

Институт прикладной математики и механики НАН Украины

На правах рукописи

Зуев Александр Леонидович

УДК 531.36, 531.39, 517.977

**Управление и стабилизация движения бесконечномерных
механических систем с упругими элементами**

Специальность 01.02.01 — теоретическая механика

Диссертация на соискание ученой степени
доктора физико - математических наук

Научный консультант

Ковалев Александр Михайлович

доктор физ.-мат. наук, профессор,

член – корреспондент НАН Украины

Донецк — 2008

Содержание

1	Обзор литературы и методика исследований	16
1.1	Моделирование и устойчивость движения механических систем с упругими элементами	16
1.2	Управляемость и стабилизация моделей упругих систем . . .	26
1.3	Представление решений дифференциальных уравнений с помощью полугрупп операторов	36
1.3.1	Сильно непрерывные полугруппы линейных операторов	37
1.3.2	Нелинейные полугруппы	44
1.3.3	Асимптотическое поведение сжимающих нелинейных полугрупп	49
1.4	Модальное управление упругими системами	51
1.5	Выводы	59
2	Частичная асимптотическая устойчивость в бесконечномерном фазовом пространстве	62
2.1	Частичная асимптотическая устойчивость многозначных динамических процессов	63
2.2	Устойчивость нелинейных полугрупп	71
2.3	Относительная компактность траекторий дифференциальных уравнений в банаховом пространстве	75
2.3.1	Леммы о компактности	76
2.3.2	Предкомпактность траекторий возмущенной задачи .	78
2.4	Выводы	81
3	Управляемость и стабилизация вращающегося тела с балками Эйлера – Бернулли	84
3.1	Движение твердого тела с упругими балками	84
3.2	Анализ управляемости	91
3.3	Стабилизация с обратной связью	94

3.4	Частичная стабилизация в случае кратных частот	103
3.5	Стабилизация конечномерной подсистемы и результаты вычислений	106
3.6	Выводы	108
4	Управление системой с обобщенными координатами с использованием канонической формы	111
4.1	Приведение конечномерной системы к канонической форме Бруновского	111
4.2	Проверка условий точной линеаризуемости с обратной связью	118
4.3	Оптимальное управление для конечномерной системы	125
4.4	Решение задачи приближенной управляемости в явном виде	134
4.5	Приближенная управляемость модели Эйлера – Бернулли .	143
4.6	Выводы	147
5	Стабилизация многозвенного упругого манипулятора	149
5.1	Описание модели	149
5.2	Уравнения движения	153
5.3	Условия равновесия системы	157
5.4	Уравнения возмущенного движения в случае одного звена .	158
5.5	Устойчивость линеаризованной системы с обратной связью .	160
5.6	Локализация предельного множества траекторий уравнения Эйлера – Бернулли с управлением	168
5.6.1	Предкомпактность траекторий системы с обратной связью	168
5.6.2	Анализ спектра задачи Штурма – Лиувилля	176
5.6.3	Доказательство асимптотической устойчивости	183
5.7	Стабилизация многозвенника с упругими шарнирами	185
5.7.1	Уравнения движения	185
5.7.2	Собственные функции однородной задачи	189
5.7.3	Приближенная модель	191

5.7.4	Стабилизация положения равновесия	192
5.7.5	Задача наблюдаемости	194
5.7.6	Численное моделирование	195
5.8	Выводы	196
6	Управление моделью манипулятора в виде балки Тимошен-	
	ко	199
6.1	Описание модели	199
6.2	Уравнения возмущенного движения	204
6.3	Свойства собственных значений задачи Штурма – Лиувилля	206
6.4	Аппроксимация по Галеркину	219
6.5	Управляемость и стабилизация обратной связью по состоянию	223
6.6	Синтез динамического наблюдателя	227
6.6.1	Условия наблюдаемости	227
6.6.2	Синтез динамического наблюдателя	229
6.7	Стабилизация с наблюдателем в цепи обратной связи	232
6.8	Результаты вычислений	234
6.9	Выводы	237
7	Условия стабилизируемости в терминах критических гамиль-	
	тонианов и символов	239
7.1	Определение критических гамильтонианов и символов	240
7.2	Условия стабилизируемости	242
7.3	Стабилизация системы с полиномиальными векторными по-	
	лями	247
7.3.1	Стабилизируемость при наличии линейных членов	251
7.3.2	Случай $2q - 1 > s > 1$	252
7.3.3	Случай $1 < 2q - 1 \leq s$	253
7.4	Выводы	260
8	Заключительные выводы	261

Введение

Актуальность темы. Современный технический прогресс приводит к необходимости математического моделирования движения сложных управляемых механических систем с распределенными параметрами. Актуальность этого научного направления можно проиллюстрировать на примере исследования движения космических аппаратов с деформируемыми элементами (антеннами, панелями солнечных батарей, штангами, тросами) и роботов - манипуляторов с упругими звеньями. В работах Л.В. Докучаева, В.Н. Рубановского, В.В. Румянцева, Р. Likins и других ученых установлено, что упругие свойства элементов конструкции оказывают существенное влияние на динамику в целом, поэтому задачи управления и стабилизации движения упругих спутников и роботов-манипуляторов не могут быть с требуемой точностью решены в рамках модели абсолютно твердого тела. Моделирование этих и других объектов современной техники привело к развитию теории гибридных механических систем, которые состоят из твердых и деформируемых тел. К наиболее распространенным видам упругих элементов, которые используются при теоретическом исследовании гибридных систем, относятся модели балок Эйлера – Бернулли [1, с. 597] и Тимошенко [2, с. 56], [3, с. 389].

Задачи моделирования механических систем с упругими элементами, а также смежные вопросы устойчивости и управления в конечномерной и бесконечномерной постановках исследовались в работах В.В. Белецкого, И.А. Болграбской, В.И. Гуляева, Ф.М. Диментберга, А.Е. Закржевского, А.А. Илюхина, Ю.Н. Кононова, Д.В. Лебедева, И.А. Луковского, А.И. Лурье, М.К. Набиуллиной, А.Я. Савченко, Ф.Л. Черноусько, В.С. Хорошилова, J. Baillieul, M. Balas, G. Leugering, Ö. Morgül, H. Troger и других авторов.

Одним из наиболее эффективных методов анализа устойчивости и синтеза управлений для моделей гибридных систем с распределенными параметрами является прямой метод Ляпунова, который позволяет также ис-

следовать более общие свойства решений распределенных систем (устойчивость по отношению к части переменных, свойства предельных множеств). Важный вклад в развитие прямого метода Ляпунова для бесконечномерных систем внесен исследованиями В.И. Зубова, А.О. Игнатъева, А.А. Мартынюка, В.М. Матросова, Т.К. Сиразетдинова, А.А. Шестакова, J.M. Ball, J.-M. Coron, V. Lakshmikantham, J.P. LaSalle и др.

Диссертационная работа связана также с развитием современных методов теории управления, основанных на декомпозиции управляемых систем, использовании канонических форм, теории плоских (flat) систем по терминологии M. Fliess, J. Lévine, Ph. Martin, P. Rouchon. Эти методы получили существенное развитие в работах А.М. Ковалева, В.И. Коробова, В.Б. Ларина, В.В. Новицкого и других ученых.

Поскольку математические модели гибридных систем описываются дифференциальными уравнениями с частными производными, а также уравнениями в функциональных пространствах, то в работе использованы современные подходы математической теории управления распределенными системами, связанные с использованием методов функционального анализа. Эти подходы основаны на результатах А.А. Аграчева, А.Г. Бутковского, Ю.Л. Далецкого, М.З. Згуровского, Н.Д. Копачевского, М.Г. Крейна, С.Г. Крейна, В.С. Мельника, Г.М. Склера, А. Balakrishnan, V. Barbu, R. Curtain, H. Fattorini, J.-L. Lions, W. Krabs и др.

Связь работы с научными программами, планами, темами. Тематика диссертационной работы включена в планы научных исследований отдела технической механики Института прикладной математики и механики НАН Украины (ИПММ НАН Украины) на 2001-2008 годы.

Часть результатов связана с участием диссертанта в выполнении научно-исследовательских работ “Математичні методи дослідження задач стійкості і керування динамічних систем та їх застосування у динаміці систем твердих тіл” (2001 – 2005 гг., регистр. номер 0101U001094) и “Керування і стійкість гібридних систем та сучасні проблеми робототехніки” (2006 –

2008 г., регистр. номер 0106U000044).

Отдельные результаты диссертации получены в ходе выполнения автором дополнительной ведомственной темы НАН Украины “Стабілізація керованих систем і теорія інваріантів” (2006 г., регистр. номер 0106U005990) и научной работы “Математичне моделювання і керування гібридними механічними системами” по гранту Президента Украины для поддержки научных исследований молодых ученых (2007 г., регистр. номер 0107U008484). Часть результатов диссертации отмечена премией Президента Украины для молодых ученых 2006 года за работу “Нелінійна стабілізація багатовимірних керованих систем” (указ Президента Украины от 15.12.2006 № 1083/2006).

Направление исследований диссертационной работы было поддержано грантами Международного центра теоретической физики ЮНЕСКО и МАГАТЭ им. Абдуса Салама (Триест, Италия, 2003 г.) и фонда Александра фон Гумбольдта (Германия, 2004 г.)

Цель и задачи исследования. Цель диссертационной работы состоит в создании эффективных методов управления гибридными механическими системами, которые описываются моделями с распределенными параметрами. Для достижения этой цели необходимо решить ряд важных задач теоретической механики и теории управления. Одна из этих задач связана с адекватным математическим моделированием пространственного движения гибридных систем. В общем случае такие модели описываются системами нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений с частными производными. Еще одна задача исследования состоит в построении алгоритмов управления и наблюдения при неполной информации измерений.

Научная новизна полученных результатов определяется следующими положениями.

1. Для исследования асимптотических свойств движений механических систем с распределенными параметрами впервые введено понятие асимп-

- тотической устойчивости по отношению к непрерывному функционалу для нелинейных динамических систем с многозначными решениями на метрическом пространстве. Доказано обобщение теоремы Барбашина – Красовского и принципа инвариантности ЛаСалля при условии существования непрерывного функционала Ляпунова. В случае существования дифференцируемого функционала типа Ляпунова выведены достаточные условия частичной устойчивости в банаховом пространстве. Этот результат использован для синтеза функций управления математическими моделями гибридных механических систем.
2. Предложены новые достаточные условия предкомпактности траекторий класса нелинейных дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. Такие условия позволяют исследовать предельные множества с помощью принципа инвариантности.
 3. Получена математическая модель вращательного движения спутника с произвольным числом упругих элементов - антенн в виде балок Эйлера – Бернулли. Если все балки имеют одинаковые механические параметры, то исследуемая система не является асимптотически устойчивой, и при таких условиях решена задача стабилизации по отношению к норме некоторого оператора проектирования на бесконечномерное подпространство фазового пространства. В случае балок с нерезонансными параметрами доказана приближенная управляемость системы и предложен функционал управления, который обеспечивает сильную асимптотическую устойчивость положения равновесия. Такое управление реализует стабилизацию ориентации тела-носителя с одновременным гашением колебаний стержней.
 4. Получены уравнения пространственного движения упругого роботоманипулятора с учетом телескопического смещения его звеньев под воздействием управляющих сил. В качестве модели деформации звеньев рассмотрена балка Эйлера – Бернулли. Для манипулятора с од-

- ним гибким звеном найдено управление с обратной связью, обеспечивающее сильную стабилизацию положения равновесия в бесконечномерном фазовом пространстве.
5. Предложена модель гибкого манипулятора, у которого соседние звенья связаны шарнирами. Такие шарниры реализуют упругие восстанавливающие моменты, направленные на совмещение центральных линий звеньев. Описана математическая модель такого манипулятора в виде граничной задачи с частными производными и построена приближенная система по Галеркину. Предложено управление с обратной связью, решающее задачу стабилизации положения равновесия приближенной системы. Исследована наблюдаемость в линейной постановке и проведено численное моделирование управляемого движения нелинейной конечномерной системы.
 6. Для конечномерной математической модели механической системы с упругой балкой указан явный вид преобразования, приводящего исследуемую линейную систему к стандартной канонической форме (канонической форме Бруновского). Такой результат не может быть усилен, поскольку доказано, что нелинейное возмущение рассматриваемой модели не являются плоским (flat). Решена задача минимизации квадрата нормы управления при фиксированных начальном и конечном положениях системы. При этом использовано сведение задачи оптимального управления к задаче Лагранжа. Предложенный подход конструктивно определяет управление с наименьшей “энергией”, переводящее систему из любого начального состояния в наперед заданное при произвольном количестве обобщенных координат N . Получены оценки решений бесконечномерной системы при использовании оптимального управления, соответствующего подсистеме с конечным числом обобщенных координат. Доказано, что построенное семейство управлений позволяет решить задачу приближенной управляемости бесконечно-

- мерной системы. Установлено, что условия приближенной управляемости выполнены для модели колебаний твердого тела с упругой балкой Эйлера – Бернулли.
7. Предложена модель управляемой механической системы в виде балки Тимошенко с нагрузкой, описывающая движение гибкого роботоманипулятора. Для уравнений движения с частными производными построено приближение по Галеркину, основанное на решениях соответствующей задачи Штурма – Лиувилля. Получены условия локальной управляемости для галеркинской аппроксимации в окрестности положения равновесия системы. Доказана стабилизируемость положения равновесия и предложена явная схема синтеза управления с обратной связью по состоянию. Получены условия наблюдаемости системы относительно выходного сигнала в виде угла наклона и компоненты тензора напряжений в фиксированной точке манипулятора. Предложена схема стабилизации положения равновесия модели с помощью обратной связи по состоянию системы-наблюдателя. Доказано, что такой подход обеспечивает асимптотическую устойчивость невозмущенного решения галеркинской системы при любом количестве степеней свободы, соответствующих колебаниям упругой балки. Приведен результат численного интегрирования уравнений движения, который иллюстрирует эффективность найденного управления.
8. Найдены новые условия стабилизируемости, основанные на описании нелинейной системы в терминах критических гамильтонианов и символов. Применимость такого подхода показана на модельном примере.

Практическое значение полученных результатов. Результаты диссертации имеют в основном теоретическое значение. Они могут быть использованы для дальнейшего развития теории управления и устойчивости движения механических систем с бесконечным числом степеней свободы. Результаты разделов 3 и 4 могут быть рекомендованы к применению

в инженерной практике при проектировании систем управления космическими аппаратами с упругими элементами. Разработанные в разделах 5 и 6 математические модели и методы построения функций управления могут быть использованы при создании алгоритмического обеспечения современных роботов-манипуляторов с упругими звеньями.

Личный вклад соискателя. Все результаты, которые выносятся на защиту, получены соискателем лично. Статья [4] опубликована в соавторстве с А.М. Ковалевым и В.Ф. Щербаком. Автору диссертационной работы принадлежит вывод уравнений движения и доказательство частичной стабилизируемости нелинейной системы.

Результаты совместных исследований с Б. Якубчиком (B. Jakubczyk) опубликованы в работе [9]. Автору диссертации принадлежит доказательство теоремы об условиях стабилизируемости и анализ модельного примера.

Статья [19] опубликована в соавторстве с О. Заводни (O. Sawodny). Автору диссертации принадлежит вывод уравнений колебания балки Тимошенко с учетом продольных перемещений и доказательства всех теорем.

Апробация результатов диссертации. Основные результаты диссертационной работы были представлены на следующих конгрессах, конференциях и научных собраниях:

- Семинар по управлению и стабилизации динамических систем (Control and Stabilization of Dynamical Systems), Международный математический центр им. С.Банаха, Варшава (Польша), 17.04 - 2.05.2001;
- Летняя школа по математической теории управления, Международный центр теоретической физики ЮНЕСКО и МАГАТЭ им. Абдуса Салама, Триест (Италия), 3-28.09.2001;
- Международные семинары по управлению движением роботов (Robot Motion and Control "RoMoCo"), Познаньский технологический университет, Познань (Польша), 18-20.10.2001 и 8-10.11.2002;

- Всероссийский конкурс научных работ молодых ученых по механике и процессам управления, посвященный 100-летию со дня рождения А.И. Лурье, Санкт-Петербург (Россия), 13-14.12.2001. Доклад отмечен дипломом I степени и медалью победителя;
- Международные Конференции “Моделирование и исследование устойчивости динамических систем” (DSMSI), Киевский национальный университет им. Т. Шевченко, Киев, 27-30.05.2003 и 22-25.05.2007;
- 15-й Всемирный конгресс Международной федерации автоматического управления (15th IFAC World Congress), Барселона (Испания), 21-26.07.2002. Работа “Partial Stabilization of a Rigid Body with Several Elastic Beams” отмечена грамотой IFAC как одна из трех лучших статей молодых авторов Конгресса;
- Международные Конференции “Устойчивость, управление и динамика твердого тела” (ICSCD), Донецк, 3-7.09.2002 и 1-6.09.2005;
- Школа по математической теории управления (School on Mathematical Control Theory), Международный математический центр им. С.Банаха, Бендлево-Варшава (Польша), 2-20.09.2002;
- Семинар “Геометрия в нелинейном управлении” (Geometry in Nonlinear Control), Международный математический центр им. С.Банаха, Бендлево (Польша), 16-20.06.2003;
- Международная конференция “Физика и управление” (PhysCon 2003), С. Петербург (Россия), 20-22.08.2003;
- 48-й Международный научный коллоквиум (IWK 2003), Ильменау (Германия), 22-25.09.2003;
- Триместр по динамическим и управляемым системам, Международная школа высших исследований (SISSA), Триест (Италия), 8.09 - 7.12.2003;

- 2-я Европейская молодежная конференция “Теория управления и стабилизация” (European Meeting on Control Theory and Stabilization), Турин (Италия), 3-5.12.2003;
- 42-я Конференция по управлению и принятию решений (42nd IEEE Conference on Decision and Control CDC’03), Майи (США), 9-12.12.2003;
- Семинар по математической теории систем (Workshop “Mathematische Systemtheorie 2004”), Эльгерсбург (Германия), 16-18.02.2004;
- VI Международная молодежная научно-практическая конференция “Человек и Космос”, Днепропетровск, 14-16.04.2004;
- Общее собрание Отделения математики НАН Украины, Институт математики НАН Украины, Киев, 28.04.2004;
- Семинар “Геометрия распределений и систем управления” (Geometry of Distributions and Control Systems), Международный математический центр им. С. Банаха, Варшава (Польша), 10-22.05.2004;
- Международные конференции “Классические проблемы динамики твердого тела”, Донецк, 23-25.06.2004 и 9-13.06.2007;
- IV Европейский математический конгресс (Fourth European Congress of Mathematics “4есm”), Стокгольм (Швеция), 27.06-2.07.2004;
- Летняя школа и конференция по динамическим системам (Summer School and Conference on Dynamical Systems), Международный центр теоретической физики ЮНЕСКО и МАГАТЭ им. Абдуса Салама, Триест (Италия), 19.07-6.08.2004;
- Семинар ИФАК по обобщенным решениям в задачах управления (IFAC Workshop on Generalized Solutions in Control Problems “GSCP-2004”), Переславль-Залесский (Россия), 21-29.09.2004;

- 16-й Всемирный конгресс Международной федерации автоматического управления (16th IFAC World Congress), Прага (Чешская республика), 4-7.07.2005;
- Заседание Президиума НАН Украины, Киев, 28.12.2005;
- Третья международная конференция по проблемам управления, Институт проблем управления им. В.А. Трапезникова РАН, Москва (Россия), 20-22.06.2006;
- VIII Крымская Международная математическая школа “Метод функций Ляпунова и его приложения” (МФЛ-2006), Алушта, 10-17.09.2006;
- 45-я Конференция по управлению и принятию решений (45th IEEE Conference on Decision and Control CDC’06), Сан Диего (США), 13-15.12.2006;
- Международный конгресс “Нелинейный динамический анализ” (NDA-2007), посвященный 150-летию акад. А.М. Ляпунова, Санкт-Петербург (Россия), 4-8.06.2007;
- XIV Международная конференция по автоматическому управлению “Автоматика-2007”, Севастополь, 10-14.09.2007;
- Международная конференция по нелинейным дифференциальным уравнениям с частными производными (Nonlinear partial differential equations “NPDE 2007”, Ялта, 10-15.09.2007;
- X Международная научно-техническая конференция “Моделирование, идентификация, синтез систем управления”, п. Канака, АР Крым, 16-23.09.2007;
- Международная конференция по управлению в квантовых системах "Control, Constraints and Quanta", Международный математический центр им. С.Банаха, Бендлево (Польша), 10-16.10.2007.

Отдельные части диссертационной работы подробно обсуждались на семинарах:

- Семинар по общей механике, Институт прикладной математики и механики НАН Украины, Донецк, 2001 – 2007 гг. Руководитель семинара – член-корреспондент НАН Украины А.М. Ковалев.
- Семинар Института механики Технического Университета Вены, Вена (Австрия), 2003 г. Руководитель семинара – профессор Г. Трогер (H. Troger).
- Семинар Секции математики Международного центра теоретической физики ЮНЕСКО и МАГАТЭ им. Абдуса Салама, Триест (Италия), 2003 г. Руководитель семинара – профессор Д.Т. Ле (D.T. Le).
- Семинар Международной школы высших исследований (SISSA), Триест (Италия), 2003. Руководитель семинара – профессор А.А. Аграчев.
- Семинар Технического университета Ильменау, Ильменау (Германия), 2004 г. Руководитель семинара – профессор О. Заводни (O. Sawodny).
- Семинар кафедры прикладной математики Католического университета Лувайна, Лувайн-ла-Нёв (Бельгия), 2005 г. Руководитель семинара – профессор В. Блондель (V. Blondel).
- Семинар отделов нелинейного анализа и уравнений в частных производных Института прикладной математики и механики НАН Украины, 2007 г. Руководители семинара – профессор А.Е. Шишков и доктор физ.-мат. наук А.А. Ковалевский.

