varphi_2} = -\frac{\partial\Pi}{\partial\varphi_2}; \qquad (5.13)$$

$$\dot{\boldsymbol{L}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{L} = \boldsymbol{M};$$

$$\dot{\boldsymbol{\gamma}} + \boldsymbol{\omega} \times \boldsymbol{\gamma} = \boldsymbol{0}, \tag{5.14}$$

где $\dot{\boldsymbol{L}}$, $\dot{\boldsymbol{\gamma}}$ — локальные производные, которые вычисляются в подвижной системе координат, связанной с телом 3; кинетический момент $\boldsymbol{L}$ находится исходя из (5.7). В правой части уравнений (5.13) потенциал $\Pi = \Pi_p + \Pi_\kappa$ определяется с помощью выражений (5.9), (5.10). Момент сил $\boldsymbol{M}$ равен сумме моментов (5.8), (5.11), (5.12): $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{M}_\sigma + \boldsymbol{M}_n + \boldsymbol{M}_a$.

В скалярном виде система (5.13)-(5.14) запишется следующим образом:

$$\begin{aligned}
A_1\ddot{\varphi}_1 &= (mld\sin\varphi_1 + A_1)\,\dot{\omega}_x + mld\cos\varphi_1\,{\omega_x}^2 + \big(mld\cos\varphi_1 - \\
&\quad -\tfrac{1}{2}(A_2 - A_3)\sin 2\varphi_1\big){\omega_y}^2 - (mld\sin\varphi_1 + (A_2 - A_3)\cos 2\varphi_1)\,\omega_y\omega_z + \\
&\quad +\tfrac{1}{2}(A_2 - A_3)\sin 2\varphi_1\,{\omega_z}^2 - \kappa\sin\varphi_1 + Pr(\gamma_y\sin\varphi_1 + \gamma_z\cos\varphi_1); \\
A_1\ddot{\varphi}_2 &= -(mld\sin\varphi_2 + A_1)\,\dot{\omega}_x + mld\cos\varphi_2\,{\omega_x}^2 + \big(mld\cos\varphi_2 - \\
&\quad -\tfrac{1}{2}(A_2 - A_3)\sin 2\varphi_2\big){\omega_y}^2 + (mld\sin\varphi_2 + (A_2 - A_3)\cos 2\varphi_2)\,\omega_y\omega_z + \\
&\quad +\tfrac{1}{2}(A_2 - A_3)\sin 2\varphi_2\,{\omega_z}^2 - \kappa\sin\varphi_2 - Pr(\gamma_y\sin\varphi_2 - \gamma_z\cos\varphi_2);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&-\big(mld\sin\varphi_1 + A_1\big)\ddot{\varphi}_1 + \big(mld\sin\varphi_2 + A_1\big)\ddot{\varphi}_2 - mld\cos\varphi_1\,{\dot{\varphi}_1}^2 + \\
&+mld\cos\varphi_2\,{\dot{\varphi}_2}^2 + 2mld\cos\varphi_1\,\dot{\varphi}_1\omega_x + 2mld\cos\varphi_2\,\dot{\varphi}_2\omega_x + \\
&+\big(2ml^2 + J_{xx} + 2A_1 + 2mld(\sin\varphi_1 + \sin\varphi_2)\big)\dot{\omega}_x + \\
&+\big(mld(\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2) - \tfrac{1}{2}(A_2 - A_3)(\sin 2\varphi_1 - \sin 2\varphi_2)\big) \times ({\omega_y}^2 - {\omega_z}^2) - \\
&-\big(2ml^2 + J_{yy} - J_{zz} + 2mld(\sin\varphi_1 + \sin\varphi_2) + (A_2 - A_3)(\cos 2\varphi_1 + \cos 2\varphi_2)\big) \times \\
&\times\omega_y\omega_z = -\tau\omega_x - \gamma_y\big(\sigma + 2lP + Pr(\sin\varphi_1 + \sin\varphi_2)\big) - \gamma_z Pr(\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2);
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\big(2mld\cos\varphi_1 - (A_2 - A_3)\sin 2\varphi_1\big)\dot{\varphi}_1\omega_y - \\
&-\big(2mld\sin\varphi_1 + A_1 + (A_2 - A_3)\cos 2\varphi_1\big)\dot{\varphi}_1\omega_z + \\
&+\big(2mld\cos\varphi_2 - (A_2 - A_3)\sin 2\varphi_2\big)\dot{\varphi}_2\omega_y + \\
&+\big(2mld\sin\varphi_2 + A_1 + (A_2 - A_3)\cos 2\varphi_2\big)\dot{\varphi}_2\omega_z + \\
&+\big(2ml^2 + J_{yy} + 2mld(\sin\varphi_1 + \sin\varphi_2) + A_2(\cos^2\varphi_1 + \cos^2\varphi_2) + \\
&+A_3(\sin^2\varphi_1 + \sin^2\varphi_2)\big)\dot{\omega}_y +
\end{aligned}$$

$$+\big(mld(\cos\varphi_1-\cos\varphi_2)-\tfrac{1}{2}(A_2-A_3)(\sin 2\varphi_1-\sin 2\varphi_2)\big)\times(\dot\omega_z-\omega_x\omega_y)+$$
$$+\big(2ml^2+J_{xx}-J_{zz}+2A_1+2mld(\sin\varphi_1+\sin\varphi_2)-A_3(\cos^2\varphi_1+\cos^2\varphi_2)-$$
$$-A_2(\sin^2\varphi_1+\sin^2\varphi_2)\big)\omega_x\omega_z=-\tau\omega_y+\gamma_x\big(\sigma+2lP+Pr(\sin\varphi_1+\sin\varphi_2)\big);$$

$$\big(A_1-(A_2-A_3)\cos 2\varphi_1\big)\dot\varphi_1\omega_y+(A_2-A_3)\sin 2\varphi_1\,\dot\varphi_1\omega_z-$$
$$-\big(A_1-(A_2-A_3)\cos 2\varphi_2\big)\dot\varphi_2\omega_y+(A_2-A_3)\sin 2\varphi_2\,\dot\varphi_2\omega_z+$$
$$+\big(mld(\cos\varphi_1-\cos\varphi_2)-\tfrac{1}{2}(A_2-A_3)(\sin 2\varphi_1-\sin 2\varphi_2)\big)\times(\dot\omega_y+\omega_x\omega_z)+$$
$$+\big(J_{yy}-J_{xx}-2A_1+A_2(\cos^2\varphi_1+\cos^2\varphi_2)+A_3(\sin^2\varphi_1+\sin^2\varphi_2)\big)\omega_x\omega_y+$$
$$+\big(J_{zz}+A_2(\sin^2\varphi_1+\sin^2\varphi_2)+A_3(\cos^2\varphi_1+\cos^2\varphi_2)\big)\dot\omega_z=$$
$$=\nu Pr-M_n-\tau_1(\omega_z-\omega_0)+\gamma_x Pr(\cos\varphi_1-\cos\varphi_2);$$

$$\begin{aligned}\dot\gamma_x &= \gamma_y\omega_z-\gamma_z\omega_y;\\ \dot\gamma_y &= \gamma_z\omega_x-\gamma_x\omega_z;\\ \dot\gamma_z &= \gamma_x\omega_y-\gamma_y\omega_x.\end{aligned}\tag{5.15}$$

Итак, мы получили систему восьми нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений с восемью неизвестными функциями: φ_1, φ_2, ω_x, ω_y, ω_z, γ_x, γ_y, γ_z.

5.2. Линеаризация и характеристическое уравнение

Выясним условия существования у системы (5.15) стационарных решений, соответствующих равномерным вращениям ветродвигателя. Такие решения имеют следующий вид:

$$\varphi_1=\varphi_2=\varphi_0,\quad \omega_x=\omega_y=0,\ \omega_z=\omega_0\neq 0,\quad \gamma_x=\gamma_y=0,\ \gamma_z=1.\tag{5.16}$$

Подставляя (5.16) в (5.15), убеждаемся в том, что для существования решения (5.16) необходимо и достаточно выполнение условий:

$$\kappa\sin\varphi_0=Pr\cos\varphi_0-\frac{1}{2}(A_3-A_2)\sin(2\varphi_0)\omega_0^2;\tag{5.17}$$

$$M_n = \nu Pr.$$

Поскольку $A_3 - A_2 > 0$, то из выражения (5.17) следует, что $\varphi_0 > 0$, $\kappa \sin\varphi_0 - Pr\cos\varphi_0 \le 0$, а значит

$$0 < \operatorname{tg}\varphi_0 \le \frac{Pr}{\kappa}. \tag{5.18}$$

Совершая замену $\varphi_1 = \varphi_0 + \tilde\varphi_1$, $\varphi_2 = \varphi_0 + \tilde\varphi_2$, $\omega_z = \omega_0 + \tilde\omega_z$, $\gamma_z = 1 + \tilde\gamma_z$ и считая величины $\tilde\varphi_1, \tilde\varphi_2, \omega_x, \omega_y, \tilde\omega_z, \gamma_x, \gamma_y, \tilde\gamma_z$ малыми вместе с их производными, оставим в уравнениях (5.15) члены до первого порядка малости включительно. В результате получим линеаризованную систему, которая при обозначениях $u = \tilde\varphi_1 + \tilde\varphi_2$, $v = \tilde\varphi_2 - \tilde\varphi_1$ имеет следующий вид:

$$\begin{gathered}
A_1\ddot u = 2\omega_0(A_2 - A_3)\sin 2\varphi_0\,\tilde\omega_z + \\
+\Big({\omega_0}^2(A_2 - A_3)\cos 2\varphi_0 - \kappa\cos\varphi_0 - Pr\sin\varphi_0\Big)u + 2Pr\cos\varphi_0\,\tilde\gamma_z; \\
A_1\ddot v = -2(A_1 + mld\sin\varphi_0)\dot\omega_x + 2\omega_0\Big((A_2 - A_3)\cos 2\varphi_0 + mld\sin\varphi_0\Big)\omega_y + \\
+\Big({\omega_0}^2(A_2 - A_3)\cos 2\varphi_0 - \kappa\cos\varphi_0 - Pr\sin\varphi_0\Big)v - 2Pr\sin\varphi_0\,\gamma_y; \\
(A_1 + mld\sin\varphi_0)\ddot v - \Big({\omega_0}^2((A_2 - A_3)\cos 2\varphi_0 + mld\sin\varphi_0) - Pr\sin\varphi_0\Big)v + \\
+(J_{xx} + 2A_1 + 2ml^2 + 4mld\sin\varphi_0)\dot\omega_x + \omega_0\Big(J_{zz} - J_{yy} - 2ml^2 + \\
+2(A_3 - A_2)\cos 2\varphi_0 - 4mld\sin\varphi_0\Big)\omega_y = -(\sigma + 2lP + 2Pr\sin\varphi_0)\gamma_y - \tau\omega_x; \\
\omega_0\Big(A_1 + (A_2 - A_3)\cos 2\varphi_0 + 2mld\sin\varphi_0\Big)\dot v + 2\Big(\frac{1}{2}J_{yy} + ml^2 + A_2\cos^2\varphi_0 + \\
+A_3\sin^2\varphi_0 + 2mld\sin\varphi_0\Big)\dot\omega_y + 2\omega_0\Big(\frac{1}{2}(J_{xx} - J_{zz}) + ml^2 + A_1 - A_2\sin^2\varphi_0 - \\
-A_3\cos^2\varphi_0 + 2mld\sin\varphi_0\Big)\omega_x = (\sigma + 2lP + 2Pr\sin\varphi_0)\gamma_x - \tau\omega_y; \\
\omega_0(A_2 - A_3)\sin(2\varphi_0)\dot u + 2\Big(\frac{1}{2}J_{zz} + A_2\sin^2\varphi_0 + A_3\cos^2\varphi_0\Big)\dot{\tilde\omega}_z = -\tau_1\tilde\omega_z; \\
\dot\gamma_x = \omega_0\gamma_y - \omega_y; \quad \dot\gamma_y = \omega_x - \omega_0\gamma_x; \quad \dot{\tilde\gamma}_z = 0.
\end{gathered} \tag{5.19}$$

Разыскивая нетривиальные решения вида $ce^{\lambda t}$ линейной однородной системы (5.19), получим следующее характеристическое уравнение:

$$Q(\lambda) = \lambda P_6(\lambda)(b_0\lambda^3 + b_1\lambda^2 + b_2\lambda + b_3) = 0, \tag{5.20}$$

где

$$P_6(\lambda) = c_0\lambda^6 + c_1\lambda^5 + ... + c_6, \tag{5.21}$$

$$b_0 = A_1(J_{zz} + 2A_2 + 2A_1\cos^2\varphi_0) > 0, \qquad b_1 = A_1\tau_1 \geq 0,$$

$$b_2 = \frac{2}{\sin 2\varphi_0}\Big\{(Pr\cos\varphi_0 - \kappa\sin\varphi_0)(J_{zz} + 2A_1 + 2A_2 + 6A_1\sin^2\varphi_0)\cos^2\varphi_0 +$$

$$+\kappa\sin\varphi_0(J_{zz} + 2A_2 + 2A_1\cos^2\varphi_0)\Big\} > 0,$$

$$b_3 = \frac{2\tau_1}{\sin 2\varphi_0}(\kappa\sin^3\varphi_0 + Pr\cos^3\varphi_0) \geq 0,$$

$$c_0 = 4\Big(\frac{1}{2}J_{yy} + ml^2 + A_2\cos^2\varphi_0 + A_3\sin^2\varphi_0 + 2mld\sin\varphi_0\Big)*$$

$$*\Big(\frac{1}{2}A_1J_{xx} + ml^2(A_1 - md^2\sin^2\varphi_0)\Big) > 0.$$

Выражения для остальных коэффициентов многочлена $P_6(\lambda)$ приведены в приложении А.