В полном объеме диссертация докладывалась и обсуждалась на семинаре “Математические проблемы механики и вычислительная математика” в Институте математики НАН Украины (руководители семинара — академик НАН Украины И.А. Луковский и член-корреспондент НАН Украины В.Л. Макаров, Киев, 2008 г.) и семинаре по общей механике в Институте

прикладной математики и механики НАН Украины (руководитель семинара – член-корреспондент НАН Украины А.М. Ковалев, Донецк, 2008 г.)

Публикации. Основные результаты диссертации опубликованы в виде статей [4]-[24] в ведущих специализированных научных журналах и сборниках. Результаты диссертационной работы дополнительно освещены в публикациях [25]-[41].

1 Обзор литературы и методика исследований

В данном разделе приведен обзор литературных источников, которые имеют непосредственное отношение к тематике диссертационной работы. Из большого числа публикаций, посвященных вопросам динамики управляемых упругих механических систем, прежде всего отобраны работы, в которых упругие элементы описываются с помощью математических моделей колебаний тонких стержней с бесконечным числом степеней свободы. Изложены основные положения методики представления решений уравнений движения механических систем с распределенными параметрами в терминах полугрупп операторов в бесконечномерных пространствах.

1.1 Моделирование и устойчивость движения механических систем с упругими элементами

Исследование колебаний упругих тел восходит к работам Даниила Бернулли (1700 – 1782) и Леонарда Эйлера (1707 – 1783). По имеющимся сведениям [1, с. 597], [42, с. 277], Даниил Бернулли в своем письме к Леонарду Эйлеру в 1742 году сообщил, что задача об изгибе упругих пластин или стержней (*lamina*) может быть решена методом максимумов и минимумов. В знаменитом трактате Эйлера “Метод нахождения кривых линий, обладающих свойствами максимума или минимума”, который был впервые опубликован в 1744 году, приведено линейное дифференциальное уравнение четвертого порядка, описывающее колебательное движение упругой

пластинки [1, с. 527]. Эйлер исследовал интегральные кривые этого уравнения при различных краевых условиях. Подобное уравнение описывает поперечные колебания призматического стержня в плоскости, которая является плоскостью симметрии для его поперечных сечений (см. [3, с. 372]):

$$\rho F \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left(EI \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \right) = 0. \quad (1.1)$$

Здесь $y = y(x, t)$ обозначает поперечное перемещение малого элемента стержня, расположенного на расстоянии x от его левого конца, t – время, ρ – плотность материала, F – площадь поперечного сечения, E – модуль Юнга, I – момент инерции сечения, EI – жесткость при изгибе. Уравнение (1.1) называется общим уравнением поперечных свободных колебаний стержней [3, с. 373] или уравнением балки Эйлера – Бернулли [43, с. 60], [105, с. 1142]. Нелинейная теория упругих стержней была разработана работами Г. Кирхгофа (1824 – 1887) [44] и других ученых.

К одной из ранних публикаций, посвященных исследованию решений уравнения колебаний балки Эйлера – Бернулли вида (1.1) с переменными коэффициентами, относится работа Н.М. Крылова [45]. При достаточно общих предположениях относительно коэффициентов уравнения и граничных условий доказано [45, с. 55, 85], что собственные функции задачи о колебаниях балки Эйлера – Бернулли образуют полную систему функций в $L_2(0, l)$ (т.е. в пространстве измеримых функций, суммируемых с квадратом на промежутке $[0, l]$ [46, с. 27]). Этот результат использован для обоснования представления решений уравнений вынужденных колебаний балки Эйлера – Бернулли в виде рядов по собственным функциям, соответствующим свободным колебаниям [45, С. 63–69].

В модели Эйлера – Бернулли предполагается, что размеры поперечных сечений малы по сравнению с длиной стержня. Уточненная модель поперечных колебаний призматических стержней была предложена С.П. Тимошенко в 1921 году (см. [2, С. 56–57]). Если ввести в рассмотрение угол поворота сечения $\psi = \psi(x, t)$, то колебания балки Тимошенко описываются

следующей системой дифференциальных уравнений в частных производных [3, с. 389]:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - kG \left(\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \right) &= 0, \\ \rho I \frac{\partial^2 \psi}{\partial t^2} - kFG \left(\frac{\partial y}{\partial x} - \psi \right) - EI \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} &= 0. \end{aligned} \quad (1.2)$$

В уравнениях (1.2) коэффициент k зависит от формы поперечного сечения балки, G – модуль сдвига. Для балки Тимошенко угол наклона кривой прогибов представим в виде суммы угла ψ и угла поперечного сдвига. Таким образом, модель балки Тимошенко учитывает инерцию вращения и прогибы, обусловленные поперечным сдвигом. Как отмечено в монографии [3, с. 387], такая уточненная модель имеет важное значение при исследовании форм колебаний с высокими частотами, когда колеблющийся стержень разделяется узловыми поперечными сечениями на сравнительно короткие отрезки.

Обширное исследование колебательных движений валов содержится в монографии Ф.М. Диментберга [47] для математических моделей, в которых элементы изгиба вала определяются в сочетании с вращением.

В монографии А.И. Лурье [48, С. 474–482] описан способ вывода уравнений движения механической системы, состоящей из несущего абсолютно твердого тела и материальных точек (носимых тел), положение которых относительно несущего тела может быть задано конечным числом обобщенных координат. Предполагается, что носимыми телами являются частицы упругого тела, совершающие малые движения около тех положений, которые они занимали бы в абсолютно твердом теле. В полученных уравнениях движения сохраняются лишь линейные члены относительно упругих обобщенных координат. Такой подход применен к исследованию колебаний вращающегося упругого нерастяжимого стержня, который одним из своих концов заделан во вращающееся с постоянной угловой скоростью колесо [48, С. 482–488]. Другой конец стержня (лопатки турбины) предполагается свободным. При выводе уравнений движения относительные переме-

щения точек стержня представлены в виде конечной суммы по собственным формам колебаний балки Эйлера – Бернулли с жестко заделанным концом. Приведена система обыкновенных дифференциальных уравнений, которая описывает тангенциальные и аксиальные колебания стержня. С помощью вариационного принципа Гамильтона – Остроградского получены также полные уравнения движения рассматриваемой модели в виде системы двух дифференциальных уравнений с частными производными четвертого порядка и соответствующие краевые условия [48, С. 680–683].

В работах В.Н. Рубановского и В.В. Румянцева [49], [50, С. 80–83] рассмотрена механическая система в виде твердого тела с тонким прямолинейным стержнем и полостью, целиком заполненной жидкостью. Предполагается, что стержень одним концом заземлен в теле и в недеформированном состоянии направлен по главной оси инерции тела. Твердое тело совершает движение вокруг неподвижной точки в однородном поле силы тяжести. Исследована задача об устойчивости равномерных вращений системы как твердого тела вокруг оси, совпадающей с вертикалью. При решении задачи об устойчивости движения в такой постановке введены интегральные характеристики движения сплошной среды и применена теорема В.В. Румянцева [50, с. 75], [51] об устойчивости по отношению к конечному числу (части) переменных.

В.Н. Рубановский также исследовал задачу об устойчивости равномерных вращений твердого тела, к которому прикреплены два прямолинейных упругих стержня [50, С. 98–100], [53]. Достаточные условия устойчивости получены из условия минимума функционала измененной потенциальной энергии с помощью анализа его второй вариации.

В обзоре В.Н. Рубановского [50] приведены некоторые постановки задач об устойчивости сложных механических систем. Отмечено [50, с. 69], что в общем случае методы исследования устойчивости конечномерных систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, непосредственно неприменимы для систем с распределенными параметра-

ми, и более предпочтительным является изучение исходных нелинейных уравнений возмущенного движения методами функционального анализа или на основе прямого метода Ляпунова [50, с. 71].

В обзорной работе Л.В. Докучаева [54] перечислены подходы к составлению уравнений движения тела с упругими элементами, а также приведены результаты об устойчивости и стабилизации движения моделей упругих космических аппаратов. Модель балки Эйлера – Бернулли использована в монографии Л.В. Докучаева [43, С. 56–106] для исследования устойчивости ротационного движения неуправляемого летательного аппарата (ЛА) с упругими элементами. В цитируемой работе получены линеаризованные уравнения возмущенного движения для модели вращающегося ЛА с упругими штангами, расположенными вдоль главных осей инерции. Указанные уравнения содержат обобщенные координаты в виде коэффициентов разложения упругих перемещений по собственным формам поперечных изгибных колебаний балки. Отметим, что в системе уравнений движения не выписаны уравнения для обобщенных координат симметричных тонов упругих колебаний, так как предполагается [43, с. 66], что при ненулевых значениях этих координат происходят малые смещения центра масс всей системы относительно корпуса ЛА, и что такие смещения со временем затухают под действием диссипативных сил. Для такой системы записано характеристическое уравнение и исследованы условия устойчивости по линейному приближению с учетом только основного тона упругих колебаний стержней в плоскости. В монографии Л.В. Докучаева также построены области устойчивости равномерных вращений по линейному приближению для модели ЛА с наклонными штангами.

Вопросы моделирования динамики упругих объектов с помощью систем связанных твердых тел исследованы в монографии А.Я. Савченко, И.А. Болграбской, Г.А. Кононыхина [55]. Установлено [55, С. 33–38], что уравнения движения несвободной системы одинаковых твердых тел, связанных упругими цилиндрическими шарнирами, могут быть использова-

ны для приближенного описания малых колебаний упругого стержня постоянного поперечного сечения. Уравнения движения системы связанных твердых тел достаточно общего вида были получены в работе П.В. Харламова [56].

В монографии А.А. Илюхина [57] приведены нелинейные дифференциальные уравнения, описывающие деформацию оси упругого стержня при различных концевых нагрузках. Для решения уравнений равновесия упругого стержня использована аналогия Кирхгофа между задачей о деформации упругого стержня и задачей о движении твердого тела, имеющего неподвижную точку. С помощью этого подхода получен ряд точных и приближенных решений задач теории тонких упругих стержней и проведена классификация форм равновесия.

В статье J. Baillieul и M. Levi [58] получены уравнения пространственного движения твердого тела с присоединенной упругой балкой Эйлера – Бернулли при наличии демпфирования. Отдельно рассмотрена модельная задача о вращении диска с балкой относительно неподвижной оси. Предполагается, что балка имеет один жестко защемленный конец, и в недеформированном состоянии центральная линия балки направлена по оси вращения системы. Показано, что рассматриваемая механическая система имеет стационарные движения лишь для дискретного множества значений угловой скорости. Для произвольного фиксированного кинетического момента системы установлено, что угловая скорость диска стремится к одному из своих стационарных значений при $t \rightarrow \infty$.

В работе J. Baillieul и M. Levi [59] исследованы уравнения плоского движения при отсутствии внешних сил для механической системы, состоящей из твердого тела и балки Эйлера – Бернулли с жестко защемленным концом. Получены соотношения, которые определяют относительное равновесия системы в предположении, что центр масс твердого тела лежит на оси балки в недеформированном состоянии. При таком предположении выведены линеаризованные уравнения возмущенного движения в окрест-

ности относительного равновесия, соответствующего вращению твердого тела с постоянной угловой скоростью при недеформированном состоянии балки. В рассматриваемом случае линеаризованная динамика описывается уравнением в частных производных относительно перемещений балки. Отмечено, что в общем случае динамические уравнения вращающейся нерастяжимой балки могут быть интегро-дифференциальными.

В монографии М.К. Набиуллина [60] изложена методика вывода дифференциальных уравнений движения космического аппарата (КА) с деформируемыми элементами на основе использования вариационного принципа Гамильтона – Остроградского. В начальных главах этой монографии приведены обобщения теорем об изменении механической энергии системы, из которых, как следствие, найдены первые интегралы уравнений движения.

В четвертой главе работы М.К. Набиуллина рассмотрена механическая система в виде спутника-гиростата и трех пар деформируемых вязкоупругих стержней [60, С. 151–165]. Предполагается, что стержни консольно заземлены в корпусе гиростата и расположены симметрично относительно центра масс системы абсолютно твердых тел. На свободных концах стержней установлены сосредоточенные грузы, рассматриваемые как материальные точки. Движение точек стержней рассматриваемой системы задаются уравнениями с частными производными второго порядка по времени и четвертого порядка по пространственной координате. Число этих уравнений равно 18. Найдены условия существования частного решения уравнений движения, соответствующего стационарному движению спутника. Для исследования устойчивости найденного решения использован функционал Ляпунова в виде интеграла типа Якоби. Получены достаточные условия устойчивости в виде неравенств на параметры механической системы.

Статья В.А. Троценко и Ю.В. Троценко [61] посвящена математическому моделированию и решению задачи о свободных неосесимметричных колебаниях круговой цилиндрической оболочки, к одному из торцов которой присоединено твердое тело. Построены приближенные решения соот-

ветствующей вариационной задачи с помощью применения метода Ритца. Для относительно длинных оболочек рассмотрена упрощенная задача, в которой оболочка моделируется с помощью однородной балки Тимошенко. С помощью метода разделения переменных получено общее решение соответствующего линейного однородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами, которое определяет собственные формы колебаний. Для случая жестко закрепленного конца балки и присоединенного твердого тела на другом конце записана система алгебраических уравнений относительно постоянных интегрирования. Для определения собственных частот колебаний проведено численное исследование указанной системы. Отмечено, что наличие прикрепленного твердого тела на одном из торцов оболочки может привести к появлению в системе достаточно низких частот. Проведено сопоставление результатов вычислений первых четырех частот изгибных колебаний оболочки и тела для различных моделей: технической теории оболочек; с использованием балочной теории Тимошенко; по балочной теории с учетом только деформаций сдвига; с учетом только инерции поворота поперечного сечения; по балочной теории Эйлера – Бернулли. По результатам вычислений авторами сделан вывод о том, что при выбранной массе тела элементарная теория балок дает хорошие результаты при вычислении первой частоты только для длинных оболочек, а включение деформаций сдвига и инерции вращения в уравнения балочной теории существенно улучшает точность аппроксимации оболочки балкой. Приближенный анализ частот собственных колебаний свободно опертой балки Тимошенко проведен в монографии [3, с. 389]. При частном значении параметров балки Тимошенко со свободным концом, в статье W. Krabs и Г.М. Склера [62] получены оценки собственных значений λ_n задачи Штурма – Лиувилля в зависимости от номера n . Из результатов работы В. Geist и J.R. McLaughlin [63] следует, что при более общих предположениях относительно механических параметров могут возникать кратные собственные значения. Достаточно полный анализ собственных значений для модели

С.П. Тимошенко при наличии демпфирующей силы и момента на конце балки проведен в работе G.Q. Xu и S.P. Yung [64].

В статье K. Gosh и P.M. Pinsky [65] предложена модификация метода конечных элементов для моделирования колебаний балки Тимошенко в окрестности положения равновесия. В цитируемой работе использована линейная интерполяция для описания перемещений балки между узлами. В качестве иллюстрации приведены результаты вычислений для случая свободно опертой стальной балки прямоугольного сечения.

К современному направлению исследований в области механики систем с деформируемыми элементами относятся задачи динамики космических тросовых систем. Описание принципиальных схем и математических моделей тросовых систем приведено в работе А.П. Алпатова, В.В. Белецкого, В.И. Драновского, А.Е. Закржевского, А.В. Пироженко, Г. Трогера и В.С. Хорошилова [66]. Типичная схема космической тросовой системы состоит из относительно большого ведущего КА и объекта меньших размеров – субспутника, который соединен с ведущим КА посредством достаточно длинного троса. В монографии Д.В. Лебедева и А.И. Ткаченко [67, С. 167–191] решена задача наблюдаемости для модели космической тросовой системы по информации о местоположении ведущего КА и показаниям динамометра, который измеряет абсолютное значение силы натяжения троса.

В статье Ю.Н. Кононова [68] исследована модель упругой механической системы в виде вращающегося твердого тела с n подвижными точечными массами (линейными осцилляторами). Показано, что относительные движения точечных масс вдоль оси симметрии гироскопа не влияют на устойчивость движения последнего. Исследован спектр колебаний системы в зависимости от направления осей движения точечных масс.

Для исследования устойчивости стационарных движений спутников с упругими элементами в монографии М.К. Набиуллина [60] и ряде других публикаций (см. [69]) использованы теоремы прямого метода Ляпунова,

которые были получены А.А. Мовчаном [70] при исследовании устойчивости решений систем с распределенными параметрами по двум метрикам. К одной из первых работ в этой области относится монография В.И. Зубова [71], в которой теоремы А.М. Ляпунова были распространены на задачи устойчивости решений дифференциальных уравнений с частными производными.

Дальнейшее обобщение теорем прямого метода Ляпунова для систем с распределенными параметрами в абстрактных пространствах было проведено в работах В.М. Матросова, Л.Ю. Анапольского и С.Н. Васильева [72], А.А. Мартынюка [73], Т.К. Сиразетдинова [74], А.А. Шестакова [75], V. Lakshmikantham, S. Leela [76] и других ученых.

В монографии А.А. Мартынюка рассмотрены задачи практической устойчивости системы процессов по двум векторным мерам [73, С. 221–237]. Доказаны теоремы об устойчивости, неустойчивости, асимптотической устойчивости и устойчивости при постоянно действующих возмущениях для такого класса систем. С помощью этих результатов доказана практическая устойчивость при постоянно действующих возмущениях для процесса, описываемого уравнением колебания струны с учетом сил сопротивления.

Монография А.А. Шестакова [75] посвящена развитию прямого метода Ляпунова для задач локализации предельных множеств динамических процессов с распределенными параметрами. Приведены обобщения теоремы ЛаСалля о локализации предельного множества (принципа инвариантности [77, С. 75–76], [78]) для классов абстрактных динамических систем с запаздыванием, систем на пространствах Фреше (пространствах сходимости), эволюционных уравнений в банаховых пространствах. В качестве приложения, с помощью обобщенного прямого метода Ляпунова исследованы асимптотические свойства решений экологической задачи межвидового взаимодействия с диффузией.

В работе А.О. Игнатьева [79] исследованы задачи устойчивости для

класса бесконечномерных динамических систем, которые описываются функционально - дифференциальными уравнениями. С помощью прямого метода Ляпунова получены условия эквивалентности устойчивости по части переменных тривиального решения функционально - дифференциального уравнения с конечным запаздыванием. Статья А.О. Игнатьева [80] посвящена развитию методов теории устойчивости с использованием знакопостоянных (не обязательно знакоопределенных) функций Ляпунова. Для периодической по времени нелинейной системы доказаны теоремы о равномерной асимптотической устойчивости невозмущенного решения.

1.2 Управляемость и стабилизация моделей упругих систем

В современной теории управления системами с распределенными параметрами важное место занимают задачи стабилизации движения упругих механических объектов [81]-[84]. Прикладной интерес к этой проблематике вызван необходимостью синтеза законов управления для космических систем с деформируемыми элементами [69], а также для роботоманипуляторов с гибкими звеньями [85, 86].

В монографии А.Г. Бутковского [81] изложены методы управления системами с распределенными параметрами, движение которых описывается дифференциальными уравнениями в частных производных, интегральными уравнениями, а также функциональными уравнениями. В частности, рассмотрена задача о гашении колебаний однородной упругой балки Эйлера – Бернулли [81, С. 330–331]. Предполагается, что один конец балки свободно оперт, и возможно управлять отклонением другого конца балки. Методом моментов доказано, что колебания стержня, инициированные начальными условиями, могут быть погашены за сколь угодно малое время с помощью программного управления.

В монографии Ф.Л. Черноусько, Н.Н. Болотника, В.Г. Градецкого [85] исследован ряд задач управления движением манипуляционных роботов и приведены результаты экспериментальных исследований. В частности,

рассмотрена математическая модель манипуляционного робота со звеном в виде тонкого однородного прямолинейного стержня [85, С. 208–229]. Через один из концов стержня проходит неподвижная ось вращения, т.е. ось цилиндрического шарнира, посредством которого стержень связан с неподвижным основанием. На другом конце стержня расположен груз, который считается материальной точкой. Относительно оси вращения действует управляющий момент M . Действие внешних сил, кроме реакции в оси вращения, не учитывается. Динамика такой механической системы описывается неоднородным уравнением колебаний балки Эйлера – Бернулли, правая часть которого зависит от производных угла поворота цилиндрического шарнира. Методом разделения переменных записано решение однородного дифференциального уравнения Эйлера – Бернулли вида (1.1) для балки со свободным концом. Предложено кусочно-гладкое управление $M(t)$, которое обеспечивает приближенное решение задачи управления поворотом стержня с гашением упругих колебаний. Отмечается [85, с. 214], что по окончании процесса управления движение системы будет представлять малые колебания в окрестности целевого состояния, спектр которых не содержит основного тона, отвечающего минимальному собственному значению λ_1 задачи о колебаниях балки.