5.3. Анализ условий устойчивости

5.3.1. Необходимые условия устойчивости консервативной модели. Положим параметры τ, τ_1, характеризующие демпфирующие свойства среды, равными нулю. В этом случае коэффициенты при нечетных степенях λ в уравнении (5.20) обнуляются. Если характеристическое уравнение (5.20) имеет корень λ, то оно, очевидно, имеет также и корень $-\lambda$. Поэтому в случае $Re(\lambda) \neq 0$ среди корней характеристического уравнения обязательно имеется корень с положительной вещественной частью, а значит решение (5.16) неустойчиво на основании теоремы 2.6 (с. 35). Таким образом, и для устойчивости решения (5.16) системы (5.15)

необходимо, чтобы все корни λ были чисто мнимыми. Обозначая $-\lambda^2 = x$, получим следующее уравнение относительно x, все корни которого должны быть вещественными и неотрицательными:

$$P(x) = x(b_0x - b_2)(c_0x^3 - c_2x^2 + c_4x - c_6) = 0. \tag{5.22}$$

Корень линейного уравнения $b_0x - b_2 = 0$ всегда положителен, поскольку $b_0 > 0$, $b_2 > 0$. Таким образом, для неотрицательности корней уравнения (5.22) необходимо и достаточно, чтобы все корни кубичного уравнения $c_0x^3 - c_2x^2 + c_4x - c_6 = 0$ были неотрицательными, что имеет место при выполнении условий теоремы Декарта [105, с. 238, 258]:

$$c_0 > 0, \quad c_2 > 0, \quad c_4 > 0, \quad c_6 > 0,$$

$$D = -4c_4^3c_0 - 4c_6c_2^3 + c_4^2c_2^2 + 18c_6c_4c_2c_0 - 27c_6^2c_0^2 > 0. \tag{5.23}$$

Введем следующие безразмерные параметры:

$$l/d = \beta, \quad Pr/\kappa = \alpha, \quad \sigma/\kappa = \delta, \quad A_1/(J_{xx} + 2ml^2) = a_1,$$

$$A_2/(J_{xx} + 2ml^2) = a_2, \quad md^2/(J_{xx} + 2ml^2) = f, \quad J_{zz}/(J_{xx} + 2ml^2) = h.$$

Исследуем условия (5.23) при малых углах φ_0 и больших жесткостях κ. Положим $\alpha = (\tilde{x} + 1)\varphi_0$ и разложим условия (5.23) по степеням малых параметров φ_0, δ. Пренебрегая высшими степенями разложений условий (5.23), получим следующие условия на параметры системы:

$$\Big((h-1)^2 + 2a_2(h+1) + 2\Big)\tilde{x} + 4a_1a_2 + 2a_1 + 2a_2 + 1 > 0; \tag{5.24}$$

$$\Big(2h^2 + 4(a_2 - 1)h - 2a_2 + 3\Big)\tilde{x} + h^2 + 2(a_1 + a_2 - 1)h + 8a_1a_2 + 2 > 0; \tag{5.25}$$

$$(2a_2 + h - 1)\Big((h-1)\tilde{x} + 2a_1 + h - 1\Big) > 0; \tag{5.26}$$

$$(2a_2 + h)^2y^2 - 2(2a_1h - h + 4a_1a_2 - 4a_1 - 2a_2)y + (2a_1 + 1)^2 > 0, \tag{5.27}$$

где $y = \tilde{x}(2-h)/(2a_2+1)$. Отметим, что $\tilde{x} > 0$ в силу ограничения (5.18), поэтому условие (5.24) всегда выполняется. Для инерциальных характеристик реальных ветродвигателей выполняется неравенство

$$2a_2 + h - 1 < 0. \tag{5.28}$$

Используя это неравенство, заключаем, что условие (5.26) выполняется при

$$\tilde{x} > \frac{2a_1}{1-h} - 1. \tag{5.29}$$

Нетрудно видеть, что неравенство (5.28) влечет выполнение неравенств (5.25) и (5.27).

Неравенство (5.29) с использованием соотношения (5.17) можно записать в следующем виде:

$$\frac{\omega_0^2}{\kappa} > \frac{2A_1 - J_{xx} + J_{zz} - 2ml^2}{A_1(J_{xx} - J_{zz} + 2ml^2)}. \tag{5.30}$$

На рис. 5.2 в плоскости параметров (φ_0, α) при достаточно малых фиксированных значениях жесткости σ показан характерный вид области выполнения необходимых условий устойчивости (5.23).

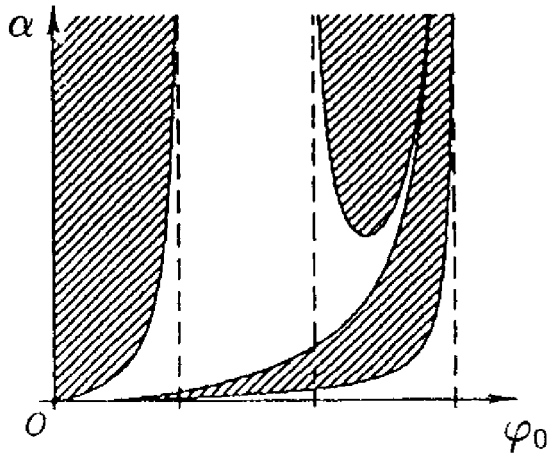

Рис. 5.2

5.3.2. Достаточные условия устойчивости модели с демпфированием. Будем считать, что $\tau > 0$, $\tau_1 > 0$. Согласно теореме 2.6, для асимптотической устойчивости решения (5.16) системы (5.15) достаточно, чтобы все корни характеристического уравнения (5.20) имели отрицательные вещественные части. Корни кубичного уравнения

$$b_0\lambda^3 + b_1\lambda^2 + b_2\lambda + b_3 = 0$$

всегда имеют отрицательные вещественные части, ибо для коэффициентов b_k выполнен критерий Льенара-Шипара (теорема 2.7): все b_k положительны, и

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ b_0 & b_2 \end{vmatrix} = 2\tau_1\omega_0^2 A_1^3 \sin^2 2\varphi_0 > 0.$$

Таким образом, условиями устойчивости решения (5.16) по первому приближению будут условия Льенара-Шипара на коэффициенты многочлена $P_6(\lambda)$, которые могут быть записаны следующим образом

$$c_1 > 0, c_3 > 0, c_5 > 0, c_6 > 0,$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} c_1 & c_3 & c_5 \\ c_0 & c_2 & c_4 \\ 0 & c_1 & c_3 \end{vmatrix} > 0, \qquad \Delta_5 = \begin{vmatrix} c_1 & c_3 & c_5 & 0 & 0 \\ c_0 & c_2 & c_4 & c_6 & 0 \\ 0 & c_1 & c_3 & c_5 & 0 \\ 0 & c_0 & c_2 & c_4 & c_6 \\ 0 & 0 & c_1 & c_3 & c_5 \end{vmatrix} > 0. \tag{5.31}$$

При выполнении условий (5.31) характеристическое уравнение (5.20) имеет девять корней с отрицательными вещественными частями и один нулевой корень, поскольку в первом приближении $\dot{\tilde{\gamma}}_z = 0$. У системы (5.15) существует геометрический интеграл

$$\gamma_x^2 + \gamma_y^2 + \gamma_z^2 = \text{const},$$

с помощью которого нетрудно исключить γ_z из систем (5.15), (5.19); следовательно, *условия (5.31) являются достаточными условиями асимптотической устойчивости исследуемого режима* (достаточными условиями асимптотической устойчивости решения (5.16) системы (5.15) по отношению к переменным φ_1, φ_2, $\dot{\varphi}_1$, $\dot{\varphi}_2$, $\boldsymbol{\omega}$, γ_x, γ_y).

Наибольший интерес в смысле практического использования предлагаемой модели представляет анализ условий (5.31) при достаточно больших жесткостях σ и κ, поэтому рассмотрим два важных предельных случая.

1. *Жесткость σ бесконечно велика, жесткость $\kappa > 0$ конечна.* Как видно из приложения А, условие $c_1 > 0$ всегда выполнено. Для проверки остальных условий разложим левые части неравенств (5.31) по степеням малого параметра $1/\sigma$. Ниже приводятся эти разложения, полученные с помощью программы Maple V.5.

$$\frac{c_3}{\sigma} = 2A_1\tau_1 + o\Big(\frac{1}{\sigma}\Big),$$

$$\frac{c_5}{\sigma} = 2\tau_1\Big\{2A_1\omega_0^2\cos 2\varphi_0 \ + \kappa\cos\varphi_0 + Pr\sin\varphi_0\Big\} + o\Big(\frac{1}{\sigma}\Big),$$

$$\frac{c_6}{\sigma^2} = 2A_1\omega_0^2\cos 2\varphi_0 \ + \kappa\cos\varphi_0 + Pr\sin\varphi_0 + o\Big(\frac{1}{\sigma}\Big),$$

$$\frac{\Delta_3}{\sigma^2} = 4A_1{\tau_1}^2\, s^2 + o\Big(\frac{1}{\sigma}\Big),$$

$$\frac{\Delta_5}{\sigma^4} = 8{\tau_1}^3\, s^2\Big\{4{A_1}^2\sin^2\varphi_0\Big(2{A_1}^2\cos(2\varphi_0)\sin^2\varphi_0 + (mld\sin^2\varphi_0)^2 +$$

$$+mld(A_1\sin\varphi_0 + mld)(4 - 6\sin^2\varphi_0)\Big){\omega_0}^4 + 4A_1\sin(\varphi_0)\times$$

$$\times\Big((mld)^2(\kappa\cos\varphi_0 + Pr\sin\varphi_0)(3-\sin^2\varphi_0)\sin\varphi_0 + \frac{1}{2}{A_1}^2\kappa\sin 2\varphi_0\,(1+\sin^2\varphi_0) +$$

$$+A_1Pr\sin^3\varphi_0(A_1\sin\varphi_0 + 3mld) + 2A_1\kappa mld\cos\varphi_0(1+\sin^2\varphi_0)\Big){\omega_0}^2 +$$

$$+\Big(A_1\kappa\cos\varphi_0 + mld\sin\varphi_0(Pr\sin\varphi_0 + \kappa\cos\varphi_0)\Big)^2\Big\} + o\Big(\frac{1}{\sigma}\Big), \qquad (5.32)$$

где

$$s^2 = \Big(A_1A_2 + A_1\sin\varphi_0(A_1\sin\varphi_0 + 2mld) + (mld\sin\varphi_0)^2\Big)^2 > 0.$$

Легко видеть, что при $\cos(2\varphi_0) > 0$, т.е. при $\varphi_0 < \frac{\pi}{4}$ все выражения (5.32) положительны для достаточно малых $1/\sigma$. Таком образом, в рассматриваемом случае имеет место асимптотическая устойчивость исследуемого режима равномерных вращений.

2. *Жесткость σ конечна при бесконечно большой κ.* В этом случае выполнены неравенства $c_3 > 0, c_5 > 0$ в главных частях по $1/\kappa$. Однако, коэффициенты разложения функций c_6, Δ_3, Δ_5 по $1/\kappa$ весьма громоздки.

Проанализируем условия устойчивости (5.31) при наличии дополнительной связи

$$\nu Pr = \tau_1 \omega_0. \tag{5.33}$$

Из соотношений (5.17), (5.33) вытекает следующее представление

$$\varphi_0 = Pr\frac{1}{\kappa} - A_1\Big(\frac{\nu}{\tau_1}\Big)^2 (Pr)^3 \frac{1}{\kappa^2} + o\Big(\frac{1}{\kappa^2}\Big). \tag{5.34}$$

С помощью соотношений (5.17) и (5.34) удается исключить ω_0 из выражений (5.31) и показать, что все условия из (5.31), кроме $c_6 > 0$ выполнены в главных членах по $1/\kappa$. Приводим условие положительности коэффициента при наименьшей степени $1/\kappa$ в разложении для c_6:

$$P < \frac{\tau_1^2\Big(q\delta^* + \sqrt{(q\delta^*)^2 + ((A_1 - A_2)^2 - q^2)(\delta^* + (\frac{\nu\tau}{\tau_1})^2)}\Big)}{\nu^2 r((A_1 - A_2)^2 - q^2)}, \tag{5.35}$$

где $q = A_1 + A_2 + J_{zz} - J_{xx} - 2ml^2$, $\delta^* = (\sigma + 2Pl)/(Pr)$.

Используя уравнение связи (5.33), можно с помощью ЭВМ построить в плоскости (P, κ) области устойчивости при прочих фиксированных значениях параметров. Характерный вид таких областей при малых значениях жесткости σ показан на рис. 5.3.

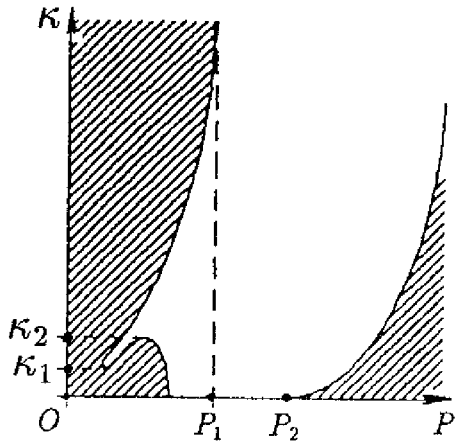

Рис. 5.3

Из рис. 5.3 видно, что при любом фиксированном $\kappa > 0$ имеется конечный интервал неустойчивости на оси P, причем неустойчивость

заведомо имеет место при $P \in (P_1, P_2)$, где $P = P_1$ обращает неравенство (5.35) в равенство. Значение $2P_1$ можно трактовать как максимально допустимое лобовое давление на ветроколесо при малых колебаниях лопастей.