Методы теории оптимального управления и классического вариационного исчисления изложены в книге Т.К. Сиразетдинова [87] для систем с распределенными параметрами. Исследован ряд задач оптимального управления в области авиационной техники: управление пограничным слоем, упругими летательными аппаратами, твердыми телами, неполностью заполненными жидкостью. Рассмотрена модель летательного аппарата в виде тонкого удлиненного упругого тела, которое совершает движение в вертикальной плоскости [87, С. 311–335]. Колебания оси летательного аппарата описываются с помощью уравнений балки Эйлера – Бернулли переменного сечения под действием веса и аэродинамических сил. Рассмотрено управление в виде распределенной силы, приложенной по всей длине балки.

Решена задача минимизации квадратичного по состоянию и управлению системы функционала для конечного промежутка времени. Отмечено, что поскольку оптимальное управление распределено по всей оси летательного аппарата, то реализовать заданный закон распределения усилий затруднительно. Поэтому приведена формула и для случая регулятора, в котором управляющее усилие распределяется по части оси летательного аппарата.

В монографии Г.Л. Дегтярева и Т.К. Сиразетдинова [69] изучены вопросы математического моделирования и синтеза управления упругими космическими аппаратами, которые рассматриваются как объекты с распределенными параметрами. В качестве одной из моделей космического аппарата рассмотрена механическая система в виде твердого тела с двумя упругими стержнями, заделанными консольно [69, с. 9], [88]. Для такой механической системы с помощью вариационного принципа Гамильтона – Остроградского выведены дифференциальные уравнения движения с частными производными вида Эйлера – Бернулли. Поскольку на вращательное движение аппарата оказывают влияние только антисимметричные колебания стержней, то в дальнейшем рассмотрено движение такой системы с одним стержнем. В работе [69] предложены решения задач оптимального управления для моделей подобных систем, в том числе и в стохастической постановке.

Работа В.И. Гуляева [89] содержит обзор результатов в области динамики механизмов со стержневыми звеньями. В частности, рассмотрена задача о динамике двухзвенного механизма с упруго податливыми стержневыми звеньями под действием внешнего момента, приложенного к одному из звеньев. Структурная схема рассматриваемого механизма представляет собой замкнутую кинематическую цепь. С помощью теории балок Эйлера–Бернулли записаны дифференциальные уравнения с частными производными, описывающие динамическое равновесие стержней. Для интегрирования построенной системы разрешающих уравнений используется неявная разностная схема, в соответствии с которой производные от неизвест-

ных функций по времени заменяются конечными разностями. В результате математическая модель рассматриваемого механизма сведена к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Для проверки эффективности предложенного метода решена также задача о динамике эквивалентного кривошипно-шатунного механизма с абсолютно жесткими звеньями как системы с одной степенью свободы. Приведены диаграммы вычислений углов поворота звеньев системы при воздействии управляющего момента в виде синусоидальной функции времени. Отмечено, что учет упругой податливости звеньев приводит к заметному увеличению генерируемых в них внутренних сил. В работах [89, 90] также исследована модель промышленного робота-манипулятора, состоящего из несущей платформы, на которой установлен двухзвенный манипулятор и несомый груз. В статье [90] получены уравнения пространственного движения многозвенника, описываемого моделями Эйлера – Бернулли и Тимошенко. Предполагается, что платформа и груз являются абсолютно твердыми телами, а звенья манипулятора – прямолинейными упругими стержнями. Звенья соединены между собой и платформой с помощью идеальных цилиндрических шарниров. Движение рассматриваемой механической системы описывается системой обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений с частными производными. Приведены результаты приближенного интегрирования такой системы уравнений гибридного типа с использованием разностной схемы. Подчеркивается, что учет упругой податливости звеньев приводит к заметному изменению функций моментов по сравнению с моделью манипулятора с абсолютно жесткими звеньями.

В статье Т.В. Завражиной [91] рассмотрена модель портального робота, состоящего из двух абсолютно твердых тел (каретки и транспортируемого груза), которые связаны между собой с помощью двухзвенного манипуляционного механизма в виде балок Эйлера – Бернулли. Движение рассматриваемой модели задается с помощью гибридной системы в виде двух обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка

и восьми дифференциальных уравнений в частных производных с соответствующими граничными условиями. Приведены результаты численного интегрирования уравнений движения с использованием разностной схемы Хуболта.

Статья О. Sawodny, S. Lambeck и А. Hildebrandt [92] посвящена математическому моделированию и управлению движением телескопической пожарной лестницы IVECO Magirus. При длине выдвижения такой лестницы около 25 – 30 м возникают значительные колебания ее концевой части вследствие упругости конструкции. Поэтому необходима разработка алгоритма управления, обеспечивающего гашение колебаний. При составлении математической модели упругая лестница представлена в виде кинематической цепи, образованной соединением твердых тел-звеньев между собой с помощью шарниров при дополнительно введенных в эти шарниры пружинах, оказывающих упругое сопротивление относительно повороту звеньев [93, С. 302–303]. Для модели пожарной лестницы в виде системы твердых тел разработан алгоритм стабилизации положения равновесия [92]. Как отмечено авторами работы [92], используемый ими подход уменьшает амплитуду низкочастотных колебаний лестницы, но не решает задачу стабилизации реальной системы полностью из-за упрощенной динамической модели. Поэтому необходимо дальнейшее исследование подобных упругих манипуляторов с использованием методов теории управления систем с распределенными параметрами.

Следует отметить, что схема телескопического многозвенного манипулятора вида [92] была рассмотрена В.Б. Лариным [94] для случая двух абсолютно твердых звеньев. В работе [94] предложено решение задач параметризации программной траектории и синтеза адаптивного управления для манипуляторов в виде систем твердых тел. Модульный подход к разработке алгоритмов адаптивного управления движением манипуляционных роботов с конечным числом степеней свободы описан в статье [95] Н.Ф. Кириченко и др.

Статьи G. Chen с соавторами [96, 97] посвящены исследованию экспоненциальной устойчивости тривиального решения линейного однородного дифференциального уравнения, описывающего колебания балки Эйлера – Бернулли с учетом диссипации энергии на конце балки. Как отмечено авторами этих работ, рассматриваемая краевая задача используется в упрощенной математической модели космического аппарата с гибкой штангой в программе NASA по управлению гибкими структурами (Control of Flexible Structures Program). При этом штанга длиной 60 метров представляется в виде однородной балки, которая одним из своих концов жестко заделана в корпусе несущего космического аппарата (space shuttle), а к другому концу балки прикладывается управляющий момент, создаваемый гироскопической системой управления в зависимости от информации датчиков. В работе [96] доказано экспоненциальное убывание энергии для модели с граничными условиями в виде линейной зависимости поперечной силы от производной по времени величины поперечного перемещения конца балки. При отсутствии поперечной силы на конце балки в работе [97] доказано свойство экспоненциального затухания колебаний балки, если изгибающий момент пропорционален угловой скорости элемента балки на незащемленном конце. В цитируемой работе использована теорема F.L. Huang [98], которая сводит доказательство экспоненциальной устойчивости системы в гильбертовом пространстве к оценке нормы резольвенты порождающего оператора (инфинитезимального генератора) уравнения. Следует отметить, что в бесконечномерном случае экспоненциальная устойчивость не следует из факта отрицательности верхней грани вещественных частей точек спектра порождающего оператора [97, с. 70]. В статье [97] также приведено схематическое изображение конструкции различных демпферов на конце балки, которые обеспечивают выполнение свойства экспоненциальной устойчивости рассматриваемой модели.

В статье F.L. Huang [99] исследована модель упругой системы с демпфированием в виде линейного дифференциального уравнения в гильбер-

товом пространстве. Получено описание спектральных свойств системы и доказана экспоненциальная устойчивость.

Монография J. Oostveen [84] посвящена задаче стабилизации линейных управляемых систем в гильбертовом пространстве. Отмечается [84, С. 2–3], что в бесконечномерном случае понятия экспоненциальной, сильной и слабой асимптотической устойчивости линейных систем не эквивалентны, к тому же отсутствуют простые способы описания сильной устойчивости в терминах спектральных свойств порождающего оператора дифференциального уравнения. Поэтому большая часть работы [84] сосредоточена на развитии теоретических методов решения задач сильной устойчивости и сильной стабилизации управляемых систем, т.е. устойчивости и стабилизации тривиального решения по норме в гильбертовом пространстве. Для исследования таких задач использован обобщенный прямой метод Ляпунова и концепция пассивных систем управления. В качестве представления пассивных систем рассмотрены управляемые системы с линейным выходом, которые удовлетворяют свойству коллокации (collocation) [84, с. 15]. Физическая интерпретация этого свойства сводится к тому, что исполнительное устройство и датчик системы управления действуют в одной и той же точке упругой среды. В работе [84] доказана эквивалентность свойств сильной устойчивости и устойчивости от входа к выходу для стабилизируемых и детектируемых систем. Для синтеза управлений с обратной связью использована связь между задачей сильной стабилизации и задачей оптимального управления с квадратичным критерием качества [84, с. 26], исследованы свойства решений соответствующего уравнения Риккати. В качестве примера рассмотрена задача стабилизации поперечных колебаний однородной балки Эйлера – Бернулли, которая одним концом жестко заделана, а на другом конце расположена точечная масса [84, С. 115–117]. При этом управление и измерение состояния системы осуществляются на незакрепленном конце балки. В цитируемой работе [84, С. 129–135] рассмотрена также модель гибридной системы в виде твердого тела с упру-

гими элементами, колебания которых описываются бесконечным числом модальных координат. Для случая нескольких независимых управляющих сил и управляющих моментов при выполнении свойства коллокации получены достаточные условия сильной стабилизируемости рассмотренной линейной системы.

В статье G. Leugering [100] рассмотрена плоская механическая система в виде вращающегося твердого тела, к которому прикреплена балка Эйлера – Бернулли со свободным концом. Исследованы задачи управляемости и стабилизации медленного вращения модели, которые описываются системой линейных дифференциальных уравнения с управляющим параметром в виде момента сил, приложенных к телу. Доказана точная управляемость системы на некотором линейном многообразии гильбертова пространства.

Одним из наиболее эффективных подходов при решении задачи стабилизации плоского вращения механических систем с балками Эйлера – Бернулли является прямой метод Ляпунова. В монографии и статьях Z.-H. Luo, B.-Z. Guo, Ö. Morgül [83, 101, 102] построены функционалы Ляпунова в явном виде для нелинейных систем дифференциальных уравнений, описывающих управляемые колебания балки Эйлера – Бернулли. В цитируемых работах также найдены функционалы управления с обратной связью, которые решают задачи сильной стабилизации.

В статье C.Z. Xu и J. Baillieul [103] для механической системы в виде твердого тела с присоединенной упругой балкой Эйлера – Бернулли со свободным концом доказана стабилизируемость по угловой скорости (без учета ориентации) при наличии диссипации. В качестве управления использован момент силы, приложенный к твердому телу. Аналогичная задача решена в работе J.-M. Coron и B. d'Andréa-Novel [104] для недиссипативного случая. При этом отмечено, что отсутствие диссипации усложняет анализ асимптотической устойчивости.

Вопрос об управляемости механических систем с упругими балками Эйлера – Бернулли достаточно подробно исследован в обзоре J.E. Lagnese,

G. Leugering [105] и работе J. Rudolph [106]. Несмотря на прогресс в качественной теории таких систем, вопрос об эффективном синтезе функций управления, обеспечивающих движение с заданными свойствами, требует дальнейшего исследования. В работе [106] предложен способ управления балкой Эйлера – Бернулли с заземленным концом в рамках теории плоских (flat) систем с бесконечным числом степеней свободы.

В монографии I. Lasiecka и R. Triggiani [107, С. 1019–1041] исследована задача оптимального управления с квадратичным функционалом качества для линейного однородного уравнения Эйлера – Бернулли на конечном промежутке времени. Управление в виде внешней силы приложено на границе рассматриваемой области. Доказана единственность оптимального управления и регулярность соответствующих оптимальных траекторий, а также получено представление оптимального управления через решение дифференциального уравнения Риккати. В такой постановке, как и в классической задаче о линейном регуляторе (см. [108, с. 364]), отсутствуют ограничения на состояние системы в конечный момент времени.

Следует отметить, что во всех перечисленных выше публикациях при исследовании задач управляемости и сильной стабилизации для моделей Эйлера – Бернулли в бесконечномерных пространствах рассмотрены только балки со свободным концом или точечной массой на конце. Такие модели обладают следующим асимптотическим распределением собственных значений $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n, \dots$, задачи Штурма – Лиувилля: λ_n растет пропорционально n^4 с ростом индекса n [83, с. 176]. Это означает, что собственные частоты упругих колебаний $\omega_n = \sqrt{\lambda_n}$ приближенно распределены как n^2 при $n \rightarrow \infty$.

Для описания движения роботов-манипуляторов с упругими звеньями широко используется модель балки Тимошенко, которая учитывает инерцию вращения и прогибы, обусловленные поперечным сдвигом. Вопросы управляемости и стабилизации балки Тимошенко исследовались в работах [62], [83, гл. 5.1.2], [109]–[113] методами теории управления в бесконеч-

номерных пространствах. Во всех этих работах один из концов балки предполагается свободным. Для такой модели собственные частоты колебаний ω_n допускают линейную по n оценку [62]. В статье D.-H. Shi, S.H. Hou и D.-X. Feng [114] доказана стабилизируемость модели балки Тимошенко в случае управления, приложенного к точечной массе на конце балки.

В работе W. Krabs и Г.М. Склера [111] решена задача стабилизации линейной модели вращающейся балки Тимошенко с помощью вспомогательного преобразования управления и эквивалентной перенормировки фазового пространства, позволяющей использовать теорему 5 из статьи В.И. Кобова и Г.М. Склера [115].

Монография Л.Н. Знаменской [116] содержит результаты по управлению упругими колебаниями систем, описываемых одномерным волновым уравнением с линейными граничными условиями различного типа. Даны представления классических решений задач управления, основанные на методе Даламбера и методе Фурье. В цитируемой работе [116, С. 55–64] решена задача о гашении колебаний за конечное время для консольно заземленной балки Эйлера – Бернулли с помощью управления, приложенного на конце балки. Искомое управление зависит от времени и представлено явным образом в виде ряда Фурье.

В монографии М.З. Згуровского и В.С. Мельника [117] развиваются методы нелинейного анализа для решения задач оптимального управления системами с распределенными параметрами. Исследованы свойства решений дифференциально-операторных уравнений, получены условия разрешимости задач оптимального управления и синтеза притягивающих множеств. Рассмотрены математические постановки задач управления теплообменными и диффузионными процессами.

1.3 Представление решений дифференциальных уравнений с помощью полугрупп операторов

Для корректного описания движения механических систем с распределенными параметрами на бесконечном промежутке времени $t \geq 0$ необходимо использование соответствующего математического аппарата для представления решений уравнений с частными производными или бесконечных систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Эффективный подход в этой области связан с использованием теории непрерывных полугрупп операторов в банаховых пространствах. Такой подход позволяет доказывать существование и корректность решений задачи Коши с помощью проверки свойства диссипативности соответствующего порождающего оператора в дифференциальном уравнении или путем оценки нормы его резольвенты.

В монографии Ю.Л. Далецкого и М.Г. Крейна [118] исследованы вопросы устойчивости решений линейных и квазилинейных дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. Предполагается [118, С. 104, 141, 402], что оператор в линейной части соответствующего дифференциального уравнения является *ограниченным*. При таком предположении доказаны теоремы об устойчивости и неустойчивости по линейному приближению в банаховом пространстве [118, с. 403, 408, 410, 414, 415]. Однако, поскольку движение ряда механических систем с распределенными параметрами описывается уравнениями с частными производными, то представление таких уравнений в бесконечномерных пространствах связано с использованием *неограниченных* операторов дифференцирования (см. [75, с. 22], [84, с. 116], [119, с. 166]). Это означает, что результаты монографии [118] и ряда других работ, в которых предполагается ограниченность порождающего оператора, непосредственно неприменимы при исследовании моделей механических систем с упругими элементами. Известно [46, с. 274], что если для линейного уравнения с ограниченным оператором вопросы существования,

единственности и непрерывной зависимости решения задачи Коши всегда решались положительно, то для уравнения с неограниченным оператором перечисленные вопросы становятся центральными.

Излагаемые ниже результаты теории полугрупп линейных операторов содержатся в монографиях К. Иосиды [120, С. 320–347], Э. Хилле и Р. Филлипса [121, С. 369–377, 630–635], С.Г. Крейна [122], А.В. Балакришнана [123, С. 207–264], Т. Като [124, С. 592–616], Н.О. Fattorini [82, С. 192–203], А. Pazy [125].

Основы теории нелинейных полугрупп в банаховых пространствах изложены в работах V. Barbu [126], [127, С. 229–255], Z.-H. Luo, B.-Z. Guo, O. Morgul [83, С. 92–107] и др.

1.3.1 Сильно непрерывные полугруппы линейных операторов

Пусть E – банахово пространство с нормой $\|\cdot\|$. Предположим, что задан линейный оператор $A : D(A) \rightarrow E$, имеющий всюду плотную в E область определения $D(A)$. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{dx(t)}{dt} = Ax(t) \quad (1.3)$$

относительно функции $x(t) \in E$, зависящей от аргумента $t \in \mathcal{I}$, где множество \mathcal{I} может быть следующего вида: отрезок $[0, T]$, ограниченный полуинтервал $[0, T)$, или полуось $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$.

Определение 1.1. [122, с. 38] *Решением уравнения (1.3) на промежутке \mathcal{I} называется функция $x : \mathcal{I} \rightarrow E$, удовлетворяющая условиям:*

- 1) $x(t) \in D(A)$ при всех $t \in \mathcal{I}$;
- 2) в каждой точке $t \in \mathcal{I}$ существует сильная производная $\frac{d}{dt}x(t)$ функции $x(t)$;
- 3) уравнение (1.3) удовлетворяется при всех $t \in \mathcal{I}$.

Решения в смысле этого определения будем называть также *классическими решениями* уравнения (1.3). Под *задачей Коши* на промежутке \mathcal{I} будем понимать задачу о нахождении решения уравнения (1.3) на \mathcal{I} , удовлетворяющего начальному условию

$$x(0) = x_0 \in D(A). \quad (1.4)$$

Определение 1.2. [122, с. 38] Задача Коши (1.3), (1.4) *корректна* на промежутке \mathcal{I} , если:

- 1) при любом $x_0 \in D(A)$ существует единственное решение задачи (1.3), (1.4) на \mathcal{I} ;
- 2) из условий $x_n(0) \rightarrow 0$, $x_n(0) \in D(A)$, для соответствующих решений $x_n(t)$ уравнения (1.3) следует

$$x_n(t) \rightarrow 0, \quad \forall t \in \mathcal{I}.$$

Замечание. Из корректности задачи Коши (1.3), (1.4) на каком-либо отрезке $[0, T]$, $T > 0$, следует ее корректность на полуоси \mathbb{R}^+ [122, с. 39].

Если задача Коши (1.3), (1.4) корректна на полуоси \mathbb{R}^+ , то для каждого $t \geq 0$ определен оператор $S(t)$, ставящий в соответствие элементу $x_0 \in D(A)$ значение решения $x(t)$ задачи (1.3), (1.4) в момент времени t :

$$x(t) = S(t)x_0, \quad t \in \mathbb{R}^+. \quad (1.5)$$

Введенный таким образом оператор $S(t) : D(A) \rightarrow D(A)$ аддитивен и однороден вследствие линейности уравнения (1.3) и свойства 1) из определения 1.2. Кроме того, из свойства 2) определения 1.2 следует непрерывность оператора $S(t)$. Так как $D(A)$ плотно в E , то $S(t)$ может быть по непрерывности расширен до линейного ограниченного оператора, определенного на всем пространстве E , который также будем обозначать через $S(t)$.

Таким образом, для всякой корректной задачи Коши (1.3), (1.4) на \mathbb{R}^+ существует однопараметрическое семейство линейных ограниченных операторов $S(t) : E \rightarrow E$, $t \geq 0$, с помощью которых формула (1.5) определяет классические решения задачи Коши при $x_0 \in D(A)$. Для произвольного

$x_0 \in E$ будем называть функцию $x(t) = S(t)x_0$ *обобщенным (mild) решением* уравнения (1.3) на промежутке \mathbb{R}^+ [122, с. 40], [125, с. 105], а операторы $S(t)$ будем называть *разрешающими* [128, с. 25]. Как показано в [122, с. 40], при любом $x_0 \in E$ функция $x(t) = S(t)x_0$ является пределом последовательности (классических) решений уравнения (1.3) на $(0, +\infty)$.

Если условие корректности задачи Коши усилить до свойства равномерной корректности, то обобщенные решения на полуоси \mathbb{R}^+ могут быть представлены в терминах сильно непрерывной полугруппы линейных операторов. Введем необходимые определения.

Определение 1.3. [122, с. 58] Корректная задача Коши (1.3), (1.4) на \mathbb{R}^+ называется *равномерно корректной*, если из условия $x_n(0) \rightarrow 0$ для соответствующих решений уравнения (1.3) следует, что $x_n(t) \rightarrow 0$ равномерно по t на каждом конечном промежутке $[0, T]$.

Определение 1.4. [125, с. 4], [127, с. 18] Однопараметрическое семейство $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ линейных ограниченных операторов $S(t) : E \rightarrow E$ называется *сильно непрерывной полугруппой линейных ограниченных операторов* (или C_0 -полугруппой) в E , если

- (i) $S(0) = I$;
- (ii) $S(t + s) = S(t)S(s)$ для всех $t, s \geq 0$;
- (iii) $\lim_{t \rightarrow +0} S(t)x = x$ для всех $x \in E$.