Результаты численного анализа на ЭВМ показывают, что существуют такие числа κ_1, κ_2, что для любого фиксированного $\kappa \in (\kappa_1, \kappa_2)$ при изменении P от 0 до $+\infty$ наблюдаем такое чередование свойств (в рамках линейного приближения): устойчивость - неустойчивость - устойчивость - неустойчивость - устойчивость. Численный анализ также показывает, что для фиксированного $\kappa \gg 1$ с ростом отношения ν/τ_1 интервал экспоненциальной неустойчивости на оси P уменьшается и стремится к нулю.

5.4. Выводы

В разделе 5 построена математическая модель узла ветродвигателя на основе ССТТ и исследованы ее такие динамические свойства, как существование стационарных решений, соответствующих рабочим режимам ветродвигателя, и устойчивость по Ляпунову этих решений. При исследовании условий устойчивости большое внимание уделено получению обозримых аналитических результатов при достаточно больших параметрах жесткости шарниров, моделирующих упругие свойства деталей конструкции. Исходя из полученных результатов сделаем следующие выводы.

1. В подразделе 5.1 получены уравнения движения (5.15) модели ветродвигателя. Эти уравнения представляют собой систему двух уравнений Лагранжа второго рода, трех динамических уравнений, и трех кинематических уравнений Пуассона. Отметим, что кинетический момент и кинетическая энергия модели связаны соотношением (5.7), которое аналогично известной формуле для твердого тела с непо-

движной точкой.

2. Найдены условия (5.17) существования стационарных решений, соответствующих равномерным вращениям моделируемого узла. В окрестности таких решений построена система линейного приближения и найдены в явном виде коэффициенты ее характеристического многочлена. Установлено, что характеристический многочлен представим в виде произведения многочленов первой, третьей и шестой степени.

3. Исследованы необходимые условия устойчивости (5.23) консервативной модели при малых углах отклонения лопастей и больших значениях параметра жесткости κ. В результате получено условие (5.30), связывающее инерциальные характеристики модели с жесткостью лопастей и угловой скоростью режима равномерных вращений.

4. Для модели с демпфированием исследованы достаточные условия устойчивости Льенара - Шипара (5.31) при больших значениях параметров жесткости лопастей и вала. Установлено, что при стремлении жесткости вала к бесконечности (при прочих фиксированных параметрах) режим равномерных вращений устойчив асимптотически. Этот результат является аргументом в пользу того, чтобы при дальнейшем моделировании ветроэнергетических установок с жесткими валами считать движения вала относительно несущей гондолы одностепенными (а не трехстепенными, как в данной модели).

5. При бесконечно большой жесткости лопастей и при наличии дополнительной связи получено условие (5.35), связывающее допустимые значения лобового давления с остальными параметрами модели.

6. В плоскостях основных механических параметров построены области устойчивости по линейному приближению (рис. 5.2 и 5.3).

Полученные результаты носят в основном теоретический характер. Укажем возможные рекомендации для практического применения этих результатов. Во-первых, для “жестких” лопастей желательно подбирать параметры ветродвигателя так, чтобы всегда выполнялись неравенства (5.30), (5.35). Во-вторых, для проверки надежности конкретного режима ветродвигателя следует вычислить значения коэффициентов c_k (их выражения приведены в приложении А). При этом характеристикой надежности режима является выполнение неравенств (5.31) на коэффициенты c_k.

ВЫВОДЫ

В диссертации исследован вопрос о достаточных условиях стабилизируемости нелинейных управляемых систем, разработаны методы построения законов управления с обратной связью для задач стабилизации по части переменных. Решены задачи стабилизации и устойчивости для некоторых систем твердых тел. Перечислим наиболее важные научные результаты, полученные в диссертации.

1. В подразделе 3.2 впервые доказано, что для всякой системы, которая удовлетворяет свойству локальной управляемости вблизи особой точки, существует обратная связь, обеспечивающая неасимптотическую устойчивость. Указанная обратная связь в общем случае является разрывной функцией фазового вектора, а решения разрывной системы определяются по А.Ф. Филиппову. Этот результат является окончательным. В отличие от теоремы J.-M. Coron [7], в подразделе 3.2 управления с обратной связью не зависят явно от времени. Однако, в работах [7, 8] стабилизация является асимптотической. В подразделе 3.3 показано, что для линейной по управлению системы множество точек разрыва стабилизирующей обратной связи содержится в некотором гладком многообразии, размерность которого ниже размерности фазового пространства.

2. В подразделе 3.4 поставлена минимаксная задача об оптимальной по скорости затухания стабилизации в несущественно особенном критическом случае. Впервые получены асимптотические оценки решений модельной системы в критическом случае двух пар чисто мнимых корней. Показано, что с помощью этих оценок искомая задача об оптимальной стабилизации сводится к задаче на минимум некоторой величины, определяемой через решения вспомогательной системы алгебраических уравнений.

3. В подразделе 4.1 получены достаточные условия стабилизируемости неавтономных нелинейных систем в терминах управляемых функций Ляпунова по части переменных. Для линейных по управлению систем предложен конструктивный способ построения стабилизирующей обратной связи. Этот результат распространяет теорему Артстейна [9] на случай стабилизации по отношению к части переменных.

4. В подразделе 4.2 впервые доказаны теоремы о частичной стабилизации автономных систем при условии существования функции Ляпунова со знакопостоянной нижней границей производных. С помощью этих теорем решены задачи о частичной стабилизации ориентации твердого тела двумя независимыми управляющими моментами. Рассмотрены два случая: в первом управляющие моменты реализуются реактивными двигателями ориентации, во втором — парой маховиков. Эффективность найденных законов управления проиллюстрирована результатами численного интегрирования уравнений движения.

5. В разделе 5 впервые построена математическая модель узла ветродвигателя в виде ССТТ. Получены условия устойчивости режима равномерных вращений модели по линейному приближению и построены характерные области устойчивости в плоскостях основных механических параметров. При малых углах отклонения лопастей и достаточно больших значениях параметра жесткости найдено условие устойчивости, связывающее инерциальные характеристики модели с жесткостью лопастей и угловой скоростью режима равномерных вращений. При бесконечно большой жесткости лопастей и при наличии дополнительной связи получено достаточное условие устойчивости, связывающее допустимые значения лобового давления с остальными параметрами модели. Установлено, что при стрем-

лении жесткости вала к бесконечности (при прочих фиксированных параметрах) режим равномерных вращений устойчив асимптотически. Этот результат является аргументом в пользу того, чтобы при дальнейшем моделировании ветроэнергетических установок с большой жесткостью вала считать движение вала относительно несущей гондолы вращением с одной степенью свободы.