Здесь и далее I обозначает единичный оператор в пространстве E .

Определение 1.5. [122, с. 50], [125, с. 1] *Инфинитезимальным генератором (производящим оператором) полугруппы операторов $\{S(t)\}_{t \geq 0}$* называется оператор $A : D(A) \rightarrow E$, определенный соотношением

$$Ax = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{S(t)x - x}{t}, \quad x \in D(A), \quad (1.6)$$

где множество $D(A)$ состоит из всех $x \in E$, для которых предел (1.6) существует.

Определение 1.6. [122, с. 27] Оператор $A : D(A) \rightarrow E$ называется *замкнутым*, если из того, что $x_n \rightarrow x$, $x_n \in D(A)$ и $Ax_n \rightarrow y$ при $n \rightarrow \infty$ следует, что $x \in D(A)$ и $y = Ax$.

Утверждение 1.1. [122, с. 59] *Если задача Коши для уравнения (1.3) равномерно корректна на \mathbb{R}^+ , то соответствующее семейство разрешающих операторов $S(t) : E \rightarrow E$, $t \geq 0$, образует C_0 -полугруппу линейных ограниченных операторов в E .*

Утверждение 1.2. [122, с. 64] *Пусть A – замкнутый оператор. Для того, чтобы задача Коши (1.3), (1.4) была равномерно корректной на \mathbb{R}^+ , необходимо и достаточно, чтобы A был инфинитезимальным генератором C_0 -полугруппы линейных ограниченных операторов в E .*

Утверждение 1.3. [125, с. 4] *Пусть $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ – C_0 -полугруппа линейных операторов в E . Тогда существуют константы $\omega \geq 0$ и $M \geq 1$ такие, что*

$$\|S(t)\| \leq Me^{\omega t}, \quad \forall t \geq 0. \quad (1.7)$$

Если $\omega = 0$ в приведенной оценке (1.7), то полугруппа $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ называется *равномерно ограниченной*, если же $\omega = 0$ и $M = 1$, то $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ называется *сжимающей C_0 -полугруппой* [125, с. 8].

Утверждение 1.4. [125, с. 4] *Если $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ – C_0 -полугруппа линейных операторов в E , то для каждого $x \in E$ отображение $t \in \mathbb{R}^+ \mapsto S(t)x \in E$ является непрерывным.*

Согласно приведенному утверждению 1.2, доказательство корректности задачи Коши для $t \geq 0$ сводится к проверке условий, при которых оператор A в правой части дифференциального уравнения (1.3) порождает C_0 -полугруппу. Полное описание таких условий для класса сжимающих C_0 -полугрупп было получено в работах Е. Hille и К. Yosida в 1948 году. Для изложения основного результата напомним, что число $\lambda \in \mathbb{C}$ называется

регулярной точкой оператора A , если уравнение

$$Ax - \lambda x = y \quad (x \in D(A), y \in E)$$

корректно и плотно разрешимо относительно x [46, с. 114]. Совокупность всех регулярных точек называется *резольвентным множеством оператора A* и обозначается $\rho(A)$, дополнение на комплексной плоскости к резольвентному множеству называется *спектром оператора A* и обозначается $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$. Если оператор A замкнут, то $\rho(A)$ состоит из тех и только из тех точек λ , для которых существует ограниченный оператор $(A - \lambda I)^{-1}$, заданный во всем пространстве E . Определенный при $\lambda \in \rho(A)$, оператор $(A - \lambda I)^{-1}$ называется *резольвентой оператора A* .

Утверждение 1.5. (Теорема Хилле – Иосиды [125, с. 8]) *Линейный (неограниченный) оператор $A : D(A) \rightarrow E$ является инфинитезимальным генератором сжимающей C_0 -полугруппы $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ в E тогда и только тогда, когда:*

1. оператор A замкнут и $\overline{D(A)} = E$;
2. резольвентное множество $\rho(A)$ содержит интервал $(0, +\infty)$, и при всех $\lambda > 0$ выполнено неравенство

$$\|(A - \lambda I)^{-1}\| \leq \frac{1}{\lambda}.$$

Это утверждение допускает следующее обобщение на произвольные C_0 -полугруппы.

Утверждение 1.6. [125, с. 20], [122, с. 68] *Линейный (неограниченный) оператор $A : D(A) \rightarrow E$ является инфинитезимальным генератором C_0 -полугруппы $\{S(t)\}$, удовлетворяющей оценке $\|S(t)\| \leq Me^{\omega t}$ в E , тогда и только тогда, когда:*

1. оператор A замкнут и $\overline{D(A)} = E$;

2. резольвентное множество $\rho(A)$ содержит интервал $(\omega, +\infty)$, и при всех $\lambda > \omega$ выполнены неравенства

$$\|(A - \lambda I)^{-n}\| \leq \frac{M}{(\lambda - \omega)^n}, \quad n = 1, 2, \dots$$

Проверка условий теоремы Хилле – Йосиды связана с вычислением нормы резольвенты неограниченного оператора, что доставляет определенные технические трудности в приложениях аппарата теории полугрупп к изучению движения сложных механических систем. Иной подход к описанию инфинитезимальных операторов сжимающих полугрупп связан с использованием свойства диссипативности оператора A .

Для изложения этого подхода рассмотрим линейное дифференциальное уравнение вида (1.3) в частном случае, если банахово пространство E является гильбертовым пространством H . Обозначим через $\langle \cdot, \cdot \rangle$ скалярное произведение в H и введем необходимые определения.

Определение 1.7. [46, с. 232] Линейный оператор $A : D(A) \rightarrow H$ с плотной в гильбертовом пространстве H областью определения $D(A)$ называется *диссипативным*, если

$$\operatorname{Re} \langle Ax, x \rangle \leq 0, \quad \forall x \in D(A).$$

Определение 1.8. [125, с. 81] Диссипативный оператор $A : D(A) \rightarrow H$ называется *m -диссипативным*, если

$$R(I - A) = H.$$

Здесь и далее $R(I - A)$ обозначает область значений оператора $I - A$. Если оператор A – диссипативен, то, очевидно, μA – также диссипативен при всех $\mu > 0$. Таким образом, для m -диссипативного оператора область значений $R(\lambda I - A)$ совпадает с H при всех $\lambda > 0$ [125, с. 81]. Следующая теорема о связи между диссипативными операторами и сжимающими полугруппами впервые доказана в работе R.S. Phillips [129] для случая гильбертова пространства, а также в статье R.S. Phillips и G. Lumer [130] для случая банахова пространства.

Утверждение 1.7. (Теорема Люмера – Филлипса [129], [125, с. 14]) Пусть линейный оператор $A : D(A) \rightarrow H$ имеет плотную область определения $D(A)$ в H .

1. Если оператор A диссипативен и существует такое λ_0 , что

$$R(\lambda_0 I - A) = H,$$

то A является инфинитезимальным генератором сжимающей C_0 -полугруппы $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ в H .

2. Если A – инфинитезимальный генератор сжимающей C_0 -полугруппы $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ в H , то оператор A диссипативен и $R(\lambda I - A) = H$ для всех $\lambda > 0$.

Теорема Люмера – Филлипса допускает формулировку в терминах m -диссипативных операторов [125, с. 81]: плотно-определенный оператор $A : D(A) \rightarrow H$ является инфинитезимальным генератором сжимающей C_0 -полугруппы тогда и только тогда, когда он является m -диссипативным. Утверждение о связи между диссипативными линейными операторами и сжимающими C_0 -полугруппами можно также сформулировать следующим образом.

Утверждение 1.8. [46, с. 283], [125, с. 15]) Пусть $A : D(A) \rightarrow H$ – плотно-определенный замкнутый линейный оператор. Если оператор A и сопряженный к нему A^* – диссипативны, то A является инфинитезимальным генератором сжимающей C_0 -полугруппы $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ в H .

Если оператор $A : D(A) \rightarrow E$ является инфинитезимальным генератором C_0 -полугруппы линейных операторов в E , то такую полугруппу удобно обозначать символом $\{e^{tA}\}_{t \geq 0}$ по аналогии с решениями линейных обыкновенных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами.

Если $A : E \rightarrow E$ – линейный ограниченный оператор, то $e^{tA} : E \rightarrow E$ можно определить сходящимся рядом:

$$e^{tA} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} (tA)^n,$$

при этом оператор e^{tA} является целой аналитической функцией параметра t , а решение задачи Коши (1.3), $x(0) = x_0 \in E$, задается формулой $x(t) = e^{tA}x_0$ [122, с. 25].

Теория полугрупп линейных операторов имеет широкий круг приложений при исследовании свойств решений линейных и нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными [125, С. 219–251], [128], а также функционально-дифференциальных уравнений [131, С. 200–227], при описании движения твердого тела с полостью, заполненной жидкостью [132, С. 238–258], в задачах управляемости и оптимального управления [82, С. 292–329], [107], [123], в задачах устойчивости и стабилизации колебаний упругих балок и струн [83, С. 165–386].

Для линейного дифференциального уравнения с управлением в гильбертовом пространстве в монографии А.А. Шестакова [75, С. 274–278] доказаны теоремы о полной управляемости и стабилизируемости для случая сжимающей полугруппы.

1.3.2 Нелинейные полугруппы

Приведенные выше результаты из области теории сжимающих полугрупп линейных операторов могут быть обобщены для описания свойств решений нелинейных дифференциальных уравнений. Изложим основные положения нелинейной теории сжимающих полугрупп, опираясь на монографию V. Barbu [127].

Пусть задано замкнутое подмножество X вещественного банахова пространства E . Рассмотрим нелинейное дифференциальное уравнение

$$\frac{dx(t)}{dt} + \Gamma x(t) = 0 \tag{1.8}$$

с начальными условиями

$$x(0) = x_0 \in X. \quad (1.9)$$

Предполагается, что нелинейный (вообще говоря, неограниченный) оператор $\Gamma : D(\Gamma) \rightarrow E$ имеет всюду плотную в X область определения $D(\Gamma) \subset X$. Как и в определении 1.1, под классическим решением уравнения (1.8) на \mathbb{R}^+ будем понимать функцию $x(t) \in D(\Gamma)$, которая имеет (сильную) производную $\frac{d}{dt}x(t)$ и удовлетворяет уравнению (1.8) при всех $t \geq 0$. Для исследования свойств решений задачи Коши (1.8)-(1.9) на полуинтервале $t \in \mathbb{R}^+$ введем более общее, чем в определении 1.4, понятие непрерывной полугруппы [76, гл. 2.8], [128, с. 25].

Определение 1.9. *Непрерывной полугруппой нелинейных операторов в X* называется однопараметрическое семейство отображений $\{S(t)\}_{t \geq 0}$, которые действуют из X в X и обладают следующими свойствами:

- (i) $S(0)x = x$ для всех $x \in X$;
- (ii) $S(t+s)x = S(t)S(s)x$ для всех $t, s \geq 0, x \in X$;
- (iii) отображение $(t, x) \mapsto S(t)x$ непрерывно по $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times X$.

Из утверждений 1.3 и 1.4 (с. 40) следует, что для всякой C_0 -полугруппы $\{S(t)\}$ выполнено свойство непрерывности отображения $(t, x) \mapsto S(t)x$ по переменным $(t, x) \in \mathbb{R}^+ \times E$. Таким образом, каждая C_0 -полугруппа линейных операторов является также и полугруппой в смысле определения 1.9 при $X = E$. Поскольку в нелинейном случае оценка (1.7), вообще говоря, не выполнена, то выделим отдельные классы непрерывных полугрупп с помощью следующего определения.

Определение 1.10. [127, с. 229] Непрерывная полугруппа нелинейных операторов $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ в X называется *сжимающей*, если

$$\|S(t)x_1 - S(t)x_2\| \leq \|x_1 - x_2\|, \quad \forall t \geq 0, x_1, x_2 \in X. \quad (1.10)$$

В более общем случае, если вместо неравенства (1.10) выполнено

$$\|S(t)x_1 - S(t)x_2\| \leq e^{\omega t} \|x_1 - x_2\|, \quad \forall t \geq 0, \quad x_1, x_2 \in X, \quad (1.11)$$

при некотором $\omega \in \mathbb{R}$, то полугруппа $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ называется ω - квазисжимающей.

Нетрудно проверить, что для всякой ω -квазисжимающей полугруппы $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ нелинейных операторов в X , свойство непрерывности отображения $(t, x) \mapsto S(t)x$ следует из его непрерывности по $t \in \mathbb{R}^+$ при фиксированных $x \in X$.

Распространяя определение 1.5 на нелинейный случай, будем называть *инфинитезимальным генератором полугруппы нелинейных операторов* $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ оператор

$$F : D(F) \subset X \rightarrow E,$$

определенный соотношением

$$Fx = \lim_{t \rightarrow +0} \frac{S(t)x - x}{t}, \quad x \in D(F), \quad (1.12)$$

где область определения $D(F)$ нелинейного оператора F состоит из всех $x \in X$, для которых предел (1.12) существует [127, с. 229].

Для описания инфинитезимальных генераторов полугрупп нелинейных операторов будем следовать подходу [127, 133], расширяя значения оператора Γ в дифференциальном уравнении (1.8) до некоторого многозначного оператора $\tilde{\Gamma}$. А именно, обозначим через 2^E множество всех подмножеств пространства E и рассмотрим *многозначный оператор* как отображение $\tilde{\Gamma} : D(\tilde{\Gamma}) \rightarrow 2^E$ с областью определения $D(\tilde{\Gamma}) \subset X$ и значениями в виде множеств $\Gamma x \subset E$ при $x \in D(\tilde{\Gamma})$. Очевидно, что всякий нелинейный оператор $\Gamma : D(\Gamma) \rightarrow E$ можно рассматривать как частный случай многозначного оператора $\tilde{\Gamma}$, у которого $\tilde{\Gamma}x = \{\Gamma x\} \subset E$ при $x \in D(\Gamma) = D(\tilde{\Gamma})$. Если операторы Γ и $\tilde{\Gamma}$ связаны таким образом, то уравнение (1.8) можно переписать в виде дифференциального включения:

$$\frac{dx(t)}{dt} + \tilde{\Gamma}x(t) \ni 0 \quad (1.13)$$

или $\dot{x}(t) \in -\tilde{\Gamma}x(t)$. В более общем случае, если $D(\Gamma) \subset D(\tilde{\Gamma})$ и $\Gamma x \in \tilde{\Gamma}x$ при всех $x \in D(\Gamma)$, то всякое решение $x(t)$ уравнения (1.8) с очевидностью удовлетворяет (1.13). Ключевую роль при описании инфинитезимальных генераторов сжимающих полугрупп играет свойство *аккретивности* оператора $\tilde{\Gamma}$ в (1.13). Для определения этого свойства приведем необходимые факты из функционального анализа.

Обозначим через E^* пространство, сопряженное к банаховому пространству E . Напомним, что E^* состоит из всех линейных непрерывных функционалов x^* , определенных на E [46, с. 40]. Будем обозначать через (x, x^*) или $x^*(x)$ значение функционала $x^* \in E^*$ в точке $x \in E$. Поскольку E^* является банаховым пространством, то имеет смысл говорить о пространстве $E^{**} = (E^*)^*$, сопряженном к E^* . Каждый элемент $x_0 \in E$ порождает на E^* непрерывный линейный функционал $f_{x_0}(x^*)$, определяемый равенством $f_{x_0}(x^*) = x^*(x_0)$. Таким образом, устанавливается взаимно однозначное соответствие между элементами пространства E и некоторым подмножеством $\pi(E)$ пространства E^{**} . Это соответствие называется *естественным отображением* пространства E в E^{**} . Банахово пространство E называется *рефлексивным*, если $\pi(E) = E^{**}$. Конечномерное пространство, пространства последовательностей ℓ_p , а также пространства суммируемых функций $L_p(0, 1)$ при $p > 1$ рефлексивны [46, с. 50].

Пространство E называется *строго выпуклым*, если единичный шар B в E является строго выпуклым, т.е. его граница ∂B не содержит отрезка прямой. Пространство E называется *равномерно выпуклым* [127, с. 2], если для всякого $\varepsilon \in (0, 2)$ существует такое $\delta(\varepsilon) > 0$, что если $\|x\| = \|y\| = 1$ и $\|x - y\| \geq \varepsilon$, то $\|x + y\| \leq 2(1 - \delta(\varepsilon))$. Каждое равномерно выпуклое пространство E является строго выпуклым. Гильбертовы пространства и все пространства $L_p(\Omega)$, $1 < p < \infty$, являются равномерно выпуклыми (см. [127, с. 2]).

Для каждого $x \in E$ определим *множество двойственности* $J(x) \subset E^*$

следующим образом [127, с. 1]:

$$J(x) = \{x^* \in E^* \mid (x, x^*) = \|x\|^2 = \|x^*\|^2\}. \quad (1.14)$$

Определение 1.11. [127, с. 99] Мнозначный оператор $\tilde{\Gamma} : D(\tilde{\Gamma}) \rightarrow 2^E$ с областью определения $D(\tilde{\Gamma}) \subset E$ называется *аккретивным*, если для любых $x_1, x_2 \in D(\tilde{\Gamma})$, $y_1 \in \tilde{\Gamma}x_1$, $y_2 \in \tilde{\Gamma}x_2$ существует такое $w \in J(x_1 - x_2)$, что

$$(y_1 - y_2, w) \geq 0. \quad (1.15)$$

Условие аккретивности (1.15) эквивалентно следующему [127, с. 100]:

$$\|x_1 - x_2\| \leq \|x_1 - x_2 + \lambda(y_1 - y_2)\|, \quad \forall \lambda > 0, x_i \in D(\tilde{\Gamma}), y_i \in \tilde{\Gamma}x_i, i = 1, 2. \quad (1.16)$$

Определение 1.12. [127, с. 100] Мнозначный оператор $\tilde{\Gamma} : D(\tilde{\Gamma}) \rightarrow 2^E$, $D(\tilde{\Gamma}) \subset E$, называется *диссипативным*, если оператор $-\tilde{\Gamma}$ аккретивен. Оператор $\tilde{\Gamma}$ называется *ω -аккретивным*, если $\tilde{\Gamma} + \omega I$ – аккретивен, где $\omega \in \mathbb{R}$.

Для многозначного оператора $\tilde{\Gamma} : D(\tilde{\Gamma}) \rightarrow 2^E$ можно определить его *график* следующим образом:

$$\text{graph}(\tilde{\Gamma}) = \{(x, y) \mid x \in D(\tilde{\Gamma}), y \in \tilde{\Gamma}x\}. \quad (1.17)$$

Согласно терминологии [127, гл. 2.3], свойства аккретивности, ω -аккретивности, диссипативности многозначного оператора $\tilde{\Gamma}$ эквивалентны соответствующим свойствам множества (1.17) в $E \times E$.

Пусть E – рефлексивное банахово пространство. Для аккретивного многозначного оператора $\tilde{\Gamma} : D(\tilde{\Gamma}) \rightarrow 2^E$, $D(\tilde{\Gamma}) \subset E$, обозначим через $\Gamma^0 x$ элемент с минимальной нормой в $\tilde{\Gamma}x$, т.е. рассмотрим следующее отображение:

$$x \in D(\tilde{\Gamma}) \mapsto \Gamma^0 x \in \tilde{\Gamma}x : \|\Gamma^0 x\| = \min_{y \in \tilde{\Gamma}x} \|y\|.$$

Если E – строго выпуклое пространство, то такой оператор $\Gamma^0 : D(\tilde{\Gamma}) \rightarrow E$ определен однозначным образом и называется *минимальным сужением*

оператора $\tilde{\Gamma}$ [127, с. 104]. В частном случае, если $\tilde{\Gamma}x = \{\Gamma x\}$ при всех $x \in D(\tilde{\Gamma}) = D(\Gamma)$ (однозначный оператор), то $\Gamma^0 = \Gamma$.

Следующее утверждение распространяет теорему Люмера – Филлипса (утверждение 1.7, с. 43) на нелинейный случай.

Утверждение 1.9. [127, с. 231] Пусть E и E^* – равномерно выпуклые пространства, и пусть $\tilde{\Gamma}$ – ω -аккретивный оператор с замкнутым в $E \times E$ графиком, удовлетворяющий условию

$$\overline{\text{conv } D(\tilde{\Gamma})} \subset \bigcup_{0 < \lambda < \lambda_0} R(I + \lambda \tilde{\Gamma})$$

при некотором $\lambda_0 > 0$. Тогда существует ω -квазисжимающая полугруппа $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ на множестве $\overline{D(A)}$, инфинитезимальный генератор которой F совпадает с $-\Gamma^0$.

Здесь $\text{conv } D(\tilde{\Gamma})$ обозначает выпуклую оболочку множества $D(\tilde{\Gamma})$, $R(I + \lambda \tilde{\Gamma})$ – область значений оператора $I + \lambda \tilde{\Gamma}$, Γ^0 – минимальное сужение многозначного оператора $\tilde{\Gamma}$, черта над множеством обозначает его замыкание в пространстве E .

1.3.3 Асимптотическое поведение сжимающих нелинейных полугрупп

Предположим, что оператор $-\Gamma : D(\Gamma) \rightarrow E$ является инфинитезимальным генератором сжимающей непрерывной полугруппы нелинейных операторов $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ в X (в смысле определений 1.9 и 1.10 на с. 45). Тогда обобщенные решения задачи Коши (1.8), (1.9) определены при всех $t \in [0, +\infty)$ формулой

$$x(t) = S(t)x_0.$$

В работах [133], [134], [117, С. 500-517], [75] исследовано асимптотическое поведение решений $x(t)$ при $t \rightarrow +\infty$, а также построены притягивающие множества при различных предположениях относительно инфинитезимального генератора полугруппы.

Известно (см. напр. [75, с. 13]), что достаточным условием существования ω -предельных точек решения $x(t)$ является предкомпактность (относительная компактность) полутраектории

$$\gamma(x_0) = \{S(t)x_0 \mid t \geq 0\}.$$

Напомним [135, с. 28], что множество $\gamma(x_0) \subset E$ называется *относительно компактным* (*предкомпактным*), если его замыкание компактно.

Для уравнений с предкомпактными полутраекториями возможно исследование предельных множеств с помощью прямого метода Ляпунова с использованием идеи теоремы Барбашина – Красовского [136] и принципа инвариантности ЛаСалля [78, 75]. Поэтому представляет большой интерес нахождение условий предкомпактности траекторий дифференциальных уравнений в банаховых пространствах. В статье [133] предложено достаточное условие предкомпактности траекторий $\gamma(x_0)$ уравнения (1.8), а также рассмотрены неавтономные дифференциальные уравнения в *гильбертовом* пространстве. Приведем основной результат цитируемой работы о предкомпактности полутраекторий дифференциального включения (1.13).

Утверждение 1.10. [133, с. 99] Пусть $\tilde{\Gamma} : D(\tilde{\Gamma}) \rightarrow 2^E$, $D(\tilde{\Gamma}) \subset E$ – аккретивный многозначный оператор, удовлетворяющий условию

$$\overline{D(\tilde{\Gamma})} \subset R(I + \lambda\tilde{\Gamma})$$

при достаточно малом $\lambda > 0$, и пусть $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ – сжимающая полугруппа нелинейных операторов в $X = \overline{D(\tilde{\Gamma})}$, инфинитезимальный генератор которой равен $-\Gamma^0$. Предположим, что $0 \in R(\tilde{\Gamma})$, и что $(\lambda\tilde{\Gamma} + I)^{-1}$ – компактный оператор при некотором $\lambda > 0$. Тогда полутраектории $\gamma(x)$ предкомпактны при всех $x \in X$.

В приведенном утверждении нелинейный оператор Γ^0 обозначает минимальное сужение многозначного оператора $\tilde{\Gamma}$.

1.4 Модальное управление упругими системами

Как отмечалось [48, с. 474], распространенный подход к математическому моделированию движения твердого тела с присоединенными упругими элементами связан с представлением упругих деформаций в виде конечных линейных комбинаций по собственным формам упругих колебаний. Если исходная механическая система подвержена управляющим воздействиям, то под модальным подходом понимается синтез управления, которое обеспечивает требуемые характеристики поведения отдельных тонов (гармоник) упругих деформаций [69, с. 125].

При использовании модального метода на практике выбираются несколько первых N тонов упругих колебаний, и решается задача синтеза управления для полученной конечномерной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Модальный подход позволяет использовать хорошо развитые методы теории управления конечномерными системами для синтеза функций управления с заданными свойствами. Для широкого класса нелинейных конечномерных систем условия управляемости могут быть исследованы с помощью разработанного А.М. Ковалевым метода ориентированных многообразий [137]. Эффективные подходы к решению прямых и обратных задач управления нелинейными системами описаны в монографии А.М. Ковалева и В.Ф. Щербака [138].

В монографии Г.Л. Дегтярева и Т.К. Сиразетдинова [69, С. 125–129] рассмотрена задача модального управления колебаниями балки Эйлера – Бернулли с незакрепленными концами под действием распределенной по длине балки управляющей силы. При разложении деформации балки по собственным функциям соответствующей краевой задачи получена бесконечная система обыкновенных дифференциальных уравнений второго порядка относительно модальных координат. В ходе решения задачи модального управления предполагается [69, с. 126], что синтезированное для первых N модальных координат управление не возбуждает неуправляемые

гармоники с номером $N + 1$ и выше, которые затухают за счет диссипации энергии колебаний. Такое предположение связано с условием квазистатичности по терминологии работы [139, с. 7]

Статья Y. Ohkami и P. Likins [140] посвящена исследованию собственных частот и собственных форм колебаний модели спутника с присоединенными упругими элементами. Для системы с N модальными координатами задача о собственных колебаниях описывается краевой задачей для системы дифференциальных уравнений порядка $2N + 6$. Показано, что для модели без демпфирования решение такой задачи сводится к поиску собственных элементов симметричной положительно-определенной матрицы размера $N \times N$.

В работах В.В. Новицкого [141, 142] исследованы задачи управления линейными неавтономными системами обыкновенных дифференциальных уравнений. Для линейных систем в блочной форме обобщены результаты метода модального управления. Использован метод функций Ляпунова для построения управлений с обратной связью, в том числе при ограничениях на значения управления. Такой подход позволил также решить класс обратных задач управления и задачу линейной фильтрации для моделей механических систем.

При использовании модального метода остается открытым вопрос о сходимости решений конечномерной системы к решениям распределенной системы с ростом N . Кроме того, для выбора приемлемого числа мод N необходимо иметь априорную оценку энергии остаточной подсистемы (соответствующей частотам с номером выше N), в зависимости от начальных условий и числа N .

В работе А.Е. Закржевского [139] приведен обзор результатов, связанных с обобщением математических моделей объектов космической техники путем обоснованного учета упругости их конструкции. В статье [143] рассмотрена модель космического аппарата, состоящего из жесткого корпуса и присоединенных к нему симметрично расположенных упругих панелей

солнечных батарей. Записаны уравнения движения упругих элементов с учетом конечного числа N форм колебаний. Для рассмотренной системы уравнений движения поставлена задача оптимального управления следующего вида: найти закон управления разворотом тела вокруг эйлеровой оси на заданный угол за заданное время, при котором выполняются краевые условия для фазовых переменных и минимизируются динамические перегрузки упругих элементов. Отмечено, что в общем случае решение краевой задачи для соответствующих нелинейных уравнений принципа максимума может быть получено только численно. Для решения такой задачи предложено использовать метод последовательной линеаризации, который заключается в сведении нелинейной краевой задачи к последовательности линейных краевых задач. В качестве примера приведены результаты вычислений для модели с близкими значениями параметров времени разворота и периода колебаний системы на низшей частоте.

Статья [144] посвящена анализу погрешностей определения кинетического момента при конечномерном моделировании механической системы в виде твердого тела с двумя упругими элементами, способными изгибаться и скручиваться. Предполагается, что центр масс недеформированных упругих элементов совпадает с центром масс несущего тела, и что выполнено условие квазистатичности деформирования для форм упругих колебаний с номерами выше N . Приведены уравнения движения, соответствующие антисимметричным формам колебаний с номерами не выше N , а также приближенные решения для высших форм. С использованием этих приближенных решений предложены формулы для оценки погрешности определения кинетического момента системы. Проведена численная оценка линейных и квадратичных слагаемых кинетического момента при учете первых двух форм изгибных колебаний в случае выполнения несущим телом программного движения вокруг центра масс. Отмечено, что погрешность усечения математической модели в рассматриваемом случае существенно больше квадратичных слагаемых кинетического момента.

В работе М. Balas [145] рассмотрена задача о влиянии управления, синтезированного для конечномерной подсистемы, на высокочастотные колебания полной системы. Предполагается, что поведение гибких элементов рассматриваемого класса описывается обобщенным волновым уравнением

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}u + Au = Bf(t) = \sum_{i=1}^m b_i(x)f_i(t), \quad (1.18)$$

где функция $u(x, t)$ описывает относительное перемещение упругого элемента в точке с лагранжевой координатой $x \in \Omega$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – область с гладкой границей $\partial\Omega$. Функции $f_i(t)$ характеризуют управляющее воздействие. Предполагается, что A – симметричный оператор с компактной резольвентой и дискретным спектром

$$\sigma(A) : \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots, \quad (\lambda_1 > 0).$$

Для любого $u \in D(A)$, $w \in D(A^{1/2})$ определим составной вектор

$$v = \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} \quad (1.19)$$

и оператор $\bar{A} : H_1 \rightarrow L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)$, действующий по правилу

$$\bar{A} \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} w \\ -Au \end{pmatrix}, \quad (1.20)$$

где $H_1 = D(A) \times D(A^{1/2})$.

Пространство H_1 является гильбертовым относительно скалярного произведения $\langle \cdot, \cdot \rangle_E$:

$$\left\langle \begin{pmatrix} u_1 \\ w_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} u_2 \\ w_2 \end{pmatrix} \right\rangle_E = \langle u_1, Au_2 \rangle_{L_2(\Omega)} + \langle w_1, w_2 \rangle_{L_2(\Omega)}. \quad (1.21)$$

Норма в H_1 , соответствующая скалярному произведению (1.21), называется энергетической нормой $\| \cdot \|_E$.

С учетом (1.19), (1.20), уравнение (1.18) запишется следующим образом:

$$v_1 = \bar{A}v + \bar{B}f, \quad v_0 \in H_1, \quad (1.22)$$

где

$$\bar{B} = \begin{pmatrix} B \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Предположим, что относительные смещения упругого элемента измеряются усредняющими датчиками, соответствующими функциям выхода следующего вида:

$$y_j = \int_{\Omega} c_j(x)u(x, t) dx, \quad j = \overline{1, p}. \quad (1.23)$$

Если носитель функции $c_j(x)$ лежит в малой окрестности некоторой точки x_j , то в соответствии с терминологией [145] датчик $y_j(t)$ называется точечным.

Выражение (1.23) записывается в векторном виде следующим образом:

$$y(t) = Cu(x, t). \quad (1.24)$$

С учетом обозначения (1.19) выход (1.24) примет вид (1.19)

$$y = \bar{C}v, \quad (1.25)$$

где $\bar{C} = (C, 0)$.

В силу полноты собственных функций $\{\phi_k(x)\}$, всякий элемент $u \in L_2(\Omega)$ допускает единственное представление

$$u(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k \phi_k(x).$$

Для фиксированного $N \geq 1$ определим ортогональные проекции P_0 , Q_0 элемента $u \in L_2(\Omega)$ следующим образом:

$$P_0 u = \sum_{k=1}^N u_k \phi_k(x), \quad Q_0 u = \sum_{k=N+1}^{\infty} u_k \phi_k(x).$$

Проектируя решение системы (1.22), (1.25) с помощью операторов

$$P \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} P_0 u \\ P_0 w \end{pmatrix}, \quad Q \begin{pmatrix} u \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Q_0 u \\ Q_0 w \end{pmatrix},$$

получим следующую систему вход-выход:

$$Pv_t = \bar{A}Pv + P\bar{B}f, \quad (1.26)$$

$$Qv_t = \bar{A}Q_0v + Q\bar{B}f, \quad (1.27)$$

$$y = \bar{C}Pv + \bar{C}Qv. \quad (1.28)$$

Решения $Pv(t)$ конечномерной подсистемы (1.26) называются *управляемыми модами* [145], а решения бесконечномерной подсистемы (1.27) – *остаточными модами*. При этом $\|v\|_E^2 = \|Pv\|_E^2 + \|Qv\|_E^2$.

Предположим, что ошибками измерения остаточных мод можно пренебречь, т.е. $\bar{C}Qv = 0$ в (1.28). Влияние управления $f(t)$ на остаточную подсистему (1.27) называется эффектом переливания энергии за счет управления (control spillover).

Для оценки эффекта использования энергии воспользуемся представлением

$$Pv = \sum_{k=1}^N \begin{pmatrix} u_k \\ \dot{u}_k \end{pmatrix} \phi_k$$

и запишем конечномерную подсистему (1.26), (1.28) в переменных

$$u^{(N)} = \begin{pmatrix} u_1 \\ \vdots \\ u_N \end{pmatrix}, \quad \dot{u}^{(N)} = \begin{pmatrix} \dot{u}_1 \\ \vdots \\ \dot{u}_N \end{pmatrix}$$

следующим образом:

$$\dot{v}_N = \bar{A}_N v_N + \bar{B}_N f, \quad (1.29)$$

$$y = \bar{C}_N v_N,$$

где

$$v_N = \begin{pmatrix} u^{(N)} \\ \dot{u}^{(N)} \end{pmatrix}, \quad \bar{A}_N = \begin{pmatrix} 0 & I_N \\ -A_N & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{B}_N = \begin{pmatrix} 0 \\ B_N \end{pmatrix}, \quad \bar{C}_N = (C_N, 0),$$

$$A_N = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_N), \quad B_N = \begin{pmatrix} \langle b_1, \phi_1 \rangle & \dots & \langle b_m, \phi_1 \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle b_1, \phi_N \rangle & \dots & \langle b_m, \phi_N \rangle \end{pmatrix},$$

$$C_N = \begin{pmatrix} \langle c_1, \phi_1 \rangle & \dots & \langle c_1, \phi_N \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle c_p, \phi_1 \rangle & \dots & \langle c_p, \phi_N \rangle \end{pmatrix}.$$

Если система (1.29) управляема и наблюдаема, то ее положение равновесия $v_N = 0$ можно стабилизировать линейной обратной связью

$$F = \bar{G}_N \hat{v}_N, \quad (1.30)$$

где \bar{v}_N – оценка состояния v_N с помощью наблюдателя Луенбергера (см. [147, С. 91–92]):

$$\dot{\hat{v}}_N = (\bar{A}_N + \bar{B}_N \bar{G}_N - \bar{K}_N \bar{C}_N) \hat{v}_N + \bar{K}_N y, \quad \hat{v}_N(0) = 0. \quad (1.31)$$

В формулах (1.30)–(1.31) \bar{G}_N и \bar{K}_N подбираются из условия, чтобы спектр каждой из матриц

$$\bar{A}_N + \bar{B}_N \bar{G}_N, \quad \bar{A}_N + \bar{B}_N \bar{G}_N - \bar{K}_N \bar{C}_N$$

находился в области $\text{Re } \lambda \leq -\sigma$, ($\sigma > 0$).

При использовании управления с обратной связью (1.31) норма решений остаточной подсистемы (1.27) допускает следующую оценку [145]:

$$\|Qv\|_E \leq \|Qv_0\|_E + \frac{K\beta(1 - e^{-\sigma t})}{\sigma} \|Pv_0\|_E, \quad t \geq 0, \quad (1.32)$$

где

$$K^2 = \rho(D_N^T D_N) \rho((D_N D_N^T)^{-1}) \geq 1, \\ \beta^2 = \frac{\rho(\bar{G}_N^T \bar{G}_N)}{\min\{1, \lambda_1, \dots, \lambda_N\}} \sum_{i=1}^m \|Q_0 b_i\|^2, \quad (1.33)$$

D_N – любая невырожденная матрица, приводящая матрицу

$$\begin{pmatrix} \bar{A}_N & \bar{B}_N \bar{G}_N \\ \bar{K}_N \bar{C}_N & \bar{A}_N + \bar{B}_N \bar{G}_N - \bar{K}_N \bar{C}_N \end{pmatrix}$$

к канонической форме Жордана, $\rho(\cdot)$ – спектральный радиус матрицы. Из оценки (1.32) следует устойчивость равновесия полной системы по норме $\|\cdot\|_E$.

Неравенство (1.32) позволяет оценить энергию высокочастотных мод, в зависимости от числа N и начальных условий.

Заметим, что в формуле (1.33) выражение $\sum_{i=1}^m \|Q_0 b_i\|^2$ стремится к нулю при $N \rightarrow \infty$. Действительно,

$$\sum_{i=1}^m \|Q_0 b_i\|^2 = \sum_{i=1}^m \sum_{k=N+1}^{\infty} \langle b_i, \phi_k \rangle^2 \rightarrow 0$$

с ростом N как остаток сходящегося ряда, ибо $b_i \in L_2(\Omega)$.

Таким образом, если на комплексной плоскости существует круг радиуса ρ_0 , внутри которого находятся спектры матриц $\bar{G}_N^T \bar{G}_N$, $D_N^T D_N$ и $(D_N D_N^T)^{-1}$ при всех $N \geq 1$, то отношение $K\beta/\sigma$ стремится к нулю при $N \rightarrow \infty$.

Отмечено [145], что использование управления, соответствующего конечномерной подсистеме, в общем случае не гарантирует выполнения заданных свойств на траекториях полной бесконечномерной системы. В работе [145] показано, что при выполнении перечисленных выше условий, для достаточно большого N возможно гарантировать малость нормы решений остаточной бесконечномерной подсистемы согласно оценке (1.32). Однако, эффективная проверка условий на спектральные радиусы матриц $\bar{G}_N^T \bar{G}_N$, $D_N^T D_N$ и $(D_N D_N^T)^{-1}$ при достаточно больших N для произвольной системы с распределенными параметрами остается открытой проблемой.

В монографии Н.Х. Li, С.Л.Р. Chen, Н.-Р. Huang [146, С. 267–294] рассмотрена модель вращающейся балки Эйлера – Бернулли с управлением в виде момента сил. Для уравнений движения с частными производными записана линейная конечномерная система обыкновенных дифференциальных уравнений с модальными координатами и поставлена задача управления с обратной связью в терминах нечеткой логики (fuzzy logic). Эффективность такого управления проиллюстрирована компьютерными вычислениями для системы с четырьмя модами упругих колебаний.

1.5 Выводы

Сформулируем выводы из обзора приведенных литературных источников.

1. Проблема синтеза управлений, обеспечивающих компенсацию негативного влияния упругости элементов конструкции на динамику космических и летательных аппаратов, а также робототехнических систем, является актуальным направлением теоретической механики и теории управления. Этот вывод полностью подтверждается рядом публикаций [43, с. 8], [69, с. 4], [86], [89, с. 29], [139, с. 3].
2. Известные математические модели движения управляемых механических систем с упругими элементами могут быть разделены на две категории. К первой категории относятся модели с конечным числом степеней свободы, которые получены в результате применения различных методов дискретизации (пространственной дискретизации, модального анализа, метода Релея – Ритца – Галеркина) [54, С. 144–146].

Ко второй категории относятся модели с распределенными параметрами, которые описываются гибридными системами обыкновенных дифференциальных уравнений и уравнений с частными производными [69, С. 6–25], интегро-дифференциальными уравнениями с частными производными [59], [60, С. 48–53], счетными системами обыкновенных дифференциальных уравнений [43, с. 69], дифференциальными уравнениями в абстрактных функциональных пространствах [83, С. 165–256]. Эффективный подход к описанию свойств решений таких систем с распределенными параметрами связан с использованием аппарата теории полугрупп операторов в банаховых пространствах [122, 125]. Поскольку движение упругих элементов описывается уравнениями с частными производными, то исследование таких уравнений предполагает использование неограниченных операторов дифференцирования. Отсюда следует, что классические результаты теории устойчивости решений дифференциальных уравнений с ограниченными правыми ча-

стями [118] (включая теоремы об устойчивости по линейному приближению [148, С. 182–193] и известные модификации принципа сведения для исследования критических случаев в бесконечномерных пространствах [149]) напрямую неприменимы для рассматриваемой категории моделей.

Поэтому необходимо дальнейшее развитие методов теории устойчивости и управления (прямого метода Ляпунова [75], методов геометрической теории плоских систем управления [150, 106], теории инвариантов нелинейных систем [151]) для исследования моделей механических систем с упругими элементами в бесконечномерных пространствах.

3. Как отмечено в обзоре [139, с. 4], при использовании моделей с конечным числом степеней свободы необходимо обоснование представления континуальной системы конечномерной дискретной. Подавляющее большинство работ, посвященных задачам управления конечномерными моделями упругих систем, не содержат строгого теоретического обоснования перехода к конечномерной системе и выбора необходимого числа обобщенных координат. Анализ известных публикаций в этой области (в том числе статей [140, 144, 145]) показывает, что не решена важная проблема теоретической оценки отклонения решений приближенных моделей с конечным числом степеней свободы от решения полной бесконечномерной модели управляемой механической системы с упругими элементами.
4. К наиболее распространенной модели представления упругих колебаний элементов космических аппаратов и звеньев манипуляционных роботов относится балка Эйлера – Бернулли (см. [43, с. 57], [86, с. 15]). Для более точного математического моделирования балок с учетом инерции вращения и поперечных сдвигов может быть использована модель балки Тимошенко, которая имеет существенные преимущества при исследовании форм колебаний с высокими частотами (см. напр.

[3, С. 387–389], [61, С. 283–284]).

5. В большинстве публикаций, посвященных задачам управляемости и стабилизации моделей балок Эйлера – Бернулли и Тимошенко в бесконечномерных пространствах, рассмотрен случай балки со свободным концом или точечной массой на конце. В монографиях [86, С. 15–19], [83, С. 167–175] записаны также дифференциальные уравнения движения механической системы в виде балки Эйлера – Бернулли с присоединенным твердым телом с учетом его распределения масс. Однако, в цитируемых работах не рассматривались задачи управления для такой механической системы. Для некоторых конечномерных моделей манипуляционных роботов, состоящих из упругих балок и твердых тел, задачи управления решались численными методами [89], [92]. В статье [92] рассмотрена важная прикладная проблема управления движением пожарной лестницы IVECO Magirus. Такая лестница является примером манипулятора с упругими звеньями, для которого задачи стабилизации и планирования движения не могут быть удовлетворительно решены в рамках модели абсолютно твердого тела.

Таким образом, аналитическое решение задач устойчивости и управления для моделей роботов-манипуляторов с упругими звеньями, которые описываются уравнениями с частными производными или системами обыкновенных дифференциальных уравнений высокой размерности, является актуальным направлением теоретических и прикладных исследований.