Перечисленные результаты имеют в основном теоретическое значение.

Укажем возможные практические применения полученных результатов. Результаты главы 4 (теоремы 4.2 - 4.4) могут быть рекомендованы к применению в конструкторских бюро для синтеза стабилизирующих законов управления техническими объектами.

Результаты главы 5 могут быть рекомендованы к использованию на этапе проектирования ветроэнергетических установок с целью оценки влияния параметров жесткости материалов на надежность функционирования конструкции. При этом мерой надежности рабочего режима ветродвигателя является выполнение неравенств (5.31). Желательно также подбирать параметры ветродвигателя таким образом, чтобы всегда выполнялись неравенства (5.30), (5.35).

Литература

[1] Калман Р.Е. *Об общей теории систем управления*// Труды I конгресса ИФАК. - Том 2. - М.: Изд. АН СССР. - 1961. - С. 521-547.

[2] Brockett R.W. *Asymptotic stability and feedback stabilization* //Differential Geometric Control Theory (R.W.Brockett, R.S. Millman and H.J.Sussmann eds.). - Boston: Birkhäuser, 1983. - P. 181-191.

[3] Ryan E.P. *On Brockett's condition for smooth stabilizability and its necessity in a context of nonsmooth feedback* // SIAM Journal on Control and Optimization. - 1994. - Vol. 32. - P. 1597-1604.

[4] Воротников В.И. *Задачи и методы исследования устойчивости и стабилизации движения по отношению к части переменных: направления исследований, результаты, особенности* // Автоматика и телемеханика. - 1993. - N 3. - С. 3-62.

[5] Migliore P.G., Calvert S.D. *U.S. Department of energy wind turbine development projects* // Proc. European Wind Energy Conference. - Nice (France). - 1999. - P. 64-71.

[6] Sussmann H.J. *Subanalytic sets and feedback control* // Journal of Differential Equations. - 1979. - Vol. 31. - P. 31-52.

[7] Coron J.-M. *On the stabilization in finite time of locally controllable systems by means of continuous time-varying feedback law* // SIAM Journal on Control and Optimization. - 1995. - Vol. 33. - P. 804-833.

[8] Clarke F.H., Ledyaev Yu.S., Sontag E.D., Subbotin A.I. *Asymptotic controllability implies feedback stabilizaton* // IEEE Trans. on Automat. Control. - 1997. - Vol. 42. - P. 1394-1407.

[9] Artstein Z. *Stabilization with relaxed controls* // Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications. - 1983. - Vol. 7. - No. 11. - P. 1163-1173.

[10] Зуев А.Л., Ковалев А.М. *Неасимптотическая стабилизация управляемых систем с помощью разрывной обратной связи* // Вестник Харьковского государственного политехнического университета. - 1999. - Вып. 70. - С. 76-81.

[11] Зуев А.Л., Савченко А.Я. *Об устойчивости равномерных вращений модели узла ветроэнергетической установки* // Механика твердого тела. - 1997. - Вып. 29. - С. 30-38.

[12] Зуев А.Л. *Об асимптотических оценках решений в случае устойчивости по формам третьего порядка* // Труды ИПММ НАН Украины. - 1998. - Т. 2. - С. 63-71.

[13] Зуев А.Л. *Построение стабилизирующей обратной связи с помощью управляемой функции Ляпунова относительно части переменных* // Труды ИПММ НАН Украины. - 1999. - Т. 4. - С. 70-76.

[14] Зуев А.Л. *Об оптимальной асимптотической устойчивости системы по критическим переменным* // Труды Межд. конф. "Математика в индустрии" (ICIM-98). - Таганрог: Изд-во Таганр. гос. пед. ин-та. - 1998. - С. 147-149.

[15] Zuiev A.L. *On Brockett's condition for smooth stabilization with respect to a part of the variables* // Proc. European Control Conference ECC'99. - Karlsruhe (Germany). - 1999. - CD-ROM file f0608.pdf.

[16] Зуев А.Л. *Применение функции Ляпунова со знакопостоянной производной для стабилизации по части переменных* // Тез. докл. VII Межд. конф. "Устойчивость, управление и динамика твёрдого тела" (ICSCD-99). - Донецк: ИПММ НАН Украины. - 1999. - С. 23-24.

[17] Зуев А.Л. *Частичная стабилизация ориентации спутника с помощью двух управляющих моментов* // Збірн. тез II Всеукраїнської молодіжної науково-практичної конференції з міжнародною участю "Людина і Космос". - Дніпропетровськ: НЦАОМУ. - 2000. - С. 63.

[18] Гальперин Е.А., Красовский Н.Н. *О стабилизации установившихся движений нелинейных управляемых систем* // ПММ. - 1963. - Т. 27. - Вып. 6. - С. 988-1004.

[19] Красовский Н.Н. *Проблемы стабилизации управляемых движений* // Малкин И.Г. Теория устойчивости движения; Дополнение 4. - М.:Наука, 1966. - С. 475-514.

[20] Sontag E.D. *Feedback stabilization of nonlinear systems* // Robust Control of Linear Systems and Nonlinear Control. - Cambridge (MA): Birkhäuser, 1990. - P. 61-81.

[21] Уонэм М. *Линейные многомерные системы управления.* - М.:Наука, 1980. - 376 с.

[22] Малкин И.Г. *Теория устойчивости движения.* - М.:Наука, 1966. - 532 с.

[23] Коробов В.И. *Связь между управляемостью и устойчивостью в задачах управления* // Диф. уравнения. - 1975. - Т. 11. - N. 8. - С. 1512-1515.

[24] Кунцевич В.М., Лычак М.М. *Синтез систем автоматического управления с помощью функций Ляпунова.* - М.: Наука, 1977. - 400 с.

[25] Веретенников В.Г. *Устойчивость и колебания нелинейных систем.* - М.:Наука, 1984. - 320 с.

[26] Каменков Г.В. *Устойчивость и колебания нелинейных систем.* - М.:Наука, 1972. - 214 с.

[27] Красовский Н.Н. *Некоторые задачи теории устойчивости движения.* - М.:Физматгиз, 1959. - 212 с.

[28] Молчанов А.М. *Устойчивость в случае нейтральности линейного приближения* // Докл. АН СССР. - 1961. - Т. 141. - N 1. - С. 24-27.

[29] Jurdjevic V., Quinn J.P. *Controllability and stability* //Journal of Differential Equations. - 1978. - Vol. 28. - P. 381-389.

[30] Sontag E.D., Sussmann H.J. *Remarks on continuous feedback* // Proc. IEEE Conf. Decision and Control. - Albuquerque (NM). - 1980. -P. 916-921.

[31] Kawski M. *Stabilization of nonlinear systems in the plane* // Systems and Control Letters. - 1989. - Vol. 12.- P. 169-175.