Последующие разделы диссертационной работы посвящены исследованию сформулированных выше проблем.

2 Частичная асимптотическая устойчивость в бесконечномерном фазовом пространстве

Известно, что для ряда важных классов механических систем асимптотическая стабилизация по всем переменным невозможна, и естественно возникает постановка задачи об устойчивости по части переменных [51].

Такая задача изучена в основном для систем обыкновенных дифференциальных уравнений в конечномерных пространствах, о чем свидетельствует обзор [52]. При исследовании задач устойчивости по всем и по части переменных традиционно предполагаются свойства существования, единственности и z -продолжимости решений задачи Коши [51, с. 15], [50, с. 65]. Однако, в работах [152], [108, С. 250–260] показано, что использование негладких и даже разрывных функций управления с обратной связью существенно расширяет класс стабилизируемых систем, одновременно приводя к потере единственности решений. Вопрос о корректности определения решений становится еще более актуальным для систем с распределенными параметрами, поскольку начально-краевая задача для дифференциального уравнения с частными производными, описывающая движение механической системы, может оказаться корректной относительно одной нормы в бесконечномерном фазовом пространстве и некорректной относительно другой [75, с. 11]. В связи с этим возникает необходимость исследования асимптотических свойств пучков траекторий (интегральных воронок) для многозначных динамических процессов, в том числе для моделей управляемых механических систем с распределенными параметрами в бесконечномерных пространствах.

Такое исследование объединяет актуальные направления теории управления и теории дифференциальных включений, поскольку, согласно подходу А.Ф. Филиппова [153, с. 40], [154, с. 7], решение дифференциального уравнения с разрывным управлением в виде обратной связи определяется как решение дифференциального включения, порожденного правой частью

исходного уравнения.

Целью данного раздела является развитие метода функционалов Ляпунова для описания свойств частичной асимптотической устойчивости обобщенных динамических систем в метрических, банаховых или гильбертовых пространствах. В соответствии с принятой терминологией [46, с. 280], [75, с. 23], [82, с. 191], будем называть дифференциальные уравнения в бесконечномерных функциональных пространствах абстрактными дифференциальными уравнениями.

Результаты данного раздела будут использованы в дальнейшем при решении задач стабилизации движения механических систем с упругими элементами.

2.1 Частичная асимптотическая устойчивость многозначных динамических процессов

Пусть X — метрическое пространство, снабженное расстоянием

$$\rho : X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+,$$

где $\mathbb{R}^+ = [0, +\infty)$. Для исследования динамических процессов в X будем рассматривать функции $x(t) \in X$, которые определены при всех значениях времени $t \in \mathbb{R}^+$. Обозначим через κ множество всех таких функций $x : \mathbb{R}^+ \rightarrow X$, множество всех подмножеств κ будем обозначать 2^κ . Таким образом, элементами множества 2^κ являются: либо пустое множество, либо одна функция $x : \mathbb{R}^+ \rightarrow X$, либо несколько таких функций.

Определение 2.1. [12] Отображение $\pi : X \rightarrow 2^\kappa$ называется *многозначной D-системой на X* если

A_1 . $\pi(x_0) \neq \emptyset$ для всех $x_0 \in X$.

A_2 . Всякий элемент $x(\cdot) \in \pi(x_0)$ обладает свойством $x(0) = x_0$.

A_3 . Для всяких $x_0 \in X$, $s \in \mathbb{R}^+$, $x(\cdot) \in \pi(x_0)$, $z(\cdot) \in \pi(x(s))$ выполнены условия $u(\cdot) \in \pi(x(s))$ и $v(\cdot) \in \pi(x_0)$, где $u(t) = x(t+s)$,

$$v(t) = \begin{cases} x(t), & t \leq s; \\ z(t-s), & t > s. \end{cases}$$

A_4 . Для любых $x_0 \in X$, $\varepsilon > 0$, $T > 0$ существует такое $\delta(x_0, \varepsilon, T) > 0$, что из $\rho(\tilde{x}_0, x_0) < \delta$, $\tilde{x}(\cdot) \in \pi(\tilde{x}_0)$ следует

$$\inf_{x(\cdot) \in \pi(x_0)} \left(\sup_{t \in [0, T]} \rho(\tilde{x}(t), x(t)) \right) < \varepsilon.$$

A_5 . Для каждого $x_0 \in X$, $T > 0$ и последовательности $\{x_n(\cdot)\}_{n=1}^{\infty} \subset \pi(x_0)$ найдется $x(\cdot) \in \pi(x_0)$ такое, что

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{t \in [0, T]} \rho(x_n(t), x(t)) \right) = 0.$$

Элементы $x(t)$ множества $\pi(x_0)$ будем называть *решениями* задачи Коши для π с начальным условием $x(0) = x_0$.

Приведенное выше определение является естественным обобщением понятия динамической системы, соответствующей траекториям автономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Для автономных систем отображение $\pi(x_0)$ будет состоять из всех решений $x(t)$ ($t \in \mathbb{R}^+$) системы дифференциального уравнения, которые удовлетворяют начальному условию $x(0) = x_0$. Предположения A_1 и A_2 постулируют существование решений, предположение A_3 означает, что положительный сдвиг траектории является траекторией (групповое свойство). Условия A_4 и A_5 обеспечивают регулярность решений без предположения об их единственности.

Замечание 2.1. В монографии Дж. Хейла [131, С. 98–123] для исследования автономных функционально-дифференциальных уравнений запаздывающего типа использовано представление их решений с помощью динамической системы на банаховом пространстве. Такой подход соответствует

частному случаю многозначной D -системы, если X — банахово пространство и для каждого $x_0 \in X$ множество $\pi(x_0)$ состоит из единственной функции $x(t)$, $t \geq 0$.

Приведем необходимые определения, которые распространяют известные в качественной теории дифференциальных уравнений свойства (см. [155, с. 30]) на случай многозначных D -систем.

Определение 2.2. Пусть $x(\cdot) \in \pi(x_0)$. Элемент $q \in X$ называется ω -предельной точкой для x если найдется такая последовательность $t_n \rightarrow +\infty$, что $x(t_n) \rightarrow q$ при $n \rightarrow \infty$. Множество всех таких предельных точек будем обозначать $\Omega(x)$ и называть ω -предельным множеством для x .

Определение 2.3. Множество $F \subset X$ называется *полуинвариантным* для π если для каждого $x_0 \in F$ имеется по крайней мере одно решение $x(\cdot) \in \pi(x_0)$, обладающее свойством $x(t) \in F$ при всех $t \in \mathbb{R}^+$.

Определение 2.4. Будем говорить, что $x(\cdot) \in \pi(x_0)$ является *предкомпактным* если $\bigcup_{t \geq 0} \{x(t)\}$ содержится в некотором (секвенциально) компактном подмножестве X .

Важным свойством в качественной теории дифференциальных уравнений является инвариантность предельных множеств. Следующая лемма распространяет этот результат на класс многозначных D -систем на метрическом пространстве.

Лемма 2.1. [12] Пусть π — многозначная D -система, и пусть $x(\cdot) \in \pi(x_0)$. Если x предкомпактно, то предельное множество $\Omega(x)$ непусто и полуинвариантно.

Доказательство. Из предкомпактности x вытекает, что для всякой последовательности $t_n \rightarrow +\infty$ соответствующая последовательность $\{x(t_n)\}_{n=1}^{\infty}$ имеет предельную точку, следовательно, $\Omega(x) \neq \emptyset$.

Покажем, что для любых $T > 0$ и $x_0^* \in \Omega(x)$ существует функция $\xi(\cdot) \in \pi(x_0^*)$, удовлетворяющая условию $\xi(t) \in \Omega(x)$ при всех $t \in [0, T]$. Поскольку $x_0^* \in \Omega(x)$, то найдется такая последовательность $t_n \rightarrow +\infty$, что $x(t_n) \rightarrow x_0^*$ при $n \rightarrow \infty$. Построим последовательность $\{\phi_n(\cdot)\}_{n=1}^\infty \subset \kappa$: $\phi_n(t) = x(t_n + t)$, $t \in \mathbb{R}^+$. Тогда $\phi_n(\cdot) \in \pi(x(t_n))$ в силу предположения A_3 . Пусть $\{\phi_{n(k)}(\cdot)\}_{k=1}^\infty$ — подпоследовательность последовательности $\{\phi_n(\cdot)\}_{n=1}^\infty$, удовлетворяющая условию $\rho(\phi_{n(k)}(0), x_0^*) < \delta_k$, где числа

$$\delta_k = \delta(x_0^*, 1/k, T) > 0$$

выбраны как в A_4 . По предположению A_4 , существует последовательность $\{\psi_k(\cdot)\}_{k=1}^\infty \subset \pi(x_0^*)$, такая что

$$\sup_{t \in [0, T]} \rho(\phi_{n(k)}(t), \psi_k(t)) < \frac{1}{k}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.1)$$

Тогда из A_5 следует существование такого $\xi(\cdot) \in \pi(x_0^*)$ и последовательности $\{\psi_{k(m)}(\cdot)\}_{m=1}^\infty$, что:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\sup_{t \in [0, T]} \rho(\psi_{k(m)}, \xi(t)) \right) = 0.$$

Отсюда с использованием (2.1) получаем

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \left(\sup_{t \in [0, T]} \rho(\phi_{n(k(m))}, \xi(t)) \right) = 0.$$

Поскольку каждое решение $\phi_n(\cdot)$ является сдвигом $x(\cdot)$ то каждое значение $\xi(t)$ ($0 \leq t \leq T$) принадлежит $\Omega(x)$.

Для завершения доказательства применим описанное выше построение для каждой из точек $x_i^* = \xi_{i-1}(T)$, где $\xi_0(\cdot) = \xi(\cdot)$. В результате получим систему функций $\xi_i(\cdot) \in \pi(\xi_{i-1}(T))$, обладающую свойством $\xi_i(t) \in \Omega(x)$ при всех $t \in [0, T]$, $i = 1, 2, \dots$.

Тогда из A_3 следует, что функции $x^*(t) = \xi_{[t/T]}(\{t/T\}T)$ лежат во множестве $\pi(x_0^*)$, где $[t/T]$ и $\{t/T\}$ обозначают целую и дробную части t/T , соответственно. Кроме того, $x^*(t) \in \Omega(x)$ для всех $t \in \mathbb{R}^+$. Лемма доказана.

Предельное множество решения динамической системы может быть охарактеризовано в терминах функции Ляпунова с помощью принципа инвариантности ЛаСалля, который справедлив для широкого класса абстрактных систем на пространствах Фреше [78, 75]. Докажем аналогичное утверждение для многозначных D -систем в смысле определения 2.1.

Лемма 2.2. [12] *Пусть π — многозначная D -система, $x(\cdot) \in \pi(x_0)$. Предположим, что имеется непрерывный функционал $V : X \rightarrow \mathbb{R}$, обладающий свойством*

$$\xi_0 \in X, \xi(\cdot) \in \pi(\xi_0) \Rightarrow V(\xi(t)) \text{ не возрастает на } \mathbb{R}^+.$$

Тогда если $x(\cdot)$ предкомпактно, то

$$\Omega(x) \subset \{p \in X \mid V(\xi(t)) = c \text{ для некоторого } \xi(\cdot) \in \pi(p), t \in \mathbb{R}^+\} \quad (2.2)$$

при некоторой константе c .

Доказательство. Из предкомпактности $\bigcup_{t \geq 0} \{x(t)\}$ и непрерывности V следует, что $\Omega(x) \neq \emptyset$, а также, что $V(x(t))$ ограничена на \mathbb{R}^+ . Поскольку $V(x(t))$ не возрастает, существует предел

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} V(x(t)) = c \neq -\infty.$$

По непрерывности V получаем $V(x^*) = c$ для всех $x^* \in \Omega(x)$. Это означает, что $\Omega(x)$ — подмножество $\{p \in X \mid V(p) = c\}$. Отсюда в силу полуинвариантности $\Omega(x)$ (лемма 2.1) заключаем, что для любого $p \in \Omega(x)$ существует $\xi(\cdot) \in \pi(p)$, обладающее свойством $\xi(t) \in \Omega(x)$. Отсюда следует $V(\xi(t)) = c$ при всех $t \in \mathbb{R}^+$. Лемма доказана.

Лемма 2.2 обобщает результаты Ж. ЛаСалля [78] и А.А. Шестакова [75, с. 127] на многозначные D -системы в метрическом пространстве.

Применим доказанную лемму для анализа частичной асимптотической устойчивости абстрактных систем. Будем называть элемент $x_0 \in X$ *особой точкой* системы π если функция $x(t) \equiv x_0$ принадлежит $\pi(x_0)$.

Определение 2.5. [12] Пусть π — многозначная D -система на X , и пусть $y : X \rightarrow \mathbb{R}^+$. Особая точка x_0 системы π называется *асимптотически устойчивой* по отношению к y , если

- (i) Для произвольного заданного $\varepsilon > 0$ существует $\delta(\varepsilon) > 0$ такое, что из $\rho(\tilde{x}_0, x_0) < \delta$ следует $y(\tilde{x}(t)) < \varepsilon$ при всех $\tilde{x}(\cdot) \in \pi(\tilde{x}_0)$, $t \in \mathbb{R}^+$.
- (ii) Существует такое $\Delta > 0$, что из $\rho(\tilde{x}_0, x_0) < \Delta$ вытекает

$$\lim_{t \rightarrow \infty} y(\tilde{x}(t)) = 0. \quad (2.3)$$

Для формулировки условий частичной устойчивости введем класс функций Хана \mathcal{K} , состоящий из всех непрерывных строго возрастающих функций $\alpha : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$, обладающих свойством $\alpha(0) = 0$.

Теорема 2.1. [12] Пусть π — многозначная D -система на метрическом пространстве X , и пусть x_0 — ее особая точка. Предположим, что имеются непрерывные функционалы $y, V : X \rightarrow \mathbb{R}^+$, удовлетворяющие следующим условиям:

C_1 . Существуют функции $\alpha_1(\cdot), \alpha_2(\cdot) \in \mathcal{K}$, обладающие свойством

$$\alpha_1(y(x)) \leq V(x) \leq \alpha_2(\rho(x_0, x)), \quad \forall x \in X. \quad (2.4)$$

C_2 . Для всяких $\tilde{x}_0 \in X$, $\tilde{x}(\cdot) \in \pi(\tilde{x}_0)$ функция $V(\tilde{x}(t))$ не возрастает на \mathbb{R}^+ .

C_3 . Найдется такое $\Delta > 0$, что из $\rho(\tilde{x}_0, x_0) < \Delta$, $\tilde{x}(\cdot) \in \pi(\tilde{x}_0)$ следует предкомпактность $\tilde{x}(\cdot)$.

C_4 . Множество

$$M_1 = \{p \in X \mid V(\tilde{x}(t)) \equiv \text{const} \text{ для некоторого } \tilde{x}(\cdot) \in \pi(p)\} \quad (2.5)$$

содержится в

$$\text{Ker } y = \{p \in X \mid y(p) = 0\}.$$

Тогда особая точка x_0 асимптотически устойчива по отношению к y .

Доказательство. Докажем сначала свойство (i) из определения 2.5, распространяя теорему В.В. Румянцева [51, теорема 5.1]. Затем воспользуемся леммой 2.2 для доказательства свойства (ii).

Из условия C_2 следует, что $V(\tilde{x}(t)) \leq V(\tilde{x}_0)$ для всех $\tilde{x}_0 \in X$, $\tilde{x}(\cdot) \in \pi(\tilde{x}_0)$, $t \in \mathbb{R}^+$. Отсюда, с учетом (2.4), получаем

$$y(\tilde{x}(t)) \leq \alpha_1^{-1}(\alpha_2(\rho(\tilde{x}_0, x_0))), \quad (2.6)$$

где функция $\alpha_1^{-1}(\tau)$ определена и строго возрастает при достаточно малых $\tau > 0$, поскольку $\alpha(\cdot) \in \mathcal{K}$. Следовательно, функция

$$\gamma(\delta) = \alpha_1^{-1}(\alpha_2(\delta))$$

непрерывна, неотрицательна и строго возрастает на некотором полуинтервале $[0, \delta^*)$,

$0 < \delta^* \leq +\infty$. Это значит, что для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta \in (0, \delta^*)$, что $\gamma(\delta) \leq \varepsilon$. Отсюда заключаем, что при $\rho(\tilde{x}_0, x_0) < \varepsilon$ из условия (2.6) следует

$$y(\tilde{x}(t)) \leq \gamma(\rho(\tilde{x}_0, x_0))$$

при всех $\tilde{x}(\cdot) \in \pi(\tilde{x}_0)$, $t \in \mathbb{R}^+$.

Для завершения доказательства достаточно показать существование предела (2.3). Пусть число Δ выбрано как в C_3 , и пусть $\rho(\tilde{x}_0, x_0) < \Delta$. Тогда при любом $\tilde{x}(\cdot) \in \tilde{x}_0$ множество $\Omega(\tilde{x}) \neq \emptyset$ содержится в (2.5) в силу леммы 2.2. Из условия C_4 вытекает

$$\Omega(\tilde{x}) \subset \text{Ker } y. \quad (2.7)$$

Для доказательства (2.3) предположим противное: пусть при некоторых $\varepsilon > 0$, $t_n \rightarrow +\infty$, $n \rightarrow \infty$ имеет место неравенство

$$y(\tilde{x}(t_n)) > \varepsilon, \quad n = 1, 2, \dots \quad (2.8)$$

Поскольку $\tilde{x}(\cdot)$ предкомпактно, то найдется подпоследовательность $\{t_{n(k)}\}_{k=1}^{\infty}$, обладающая свойством $\tilde{x}(t_{n(k)}) \rightarrow x^* \in \Omega(\tilde{x})$ при $k \rightarrow \infty$. Тогда $y(x^*) = 0$ благодаря (2.7). Из непрерывности y вытекает

$$|y(\tilde{x}(t_{n(k)})) - y(x^*)| = y(\tilde{x}(t_{n(k)})) \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty.$$

Полученное соотношение противоречит (2.8). Следовательно, если

$$\rho(\tilde{x}_0, x_0) < \Delta,$$

то

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} y(\tilde{x}(t)) = 0$$

при всех $\tilde{x}(\cdot) \in \pi(\tilde{x}_0)$. Теорема доказана.

Замечание 2.2. Для автономных систем обыкновенных дифференциальных уравнений теорема 2.1 устанавливает достаточные условия асимптотической устойчивости по части переменных в смысле А.М. Ляпунова и В.В. Румянцева ([156, с. 19], [51, с. 15]). Действительно, пусть $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ — непрерывная функция, и пусть $f(0) = 0$. Вектор $x \in \mathbb{R}^n$ можно представить в виде

$$x = (y_1, \dots, y_m, z_1, \dots, z_k),$$

где $y = (y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m$, $z = (z_1, \dots, z_k) \in \mathbb{R}^k$, $m + k = n$. Решение $x_0(t) \equiv 0$ системы

$$\dot{x} = f(x) \tag{2.9}$$

асимптотически устойчиво по переменным (y_1, \dots, y_m) [51], если для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что каждое решение $x(t)$ системы (2.9) с начальными условиями $\|x(0)\| < \delta$ определено на \mathbb{R}^+ , $\|y(t)\| < \varepsilon$ при всех $t \geq 0$, и $\|y(t)\| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$. Здесь $\|\cdot\|$ обозначает евклидову норму. Если выполнено предположение о продолжимости решений, то отображение $x_0 \mapsto \pi(x_0)$ является многозначной D -системой на \mathbb{R}^n , где $\pi(x_0)$ содержит все решения задачи Коши для (2.9) с $x(0) = x_0$, $t \in \mathbb{R}^+$. В самом деле, предположения $A_1 - A_3$ очевидным образом выполнены для автономной системы (2.9). Свойства A_4 и A_5 следуют из теоремы 2.4 монографии [157, с. 15]

для непрерывной f . Следовательно, асимптотическая устойчивость тривиального решения системы (2.9) по переменным (y_1, \dots, y_m) эквивалентна устойчивости в смысле определения 2.5 по отношению к функционалу

$$\bar{y}(x) = \sqrt{y_1^2 + \dots + y_m^2}.$$

Если имеется дифференцируемая функция Ляпунова V и система (2.9) обладает свойством единственности решений, то теорема 2.1 сводится к теореме Ризито – Румянцева [51, теоремы 19.1, 19.2]. В этом случае предположение о предкомпактности C_3 следует из устойчивости по переменным (y_1, \dots, y_m) и ограниченности по (z_1, \dots, z_k) , что может быть охарактеризовано с помощью теоремы 39.1 в [51]. При $m = n$ утверждение теоремы 2.1 эквивалентно теореме Барбашина – Красовского [136].

2.2 Устойчивость нелинейных полугрупп

В предыдущем разделе был доказан общий результат о частичной асимптотической устойчивости без предположений об единственности решений задачи Коши и дифференцируемости функционала Ляпунова. С точки зрения возможных приложений этого результата, особого внимания заслуживает случай динамических систем, описываемых абстрактными дифференциальными уравнениями.

Введем необходимые обозначения. Пусть E — банахово пространство с нормой $\|\cdot\|$, и пусть X — замкнутое подмножество E , содержащее некоторый шар $B_R = \{x \in E \mid \|x\| \leq R\}$ радиуса $R > 0$. Тогда X — метрическое пространство относительно расстояния $\rho(a, b) = \|a - b\|$. Пусть $F : D(F) \rightarrow E$ — нелинейный замкнутый оператор со всюду плотной в X областью определения из $D(F) \subset X$. Для начальных условий $x_0 \in X$ рассмотрим абстрактную задачу Коши:

$$\frac{dx(t)}{dt} = Fx(t), \quad t \in \mathbb{R}^+, \quad x(0) = x_0. \quad (2.10)$$

Будем предполагать, что оператор F является инфинитезимальным генератором непрерывной полугруппы нелинейных операторов $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ в X

(в смысле определения 1.9 на с. 45).

Поскольку полугруппа $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ непрерывна, то задача Коши (2.10) корректна, и ее обобщенные решения запишутся как

$$x(t) = S(t)x_0, \quad t \in \mathbb{R}^+, x_0 \in X.$$

Таким образом, каждому x_0 может быть поставлено в соответствие одноэлементное множество $\pi(x_0) = \{S(\cdot)x_0\}$. Легко проверить, что определенное таким образом отображение $\pi : X \rightarrow 2^X$ является многозначной D -системой в смысле определения 2.5. Действительно, предположение A_5 удовлетворяется в силу единственности решений, A_4 следует из непрерывности отображения $(t, x) \mapsto S(t)x$.

Пусть $V : E \rightarrow \mathbb{R}$ — дифференцируемый по Фреше функционал, тогда при фиксированном x_0 функция времени $V(S(t)x_0)$ дифференцируема на каждом классическом решении задачи (2.10). Производная по времени от V в силу (2.10) может быть записана следующим образом [75, с. 100]:

$$\dot{V}(x(t)) = (Fx(t), \nabla_{x(t)}V), \quad (2.11)$$

где $(\cdot, \cdot) : E \times E^* \rightarrow \mathbb{R}$ обозначает двойственное спаривание E и E^* , т.е. $(\xi, \nabla_x V)$ суть значение линейного функционала $\nabla_x V \in E^*$ в точке $\xi \in E$.

Предположим, что $F(0) = 0$, тогда дифференциальное уравнение (2.10) имеет решение $x(t) \equiv 0$, а значит, для соответствующей полугруппы выполнено $S(t)0 = 0$ при всех $t \geq 0$. Это означает, что при сделанных предположениях многозначная D -система $\pi(x_0) = \{S(\cdot)x_0\}$ имеет особую точку $x = 0$. Будем говорить, что особая точка $x = 0$ дифференциального уравнения (2.10) *асимптотически устойчива по отношению к функционалу* $y : X \rightarrow \mathbb{R}^+$, если точка $x = 0$ соответствующей D -системы π называется асимптотически устойчива по отношению к y в смысле определения 2.5 (с. 68).

Из теоремы 2.1 вытекает следующее утверждение.

Теорема 2.2. [12] Пусть F — инфинитезимальный генератор непрерывной полугруппы $\{S(t)\}$ нелинейных операторов в X , $F(0) = 0$, и пусть $y : X \rightarrow \mathbb{R}^+$ — непрерывный функционал. Предположим, что существует дифференцируемый по Фреше функционал $V : E \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющий следующим условиям:

1) Для некоторых функций $\alpha_1(\cdot), \alpha_2(\cdot) \in \mathcal{K}$ выполнено неравенство

$$\alpha_1(y(x)) \leq V(x) \leq \alpha_2(\|x\|) \quad x \in X.$$

2) $\dot{V}(x) \leq 0$ при всех $x \in D(F)$.

3) Существует такое $\Delta > 0$, что при любом $\|x_0\| < \Delta$ соответствующее множество

$$\bigcup_{t \geq 0} \{S(t)x_0\}$$

предкомпактно в X .

4) Множество $\text{Ker } y = \{x \in X \mid y(x) = 0\}$ инвариантно для (2.10), т.е. если $y(S(\tau)x_0) = 0$, $\tau \geq 0$, то $y(S(t)x_0) = 0$ для всех $t \in \mathbb{R}^+$.

5) Множество

$$M = \overline{\{x \in D(F) \mid \dot{V}(x) = 0\}} \setminus \text{Ker } y$$

не содержит целых полутраекторий системы (2.10), определенных для $t \in \mathbb{R}^+$.

Тогда особая точка $x = 0$ дифференциального уравнения (2.10) асимптотически устойчива по отношению к y .

Доказательство. Отображение $x_0 \in X \mapsto \pi(x_0) = \{S(\cdot)x_0\}$ задает многозначную D -систему на X , которая имеет особую точку $x = 0$ в силу предположения $F(0) = 0$. Легко видеть, что из предположений 1), 3) вытекают условия C_1, C_3 теоремы 2.1.

Докажем теперь, что условие 2) обеспечивает невозрастание $V(x(t))$ на всяком обобщенном решении (2.10) при $x_0 \in X, t \in \mathbb{R}^+$. Если $x_0 \in D(F)$

то $x(t) = S(t)x_0$ является классическим решением и $\dot{V}(x(t))$, определяемая формулой (2.11), существует при всех $t \geq 0$. Тогда неравенство $\dot{V}(x(t)) \leq 0$ обеспечивает невозрастание $V(x(t))$ на классических решениях при $t \in \mathbb{R}^+$. Для произвольных $x_0 \in X \setminus D(F)$, $T > 0$ обобщенное решение $S(t)x_0$ ($0 \leq t \leq T$) аппроксимируется классическими решениями по норме в $L^\infty([0, T]; E)$ в силу предположения A_4 . Отсюда, поскольку значения V не возрастают на классических решениях и функционал V непрерывен, получаем, что $V(S(t)x_0)$ не возрастает на \mathbb{R}^+ при каждом $x_0 \in X$.

Для завершения доказательства покажем, что условие C_4 выполняется при наших предположениях. Если в формуле (2.5) $p \in M_1$ то $\frac{d}{dt}V(S(t)p) = 0$ при всех $t \in \mathbb{R}^+$. Следовательно,

$$M_1 \subset M_0 = \overline{\{x \in D(F) \mid \dot{V}(x) = 0\}}.$$

(В определении M_0 взято замыкание множества, поскольку формула (2.11) задает \dot{V} только на $D(F)$.) Полуинвариантность M_1 означает, что

$$M_1 \subset \{x \in M_0 \mid S(t)x \in M_0 \quad t \in \mathbb{R}^+\}. \quad (2.12)$$

Предположим, что правая часть формулы (2.12) содержит некоторый элемент x . Тогда из условия 4) следует либо $S(t)x \in \text{Ker } y$, либо $S(t)x \notin \text{Ker } y$ при всех $t \in \mathbb{R}^+$. Но последний из приведенных случаев невозможен из-за условия (v). Таким образом, всякий элемент $x \in M_1$ принадлежит также и $\text{Ker } y$, что доказывает свойство C_4 . Теорема доказана.

Очевидно, в частном случае $y(x) = \|x\|$ теорема 2.2 дает достаточные условия сильной асимптотической устойчивости особой точки $x = 0$.

Замечание 2.3. Если оператор F линеен, то определение 1.9 эквивалентно определению C_0 -полугруппы линейных ограниченных операторов, и предположения теоремы 2.2 относительно непрерывности $\{S(t)\}$ могут быть проверены с помощью теорем Хилле – Йосиды или Люмера – Филлипса (утверждения 1.6 и 1.7). В нелинейном случае можно воспользоваться связью между ω -аккретивными операторами $-F$ и ω -квазисжимающими полугруппами (утверждение 1.9 на с. 49). Для диссипативных операторов F

(т.е. аккретивных операторов $-F$) условие предкомпактности траекторий 3) может быть проверено с помощью утверждения 1.10.

Предложенная выше многозначная теория использована для характеристики частичной асимптотической устойчивости задачи (2.10) в предположениях о единственности ее решений. Теоретический интерес представляет также исследование более широкого класса объектов – дифференциальных включений, рассмотренных в работах [127, 154].

2.3 Относительная компактность траекторий дифференциальных уравнений в банаховом пространстве

Для применения теоремы 2.2 необходимо иметь способ доказательства предкомпактности (относительной компактности) положительных полутраекторий нелинейного дифференциального уравнения в банаховом пространстве. Не для всякой модели механической системы такое доказательство может быть сведено к непосредственной проверке условий утверждения 1.10, поскольку, как отмечено в статье [104], условие аккретивности (монотонности) не выполняется для дифференциального оператора, описывающего управляемое вращение упругой балки. Это означает, что необходим поиск новых достаточных условий предкомпактности траекторий, которые применимы для анализа класса управляемых механических систем с распределенными параметрами. В данном подразделе доказано свойство предкомпактности полутраекторий при выполнении априорных оценок на нелинейное возмущение правой части дифференциального уравнения в банаховом пространстве.

Пусть E – вещественное банахово пространство, A – замкнутый (вообще говоря, неограниченный) линейный оператор с областью определения $D(A) \subset E$ и значениями в E . Рассмотрим абстрактную задачу Коши на промежутке $t \in [0, +\infty)$:

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad x(0) = x_0 \in E. \quad (2.13)$$

Будем предполагать, что область определения $D(A)$ всюду плотна в E , и что A является инфинитезимальным генератором C_0 -полугруппы линейных операторов $\{e^{tA}\}_{t \geq 0}$ в E (определение 1.4 на с. 39). Таким образом, задача Коши (2.13) корректно поставлена для $t \in [0, +\infty)$, и всякое обобщенное решение представимо в виде

$$x(t) = e^{tA}x_0, \quad t \geq 0. \quad (2.14)$$

С целью изучения более широкого класса уравнений (в том числе с немонотонными операторами) рассмотрим возмущенную задачу Коши на промежутке $t \geq 0$ следующего вида:

$$\dot{x} = Ax + f(t)R(x, t), \quad x(0) = x_0 \in E, \quad (2.15)$$

где $f : [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$, $R : E \times [0, +\infty) \rightarrow E$ – непрерывные отображения.

Ниже будет доказано сохранение свойства предкомпактности траекторий при переходе от уравнения (2.13) к (2.15) с некоторыми дополнительными предположениями на функцию f и отображение R . С помощью этого результата получены достаточные условия предкомпактности траекторий нелинейного автономного дифференциального уравнения в банаховом пространстве.

2.3.1 Леммы о компактности

Предположим, что банахово пространство E имеет базис $\{e_i\}$ ($i = 1, 2, \dots$). Обозначим через $\{f_j\} \subset E^*$ ($j = 1, 2, \dots$) сопряженную систему ограниченных линейных функционалов, т.е. $f_j(e_i) = \delta_{ij}$, где δ_{ij} – символ Кронекера. Тогда для каждого $x \in E$, $n \in \mathbb{N}$ определены линейные операторы проектирования:

$$S_n(x) = \sum_{i=1}^n f_i(x)e_i, \quad P_n(x) = x - S_n(x).$$

Поскольку $\{e_i\}$ – базис, то операторы $S_n : E \rightarrow E$ ограничены в совокупности [46, с. 68]:

$$\|S_n\| \leq M < \infty, \quad n = 1, 2, \dots$$

Для описания компактных подмножеств E сформулируем два вспомогательных результата [17].

Лемма 2.3. Пусть $\{e_i\}$ – базис в E . Ограниченное подмножество $C \subset E$ относительно компактно в E только тогда, когда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in C} \|P_n x\| = 0. \quad (2.16)$$

Доказательство. Если C – предкомпактно, то по критерию Хаусдорфа [135, с. 47] для всякого $\varepsilon > 0$ существует конечная $\frac{\varepsilon}{2M}$ -сеть $\{x^{(j)}\}$, $j = 1, 2, \dots, m(\varepsilon)$. Это означает, что для всякого $x \in C$ найдется $j \leq m(\varepsilon)$, при котором $\|x - x^{(j)}\| < \frac{\varepsilon}{2M}$, т.е.

$$\|P_n x\| = \|P_n(x - x^{(j)}) + P_n x^{(j)}\| \leq \|P_n\| \frac{\varepsilon}{2M} + \|P_n x^{(j)}\| < \frac{\varepsilon}{2} + \|P_n x^{(j)}\|. \quad (2.17)$$

Покажем теперь, что для достаточно больших n справедливо неравенство $\|P_n x^{(j)}\| < \frac{\varepsilon}{2}$ при каждом $j = 1, 2, \dots, m(\varepsilon)$. В самом деле, поскольку $\{e_i\}$ – базис, то каждый элемент сети представим сходящимся рядом:

$$x^{(j)} = \sum_{i=1}^{\infty} c_i^{(j)} e_i. \quad (2.18)$$

По определению оператора P_n ,

$$\|P_n x^{(j)}\| = \left\| \sum_{i=n+1}^{\infty} c_i^{(j)} e_i \right\|.$$

Последнее выражение не превосходит $\frac{\varepsilon}{2}$, начиная с некоторого индекса $n = n(\varepsilon)$, поскольку каждый ряд (2.18) сходится по норме пространства E . Таким образом, из (2.17) следует $\|P_n x\| < \varepsilon$ при $n \geq n(\varepsilon)$, что доказывает (2.16).

Обратно, если множество C ограничено, то все конечномерные проекции

$$C_n = \{S_n x \mid x \in C\}, \quad n = 1, 2, \dots$$

предкомпактны. Из соотношения (2.16) следует, что для всякого $\varepsilon > 0$ при достаточно больших n любая конечная ε -сеть множества C_n может быть использована для покрытия C , что доказывает лемму.

Будем называть C_0 -полугруппу линейных операторов $\{e^{tA}\}_{t \geq 0}$ в E *равномерно ограниченной* [125, с. 8], если

$$\|e^{tA}\| \leq N, \quad \forall t \geq 0,$$

при некоторой константе $N < \infty$.

Лемма 2.4. Пусть $\{e_i\}$ – базис в E , C – компактное подмножество E , $\{e^{tA}\}_{t \geq 0}$ – равномерно ограниченная C_0 -полугруппа линейных операторов в E , для которой траектории $\gamma(x_0) = \{e^{tA}x_0 \mid t \geq 0\}$ предкомпактны при всех $x_0 \in C$. Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{t \geq 0, x \in C} \|P_n e^{tA} x\| \right) = 0. \quad (2.19)$$

Доказательство. Согласно лемме 2.3, для доказательства (2.19) достаточно установить предкомпактность множества

$$K = \{e^{tA}x \mid x \in C, t \geq 0\}.$$

Пусть $\{y_n\}$ – последовательность элементов из K , т.е. $y_n = e^{t_n A} x_n$ при некоторых $\{t_n\} \subset [0, +\infty)$, $\{x_n\} \subset C$, $n = 1, 2, \dots$. Из компактности C следует существование сходящейся подпоследовательности $x_{n(k)} \rightarrow x^* \in C$ при $k \rightarrow \infty$. Предкомпактность траектории $\gamma(x^*)$ обеспечивает существование сходящейся подпоследовательности $e^{t_{n(k(m))} A} x_{n(k(m))} \rightarrow y^* \in E$ при $m \rightarrow \infty$. Используя равномерную ограниченность полугруппы $\{e^{tA}\}_{t \geq 0}$, заключаем, что $e^{t_{n(k(m))} A} x_{n(k(m))} \rightarrow y^*$ при $m \rightarrow \infty$. Лемма 2.4 доказана.

2.3.2 Предкомпактность траекторий возмущенной задачи

По определению [125, с. 184], *обобщенным (mild) решением* неоднородной задачи (2.15) на промежутке $0 \leq t < T \leq +\infty$ называется непрерывная функция $x : [0, T) \rightarrow E$, удовлетворяющая интегральному уравнению

$$x(t) = e^{tA}x_0 + \int_0^t e^{(t-s)A} f(s) R(x(s), s) ds. \quad (2.20)$$

Интеграл в формуле (2.20) понимается в смысле Бохнера [46, с. 100]. Имеет место достаточное условие предкомпактности траекторий возмущенного дифференциального уравнения.

Теорема 2.3. [17] Пусть E – банахово пространство с базисом, A – инфинитезимальный генератор равномерно ограниченной C_0 -полугруппы линейных операторов $\{e^{tA}\}_{t \geq 0}$ в E , $f \in L^1[0, +\infty)$, $R(x, t) \in K$ при всех $x \in E$, $t \geq 0$, K – компакт. Предположим также, что множества $\{e^{tA}y \mid t \geq 0\}$ предкомпактны при всех $y \in K \cup \{x_0\}$.

Тогда всякое обобщенное решение $x(t)$, $t \in [0, +\infty)$ задачи (2.15) содержится в некотором компактном подмножестве E .

Доказательство. Пусть $x(t)$ – обобщенное решение (2.15) на полуинтервале $t \geq 0$. Из интегрального уравнения (2.20) следует, что компактность $\{e^{tA}x_0 \mid t \geq 0\}$ и условия $f \in L^1[0, +\infty)$, $R \in K$ обеспечивают ограниченность решения $x(t)$. По лемме 2.3, для доказательства предкомпактности траектории $\{x(t) \mid t \geq 0\}$ достаточно выбрать какой-либо базис $\{e_i\}$ в E и установить существование предела

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \geq 0} \|P_n x(t)\| = 0.$$

Применяя оператор проектирования к обеим частям (2.20), получим

$$\begin{aligned} \|P_n x(t)\| &\leq \|P_n e^{tA} x_0\| + \left\| \int_0^t f(s) P_n \left(e^{(t-s)A} R(x(s), s) \right) ds \right\| \leq \\ &\leq \|P_n e^{tA} x_0\| + \|f\|_{L^1} \cdot \sup_{s \in [0, t], y \in K} \|P_n e^{sA} y\|. \end{aligned}$$

Доказательство завершается применением лемм 2.3 и 2.4.

Определенный класс автономных дифференциальных уравнений с нелинейным инфинитезимальным генератором можно привести к виду (2.15) и построить оценку соответствующей функции $f(t)$ на решениях уравнения методом функционалов Ляпунова. Сформулируем основной результат в этом направлении для абстрактной задачи Коши:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + h(x(t))B(x(t)), \quad x(0) = x_0 \in E, \quad (2.21)$$

где $h : E \rightarrow \mathbb{R}$, $B : E \rightarrow E$ – локально липшицевы отображения. Напомним, что отображения $h(x)$, $B(x)$ называются *локально липшицевыми*, если для

всякого $r \geq 0$ существует константа $L(r)$ такая, что

$$|h(x) - h(y)| \leq L(r)\|x - y\|, \|B(x) - B(y)\| \leq L(r)\|x - y\|$$

при всех $\|x\| \leq r, \|y\| \leq r$. Если $w : E \rightarrow \mathbb{R}$ – дифференцируемый (по Фреше) функционал, то функция времени $w(x(t))$ дифференцируема на каждом классическом решении $x(t)$ задачи (2.21). Тогда для любого $x \in D(A) \subset E$ производную w в силу (2.21) можно записать следующим образом [75, с. 100]:

$$\dot{w}(x) = (Ax + B(x)h(x), \nabla_x w),$$

где $(\cdot, \cdot) : E \times E^* \rightarrow \mathbb{R}$ – двойственное спаривание E и E^* , т.е. $(\xi, \nabla_x w)$ – значение линейного функционала $\nabla_x w \in E^*$ в точке $\xi \in E$.

Теорема 2.4. [17] Пусть E – банахово пространство с базисом, A – инфинитезимальный генератор равномерно ограниченной C_0 -полугруппы линейных операторов $\{e^{tA}\}_{t \geq 0}$ в E , множества $\{e^{tA}y \mid t \geq 0\}$ предкомпактны при всех $y \in E$, $B : E \rightarrow E$ – вполне непрерывный оператор. Предположим, что существует дифференцируемый функционал $w : E \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющий условиям:

- 1) множества $M_c = \{x \mid w(x) \leq c\}$ ограничены при всех $c \in \mathbb{R}$;
- 2) $\inf_{\|x\| \leq r} w(x) > -\infty$ при любом $r > 0$;
- 3) существует константа $k_1 > 0$ такая, что

$$\dot{w}(x) \leq k_1 h(x) \leq 0, \forall x \in D(A).$$

Тогда для любого $x_0 \in E$ задача Коши (2.21) имеет единственное решение $x(t)$ на $[0, +\infty)$, при этом $\{x(t) \mid t \geq 0\}$ – предкомпактное подмножество пространства E .

Доказательство. Согласно теореме 1.4 из [125, с. 185], для каждого $x_0 \in E$ существует единственное максимальное обобщенное решение $x(t)$

задачи (2.21) при $t \in [0, t_{max})$. Условия 1) и 3) обеспечивают ограниченность $x(t)$, поэтому $t_{max} = +\infty$. Положим $R(x, t) = B(x)$, $f(t) = h(x(t))$ в уравнении (2.15). Тогда условия 2) и 3) обеспечивают свойство $f \in L^1[0, +\infty)$. Таким образом, траектория $\{x(t) \mid t \geq 0\}$ предкомпактна в E по теореме 2.3. Теорема доказана.

Отметим, что поскольку множества M_c инвариантны при выполнении условия $\dot{w}(x) \leq 0$, то теорема 2.4 допускает локальную формулировку в подмножестве пространства E , расположенном между поверхностями уровня функционала w .

2.4 Выводы

В разделе 2 разработаны методы исследования задачи о частичной асимптотической устойчивости по отношению к непрерывному функционалу для класса абстрактных динамических процессов с многозначными решениями на метрическом пространстве. Рассмотренный класс процессов является обобщением математических моделей движения управляемых систем с распределенными параметрами. Результаты данного раздела опубликованы в статьях [12, 17] и докладывались на международных конференциях [25, 28, 30, 37].

Выделим основные научные положения раздела 2.