[32] Красносельский М.А., Забрейко П.П. *Геометрические методы нелинейного анализа.* - М.:Наука, 1975. - 512 с.

[33] Sontag E.D. *Stability and Stabilization: Discontinuities and the Effect of Disturbances* // Nonlinear Analysis, Differential Equations and Control. - Kluwer, 1999. - P. 551-598.

[34] Филиппов А.Ф. *Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью.* - М.:Наука, 1985. - 224 с.

[35] Astolfi A. *Discontinuous Control of the Brockett Integrator* // European Journal of Control. - 1998. - Vol. 4. - No. 1. - P. 49-63.

[36] Варга Дж. *Оптимальное управление дифференциальными и функциональными уравнениями.* - М.:Наука, 1977. - 624 с.

[37] Delchamps D.F. *Analytic stabilization and the algebraic Riccati equation* // Proc. IEEE Conf. Dec. and Control. - 1983. - P. 1396-1401.

[38] Sontag E.D. *A "universal" construction of Artstein's theorem on nonlinear stabilization* // Systems and Control Letters. - 1989. - Vol. 13. - P. 117-123.

[39] Lin Y., Sontag E.D. *A universal formula for stabilization with bounded controls* // Systems and Control Letters. - 1991. - Vol. 16. - P. 393-397.

[40] Malisoff M., Sontag E.D. *Universal formulas for CLF's with respect to Minkowski balls* // Proc. American Control Conference. - San Diego. - 1999. - P. 3033-3037.

[41] Sontag E.D. *A Lyapunov-like characterization of asymptotic controllability* // SIAM J. Control and Optim. - 1983. - Vol. 21. - P. 462-471.

[42] Sontag E.D., Sussmann H.J. *Nonsmooth control Lyapunov functions* // Proc. IEEE Conf. Decision and Control. - New Orleans. - 1995. - P. 2799-2805.

[43] Ковалёв А.М., Щербак В.Ф. *Управляемость, наблюдаемость, идентифицируемость динамических систем.* - Киев:Наук. думка, 1993. - 236 с.

[44] Ковалёв А.М. *Уравнения инвариантных и ориентированных многообразий динамических систем* // Доповіді НАН України. - 1998. - N. 9. - С. 21-25.

[45] Outbib R., Vivalda J.C. *On feedback stabilization of smooth nonlinear systems* // IEEE Trans. on Automatic Control. - 1999. - Vol. 44. - P. 200-202.

[46] Aggoune W., Outbib R., Darouach M. *A remark on stabilization of nonsmooth systems* // Proc. European Control Conference ECC'99. - Karlsruhe (Germany). - 1999. - CD-ROM file f0197.pdf.

[47] Bacciotti A., Ceragioli F. *Stability and stabilization of discontinuous systems and nonsmooth Lyapunov functions* // ESAIM: Control, Optimization and Calculus of Variations. - 1999. - Vol. 4. - P. 361-376.

[48] Коробов В.И. *Управляемость, устойчивость некоторых нелинейных систем* // Диф. уравнения. - 1973. - Т. 9. - N. 4. - С. 614-619.

[49] Coron J.-M., Praly L., Teel A. *Feedback stabilization of nonlinear systems: sufficient conditions and Lyapunov and input-output techniques* // A.Isidori (Ed.), Trends in Control: A European Perspective. - Berlin: Springer, 1995. - P. 293-348.

[50] Celikovsky S., Aranda-Bricaire E. *Constructive nonsmooth stabilization of triangular systems* // Systems and Control Letters. - 1999. - Vol. 36. - P. 21-37.

[51] Hermes H. *Smooth homogeneous asymptotically stabilizing feedback controls* // ESAIM: Control, Optim. and Calculus of Variations. - 1997. - Vol. 2. - P. 13-32.

[52] Banks S.P. *Nonlinear systems, the associated angular system and stabilization* // Proc. European Control Conference ECC'99. - Karlsruhe (Germany). - 1999. - CD-ROM file f1029-2.pdf.

[53] Morin P., Samson C. *Exponential stabilization of nonlinear driftless systems with robustness to unmodeled dynamics* // ESAIM: Control, Optim. and Calculus of Variations. - 1999. - Vol. 4. - P. 1-35.

[54] Peiffer K., Savchenko A.Ya. *On passive stabilization* // Publ. of Catholic University of Lovain. - Lovain-la-Neuve (Belgium). - 1995. - P. 5-19.

[55] Peiffer K., Savchenko A.Ya., *On the asymptotic behavior of a passively stabilized system with one critical variable* // Séminaire Mathématique, Inst. de Math. Pure et Appliquée. - Louvain-la-Neuve (Belgium). - 1998. - Rapport 280. - P. 1-12.

[56] Румянцев В.В., Озиранер А.С. *Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных.* - М.:Наука, 1987. - 256 с.

[57] Руш Н., Абетс П., Лалуа М. *Прямой метод Ляпунова в теории устойчивости.* - М.:Мир, 1980. - 304 с.

[58] Румянцев В.В. *Об устойчивости движения по отношению к части переменных* // Вестн. МГУ. Сер. мат., мех., физ., астрон., хим. - 1957. - N 4. - С. 9-16.

[59] Воротников В.И. *Устойчивость динамических систем по отношению к части переменных.* -М.:Наука, 1991. - 288 с.

[60] Матросов В.М. *Развитие метода функций Ляпунова в теории устойчивости движения* // Тр. II Всесоюзн. съезда по теор. и прикл. механике. - Том 1. - М.:Наука. - 1965. - С. 112-125.

[61] Щенников В.Н. *Исследование устойчивости по части переменных дифференциальных систем с однородными правыми частями* // Дифференц. уравнения. - 1984. - Т. 20. - N 9. - С. 1645-1649.

[62] Шестаков А.А. *О степенной асимптотике неавтономной однородной и квазиоднородной системы* // Дифференц. уравнения. - 1975. - Т. 11. - N 8. - С. 1427-1436.

[63] Isidori A. *Nonlinear Control Systems: An Introduction.* - Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo: Springer-Verlag, 1985. - 297 p.

[64] Савченко А.Я., Игнатьев А.О. *Некоторые задачи устойчивости неавтономных динамических систем.* - Киев: Наукова думка, 1989. - 208 с.

[65] Андреев А.С. *Об исследовании частичной асимптотической устойчивости* // ПММ. - 1991. - Т. 55. - Вып. 4. - С. 539-547.

[66] Воротников В.И. *К теории устойчивости по отношению к части переменных* // ПММ. - 1995. - Т. 59. - Вып. 4. - С.553-561.

[67] Ковалёв А.М. *Частичная устойчивость и стабилизация динамических систем* // Український математичний журнал. - 1995. - Т. 47. - N 2. - С. 186-193.

[68] Красовский Н.Н. *Об условиях обращения теорем А.М. Ляпунова о неустойчивости для стационарных систем дифференциальных уравнений* // Докл. АН СССР. - 1955. - Т. 101. - N 1. - С. 17-20.

[69] Раушенбах Б.В., Токарь Е.Н. *Управление ориентацией космических аппаратов.* - М.:Наука, 1974. - 600 с.

[70] Зубов В.И. *Лекции по теории управления.* - М.:Наука, 1975. - 496 с.

[71] Фурасов В.Д. *Устойчивость движения, оценки и стабилизация.* - М.:Наука, 1977. - 248 с.

[72] Акуленко Л.Д. *Асимптотические методы оптимального управления.* - М.:Наука, 1987. - 368 с.

[73] Акуленко Л.Д. *Стабилизация КА минимальным числом импульсов* // Космические исследования. - 1988. - Т. 26. - N. 2. - С. 227-235.

[74] Aeyels D., Szafranski M. *Comments on the stabilizability of the angular velocity of a rigid body* // Systems and Control Letters. - 1988. - Vol. 10. - P. 35-39.

[75] Sontag E.D., Sussmann H.J. *Further comments on the stabilizability of the angular velocity of a rigid body* // Systems and Control Letters. - 1989. - Vol. 12. - P. 213-217.

[76] Ковалёв А.М., Исса Салем Абдалла *Стабилизация равномерных вращений твердого тела вокруг главной оси* // Прикладная механика. - 1992. - Т. 28(38). - N 9. - С. 73-79.

[77] Astolfi A., Rapaport A. *Robust stabilization of the angular velocity of a rigid body* // Systems and Control Letters. - 1998. - Vol. 34. - P. 257-264.

[78] Рубановский В.Н. *Устойчивость установившихся движений сложных механических систем* // Итоги науки и техники: Общая механика. - М.: ВИНИТИ, 1982. - Т. 5. - С. 62-134.

[79] Лурье А.И. *Аналитическая механика.* - М.:Физматгиз, 1961. - 824 с.

[80] Reis G.F., Sundberg W.D. *Calculations of the aeroelastic bending of a sounding rocket based on flight data* // Proc. AIAA Sound Rocket Vehicle Technol. Specialist Conf. -Williamsburg (VA).-1967.-P. 402-422.

[81] Докучаев Л.В. *Нелинейная динамика упругого летательного аппарата* // Итоги науки и техники: Общая механика. - М.: ВИНИТИ, 1982. - Т. 5. - С. 135-197.

[82] Харламов П.В. *Об уравнениях движения системы твердых тел* // Механика твердого тела. - 1972. - Вып. 4. - С. 52-73.

[83] Савченко А.Я., Болграбская И.А., Кононыхин Г.А. *Устойчивость движения систем связанных твердых тел.* - Киев: Наукова думка, 1991. - 168 с.

[84] Болграбская И.А. *Обоснование исследования динамических свойств упругого стержня на основе модели системы связанных твердых тел* // ПММ.-1996.-Т. 60.-Вып. 2.-С. 346-350.

[85] Елфимов Е.К., Ковалев А.М. *Исследование колебаний манипулятора произвольной структуры при работе с виброинструментом на основе его динамической модели* // Механика твердого тела. - 1989. - Вып. 21. - С. 47-56.

[86] Выпов А.Г., Елфимов В.С. *Составление математической модели разветвленного манипулятора на этапе проектирования* // Механика твердого тела. - 1992. - Вып. 24. - С. 111-117.

[87] Савченко А.Я., Ковалев И.Н., Савченко Я.А. *Математическое моделирование кинетического накопителя энергии системой связанных твердых тел* // Механика твердого тела. - 1992. - Вып. 24. - С. 69-75.

[88] Савченко А.Я., Соболев А.Г., Чудненко А.Н. *Математическое моделирование тяжелого кинетического накопителя энергии системой связанных твердых тел* // Механика твердого тела. - 1993. - Вып. 25. - С. 80-86.

[89] *Преобразование и использование ветровой энергии* / Денисенко О.Г., Козловский Г.А. и др. - Киев: Техніка, 1992. - 174 с.

[90] Rehfeldt K., Schwenk B., Molly J. *Sensivity study of different parameters concerning the energy generating costs of wind turbines* // Proc. European Wind Energy Conference. - Dublin (Ireland). - 1997. - P. 90-95.

[91] Вашкевич К.П. *Импульсная теория ветряных двигателей Г.Х. Сабинина* // Промышленная аэродинамика. - 1959. - Вып. 13. - С. 8-16.

[92] Перли С.Б. *Быстроходные ветряные двигатели.* М.-Л.: Гостехиздат, 1951. - 288 с.

[93] Красовский Н.Н., Субботин А.И. *Позиционные дифференциальные игры.* - М.: Наука, 1974. - 456 с.

[94] Гантмахер Ф.Р. *Теория матриц.* - М.: Наука, 1966. - 576 с.

[95] Молчанов А.М. *Разделение движений и асимптотические методы в теории нелинейных колебаний* // Докл. АН СССР. - 1961. - Т. 136. - N 5. - С. 1030-1033.

[96] Зубов В.И. *Методы А.М. Ляпунова и их применение.* - Л.: Изд-во ЛГУ, 1957. - 263 с.

[97] Брокетт Р. *Нелинейные системы и дифференциальная геометрия* // Труды Института инженеров по электротехнике и радиоэлектронике (ТИИЭР). - 1976. - Т. 64. - N 1. - С. 80-94.

[98] Sontag E.D. *Kalman's controllability rank condition: from linear to nonlinear* // Mathematical System Theory: The Influence of R.E. Kalman (A.C. Antoulas, Ed.). - Berlin: Springer, 1991. - P. 453-462.

[99] Ли Э.Б., Маркус Л. *Основы теории оптимального управления.* - М.: Наука, 1972. - 576 с.

[100] Лобри К. *Динамические полисистемы и теория управления* // Математика, новое в зарубежной науке. - Вып. 14. - М.: Мир, 1979. - С. 134-173.

[101] Бабичев А.В., Бутковский А.Г., Лепе Н.Л. *Особые множества на фазовых портретах динамических систем с управлением. II.* // Автоматика и телемеханика. - 1986. - N 7. - С. 48-54.

[102] Sussmann H.J. *Why real analyticity is important in control theory* // Perspectives in control theory (Jakubczyk B., Malanowski K., Respondek W. Eds.). - Boston: Birkhauser. - 1990. - P. 315-340.

[103] Немыцкий В.В., Степанов В.В. *Качественная теория дифференциальных уравнений.* - М.-Л.: Гостехиздат, 1947. - 448 с.

[104] Зуев А.Л. *Устойчивость равномерных вращений модели узла ветроэнергетической установки* // Тез. докл. VI Межд. конф. "Устойчивость, управление и динамика твёрдого тела" (ICSCD-96). - Донецк: ИПММ НАН Украины. - 1996. - С. 118-119.

[105] Курош А.Г. *Курс высшей алгебры.* - М.: Наука, 1968. - 432 с.