1. Впервые введено понятие многозначной динамической системы на метрическом пространстве (определение 2.1) и поставлена задача о частичной устойчивости такой системы по отношению к непрерывному функционалу (определение 2.5). Введенный класс систем может быть использован для описания решений автономных систем обыкновенных дифференциальных уравнений, уравнений с частными производными, дифференциальных включений, уравнений с запаздыванием.
2. В отличие от известного подхода к определению многозначных потоков [117, с. 95], значениями введенного в определении 2.1 многознач-

- ного отображения являются множества функций (а не подмножества пространства X). Кроме того, в определении 2.1 введены дополнительные условия непрерывности, что позволило эффективно расширить область применения прямого метода Ляпунова.
3. Введенное определение частичной устойчивости (определение 2.5) связано с развитием абстрактного подхода А.А. Мовчана [70], Т.К. Сиразетдинова [74], А.А. Мартынюка [73, с. 223], А.А. Шестакова [75, С. 55–56] к определению устойчивости по двум метрикам, но для динамических процессов с *многозначными* решениями. В отличие от подхода А.А. Мовчана, в определении 2.5 не предполагается, что функционал y соответствует некоторой метрике. Отсутствие условия положительной определенности функционала y позволяет рассматривать определение 2.5 как обобщение понятия асимптотической устойчивости по части переменных в смысле А.М. Ляпунова и В.В. Румянцева [51, с. 16] на случай многозначных бесконечномерных систем.
 4. При условии существования непрерывного функционала Ляпунова доказаны обобщения принципа инвариантности ЛаСалля [78] (лемма 2.2) и теоремы Барбашина – Красовского [136] (теорема 2.1) на случай частичной асимптотической устойчивости многозначной динамической системы. В случае существования дифференцируемого функционала Ляпунова получены достаточные условия частичной асимптотической устойчивости непрерывных полугрупп в банаховом пространстве (теорема 2.2). Теорема 2.2 обобщает результат К. Ризито и В.В. Румянцева [51, теоремы 19.1, 19.2] на случай частичной устойчивости бесконечномерной системы.

5. С помощью прямого метода Ляпунова впервые получены достаточные условия относительной компактности полутраекторий нелинейной системы в банаховом пространстве (теоремы 2.3 и 2.4). Доказанное свойство относительной компактности траекторий позволяет в дальнейшем исследовать ω -предельные множества решений задачи вида (2.15) с помощью теоремы 2.2.

Приведенные результаты используются в последующих разделах диссертации при синтезе функционалов управления с обратной связью для уравнений движения сложных механических систем с упругими элементами.

3 Управление и стабилизация вращающегося тела с балками Эйлера – Бернулли

В данном разделе исследованы задачи управляемости, а также сильной и частичной стабилизации для механической системы, состоящей из вращающегося твердого тела и произвольного числа балок Эйлера – Бернулли.

3.1 Движение твердого тела с упругими балками

Рассмотрим твердое тело, совершающее плоское вращение около неподвижной точки O под действием управляющего момента M (рис. 3.1). К телу прикреплены k упругих балок (число $k \geq 1$ может быть произвольным).

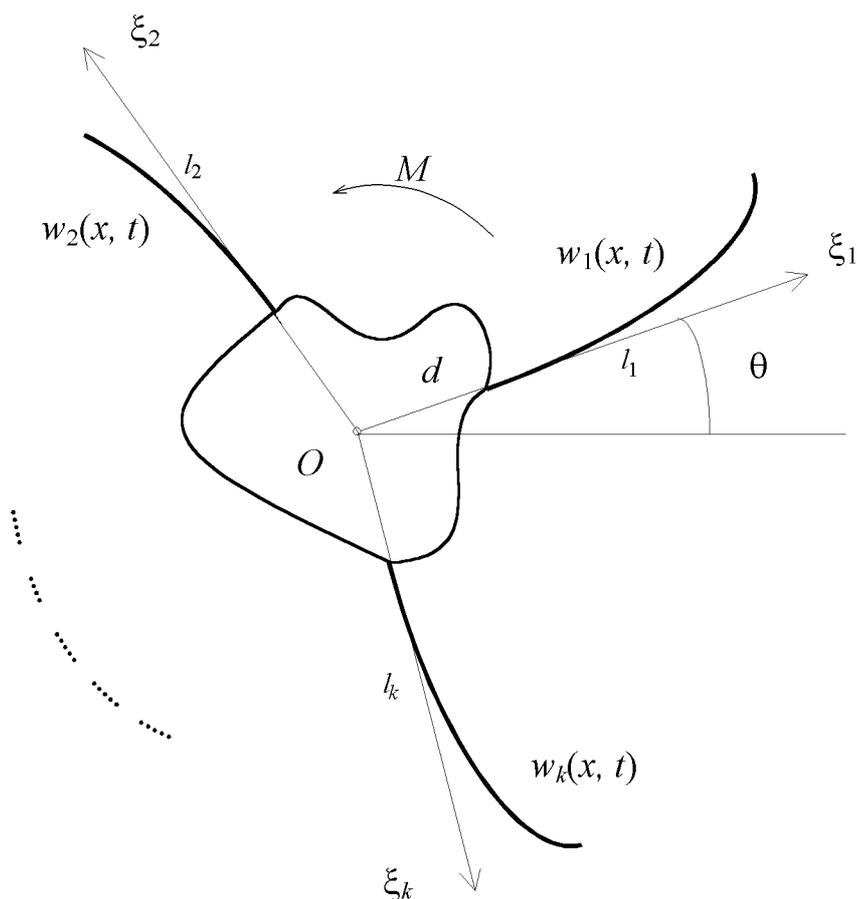


Рис. 3.1. Твердое тело с упругими балками.

Предположим, что каждая балка закреплена на расстоянии d от точки O , и что l_i – длина i -й балки. Обозначим, соответственно, через $\theta(t)$ и

$w_i(x, t)$ угол поворота тела и отклонение центральной линии i -й балки от оси $O_i\xi_i$ в точке $x \in [0, l_i]$ в момент времени $t \geq 0$. Будем предполагать, что в недеформированном состоянии центральная линия i -й балки лежит на оси $O_i\xi_i$. Движение рассматриваемой механической системы определяется функциями

$$\theta(t), w_i(x, t), \quad x \in [0, l_i], t \geq 0, i = \overline{1, k}.$$

При выводе уравнений движения будем использовать модель упругой балки Эйлера – Бернулли (см. [3, с. 373], [105, с. 1142])

Полагая, что каждая балка жестко закреплена одним из своих концов в точке крепления к твердому телу, запишем граничные условия следующего вида [3, с. 382]:

$$w_i \Big|_{x=0} = \frac{\partial w_i}{\partial x} \Big|_{x=0} = \frac{\partial^2 w_i}{\partial x^2} \Big|_{x=l_i} = \frac{\partial^3 w_i}{\partial x^3} \Big|_{x=l_i} = 0, \quad i = \overline{1, k}. \quad (3.1)$$

Для вывода уравнений движения рассматриваемой механической системы представим поперечные перемещения $w_i(x, t)$ в виде ряда Фурье по некоторым базисным функциям $\{u_{in}(x)\}$ в $L^2(0, l_i)$:

$$w_i(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_{in}(x)q_{in}(t), \quad (3.2)$$

при этом будем рассматривать коэффициенты разложения $q_{in}(t)$ в качестве обобщенных координат. Для каждой балки с номером $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, определим $u_{in}(x)$ в виде собственных функций задачи Штурма – Лиувилля:

$$\frac{d^4}{dx^4} u_{in}(x) = \lambda_{in} u_{in}(x), \quad x \in (0, l_i), \quad (3.3)$$

$$u_{in}(0) = u'_{in}(0) = u''_{in}(l_i) = u'''_{in}(l_i) = 0. \quad (3.4)$$

Известно, что при каждом фиксированном $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ такая задача имеет счетный набор собственных значений $\lambda_{in} \in \mathbb{R}$, обладающих свойствами

$$0 < \lambda_{i1} < \lambda_{i2} < \dots < \lambda_{in} < \dots$$

и

$$\lambda_{in} = O(n^4) \quad \text{при } n \rightarrow \infty, \quad (3.5)$$

а соответствующие собственные функции $\{u_{in}(x)\}_{n=1}^{\infty}$ образуют ортогональный базис в $L^2(0, l_i)$ (см. [83, с. 176], [45, с. 11]). Таким образом, всякое поперечное перемещение $w_i(x, t)$, для которого $w_i(\cdot, t) \in L^2(0, l_i)$ при фиксированных t , представимо в виде (3.2) единственным образом.

Для описания свойств решений задачи (3.3), (3.4) рассмотрим аналогичную задачу Штурма – Лиувилля на отрезке $x \in [0, 1]$:

$$\frac{d^4}{dx^4}\phi_n(x) = \beta_n^4\phi_n(x), \quad x \in (0, l_i),$$

$$\phi_n(0) = \phi_n'(0) = \phi_n''(1) = \phi_n'''(1) = 0.$$

Пусть, соответственно, β_n^4 и $\phi_n(x)$ – собственные значения и собственные функции этой задачи при $n = 1, 2, \dots$. Тогда β_n удовлетворяют следующему трансцендентному уравнению [83, с. 176], [3, с. 382]:

$$1 + \cos(\beta_n) \cosh(\beta_n) = 0, \quad (3.6)$$

а функции ϕ_n (с точностью до константы) представимы в виде [83, с. 176]:

$$\phi_n(x) = -\frac{1 + \gamma_n}{2}e^{\beta_n x} - \frac{1 - \gamma_n}{2}e^{-\beta_n x} + \gamma_n \sin(\beta_n x) + \cos(\beta_n x),$$

где

$$\gamma_n = -\frac{e^{\beta_n} - \sin \beta_n + \cos \beta_n}{e^{\beta_n} + \sin \beta_n + \cos \beta_n} < 0. \quad (3.7)$$

Совершая замену x на x/l_i в задаче (3.3), (3.4), получим представления для λ_{in} и $u_{in}(x)$ через β_n и $\phi_n(x/l_i)$:

$$\lambda_{in} = (\beta_n/l_i)^4, \quad u_{in}(x) = k_{in}\phi_n(x/l_i), \quad (3.8)$$

где константы k_{in} подберем из условия нормировки $u_{in}(x)$ в $L^2(0, l_i)$:

$$\|u_{in}\|_{L^2(0, l_i)}^2 = \int_0^{l_i} u_{in}^2(x) dx = 1.$$

Отсюда следует, что

$$k_{in} = \pm l_i^{-1/2} (\|\phi_n\|_{L^2(0,1)})^{-1}. \quad (3.9)$$

Для вывода уравнений движения воспользуемся лагранжевым формализмом в обобщенных координатах θ , q_{in} . Эквивалентность уравнений Лагранжа второго рода и принципа Гамильтона – Остроградского обоснована для широкого класса упругих систем в работах [60, 158]. Учитывая ортогональность собственных форм $u_{in}(x)$ поперечных колебаний балок, запишем лагранжиан рассматриваемой механической системы:

$$\begin{aligned}
2L &= J\dot{\theta}^2 + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^k \left(\rho_i (\dot{q}_{in}^2 + \dot{\theta}^2 q_{in}^2) + 2J_{in} \dot{\theta} \dot{q}_{in} \right) - 2U, \\
2U &= \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^k E_i I_i \lambda_{in} q_{in}^2, \\
J &= J_0 + \sum_{i=1}^k \int_0^{l_i} (x+d)^2 \rho_i dx, \\
J_{in} &= \int_0^{l_i} (x+d) u_{in}(x) \rho_i dx = \rho_i l_i^2 k_{in} \int_0^1 s \phi_n(s) ds + \rho_i l_i d k_{in} \int_0^1 \phi_n(s) ds.
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Здесь $J_0 > 0$ – момент инерции твердого тела-носителя, U – потенциальная энергия упругих сил. Величины I_i , E_i и ρ_i обозначают, соответственно, момент инерции сечения, модуль Юнга и линейную плотность (массу на единицу длины) i -й балки. В данном разделе предполагаем, что все величины $E_i \cdot I_i$ и ρ_i являются положительными константами. Из леммы 4.6 монографии [83, с. 176] вытекает, что

$$\int_0^1 s \phi_n(s) ds = -2\beta_n^{-2} < 0, \quad \int_0^1 \phi_n(s) ds = 2\gamma_n \beta_n^{-1} < 0.$$

Следовательно,

$$J_{in} = 2\rho_i l_i k_{in} \beta_n^{-1} (d\gamma_n - l_i \beta_n^{-1}) = O(n^{-1}) \neq 0. \tag{3.11}$$

Запишем уравнения Лагранжа второго рода для рассматриваемой механической системы [4]:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = J\ddot{\theta} + \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^k \left(\rho_i \ddot{\theta} q_{in}^2 + 2\rho_i \dot{\theta} \dot{q}_{in} \dot{q}_{in} + J_{in} \ddot{q}_{in} \right) = M;$$

$$J_{in}\ddot{\theta} + \rho_i\ddot{q}_{in} + \rho_i(\lambda_{in}c_i^2 - \dot{\theta}^2)q_{in} = 0, \quad i = \overline{1, k}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (3.12)$$

где $c_i^2 = E_i I_i / \rho_i$ – положительные константы. Здесь M – управляющий момент, приложенный к телу. Отметим, что система дифференциальных уравнений вида (3.12) была получена в работе [31] с помощью применения вариационного принципа Гамильтона – Остроградского и формальной подстановки рядов (3.2) в соответствующие дифференциальные уравнения с частными производными.

С целью упрощения уравнений движения, перейдем от момента M к новому управляющему параметру v посредством следующего преобразования с обратной связью:

$$v = \frac{M + \sum_{i=1}^k \sum_{n=1}^{\infty} \left[J_{in}(\lambda_{in}c_i^2 - \dot{\theta}^2) - 2\rho_i\dot{\theta}\dot{q}_{in} \right] q_{in}}{J + \sum_{i=1}^k \sum_{n=1}^{\infty} (\rho_i q_{in}^2 - J_{in}^2 / \rho_i)}. \quad (3.13)$$

Отметим, что знаменатель выражения (3.13) положителен. Действительно, используя определение J , J_{in} в формуле (3.10) и равенство Парсеваля для функций $u_{in}(x)$ [46, с. 184], получим

$$\sum_{i=1}^k \int_0^{l_i} (x+d)^2 dx = \sum_{i=1}^k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_{in}^2}{\rho_i^2}.$$

Отсюда

$$J - \sum_{i=1}^k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_{in}^2}{\rho_i} = J_0 > 0. \quad (3.14)$$

Условие конечности потенциальной и кинетической энергии системы накладывает следующее ограничение на упругие координаты и их производные:

$$\sum_{i=1}^k \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_{in}(q_{in})^2 < \infty, \quad \sum_{i=1}^k \sum_{n=1}^{\infty} \dot{q}_{in}^2 < \infty.$$

Чтобы удовлетворить этим неравенствам, совершим замену переменных

$$\xi_{in} = c_i \sqrt{\lambda_{in}} q_{in}, \quad \eta_{in} = \dot{q}_{in}, \quad \omega = \dot{\theta},$$

и будем предполагать, что

$$\sum_{i=1}^k \sum_{n=1}^{\infty} (\xi_{in}^2 + \eta_{in}^2) < \infty. \quad (3.15)$$

В новых переменных система дифференциальных уравнений (3.12) запишется следующим образом:

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= \omega, \quad \dot{\omega} = v, \\ \dot{\xi}_{in} &= c_i \sqrt{\lambda_{in}} \eta_{in}, \\ \dot{\eta}_{in} &= -c_i \sqrt{\lambda_{in}} \xi_{in} + \frac{\omega^2 \xi_{in}}{c_i \sqrt{\lambda_{in}}} - \frac{J_{in}}{\rho_i} v, \quad i = 1, 2, \dots, k, \quad n = 1, 2, \dots\end{aligned}\quad (3.16)$$

Для записи системы (3.16) в операторном виде обозначим бесконечный вектор-столбец

$$x = (\theta, \omega, \xi_{11}, \eta_{11}, \dots, \xi_{k1}, \eta_{k1}, \xi_{12}, \eta_{12}, \dots)^T.$$

Множество всех таких столбцов, удовлетворяющих ограничению (3.15), будем обозначать через ℓ^2 . Для элементов $x \in \ell^2$,

$$\tilde{x} = (\tilde{\theta}, \tilde{\omega}, \tilde{\xi}_{11}, \tilde{\eta}_{11}, \dots, \tilde{\xi}_{k1}, \tilde{\eta}_{k1}, \tilde{\xi}_{12}, \tilde{\eta}_{12}, \dots)^T \in \ell^2$$

определим скалярное произведение по формуле:

$$\langle x, \tilde{x} \rangle = \theta \tilde{\theta} + \omega \tilde{\omega} + \sum_{i=1}^k \sum_{n=1}^{\infty} (\xi_{in} \tilde{\xi}_{in} + \eta_{in} \tilde{\eta}_{in}).$$

Известно, что линейное пространство ℓ^2 с таким скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$ является гильбертовым пространством [46, с. 180].

Запишем нелинейную систему (3.16) в операторном виде:

$$\dot{x} = Ax + R(x)x + bv, \quad x \in \ell^2, \quad v \in \mathbb{R}, \quad (3.17)$$

где $x = (\theta, \omega, \xi_{11}, \eta_{11}, \dots, \xi_{k1}, \eta_{k1}, \xi_{12}, \eta_{12}, \dots)^T \in \ell^2$ – фазовый вектор системы, $v \in \mathbb{R}^1$ – управление. Здесь линейный неограниченный оператор $A : D(A) \rightarrow \ell^2$ задан блочно-диагональной матрицей

$$A = \text{diag}(A_0, A_{11}, \dots, A_{k1}, A_{12}, \dots, A_{k2}, \dots),$$

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_{in} = \begin{pmatrix} 0 & c_i \sqrt{\lambda_{in}} \\ -c_i \sqrt{\lambda_{in}} & 0 \end{pmatrix}, \quad (i = \overline{1, k}, \quad n \in \mathbb{N}).$$

Бесконечная матрица оператора $R(x)$ и столбец b также имеют блочный вид:

$$R(x) = \text{diag}(O_{2 \times 2}, R_{11}(x), \dots, R_{k1}(x), R_{12}(x), \dots, R_{k2}, \dots),$$

$$R_{in}(x) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \frac{\omega^2}{c_i \sqrt{\lambda_{in}}} & 0 \end{pmatrix},$$

$$b = (0, 1, 0, -\frac{J_{11}}{\rho_1}, 0, -\frac{J_{21}}{\rho_2}, \dots, 0, -\frac{J_{k1}}{\rho_k}, 0, -\frac{J_{12}}{\rho_1}, \dots)^T.$$

В формуле (3.17) используются стандартные операции умножения матрицы на столбец. Поскольку J_{in}/ρ_i являются коэффициентами Фурье функции

$$\phi(x) = x + d \in L^2(0, l_i)$$

по полной ортонормированной системе $\{u_{in}(x)\}_{n=1}^{\infty}$ [46, с. 184], то

$$\sum_{n=1}^{\infty} J_{in}^2 < \infty$$

при всех $1 \leq i \leq k$, а значит, $b \in \ell^2$.

Область определения $D(A) \subset \ell^2$ оператора A состоит из тех $x \in \ell^2$, при которых $Ax \in \ell^2$, т.е.

$$D(A) = \{x \in \ell^2 : \sum_{i=1}^k \sum_{n=1}^{\infty} c_i^2 \lambda_{in} (\eta_{in}^2 + \xi_{in}^2) < \infty\}.$$

В частности, $D(A)$ содержит все векторы x , у которых отлично от нуля лишь конечное число координат, следовательно, $D(A)$ плотно в ℓ^2 .

Покажем, что преобразование (3.13) определено при всех $x \in D(A)$. Действительно, из неравенства Коши – Буняковского и оценок (3.5), (3.11) следует, что

$$\left| \sum_{i=1}^k \sum_{n=1}^{\infty} J_{in} (\lambda_{in} c_i^2 - \theta^2) q_{in} \right| \leq$$

$$\leq \left(\sum_{i,n} J_{in}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^k \sum_{n=1}^{\infty} \left(c_i^2 \lambda_{in} + \frac{\omega^4}{c_i^2 \lambda_{in}} \right) \xi_{in}^2 \right)^{1/2} < \infty,$$

$$\left| \sum_{i=1}^k \sum_{n=1}^{\infty} q_{in} \dot{q}_{in} \right| \leq \left(\sum_{i=1}^k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi_{in}^2}{c_i^2 \lambda_{in}} \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^k \sum_{n=1}^{\infty} \eta_{in}^2 \right)^{1/2} < \infty,$$

а значит, числитель выражения (3.13) конечен при всех $x \in D(A)$.

3.2 Анализ управляемости

Если отбросить нелинейные слагаемые в правой части системы (3.17), то получим систему линейного приближения в окрестности нуля следующего вида:

$$\dot{x} = Ax + bv, \quad (3.18)$$

где $x = (\theta, \omega, \xi_{11}, \eta_{11}, \dots, \xi_{k1}, \eta_{k1}, \xi_{12}, \eta_{12}, \dots)^T \in \ell^2$ – фазовый вектор линейной системы, $v \in \mathbb{R}^1$ – управление.

Представим оператор A в виде суммы блочно-диагональных операторов:

$$A = \hat{A}_0 + \hat{A},$$

$$\hat{A}_0 = \text{diag}(A_0, 0, 0, \dots), \quad \hat{A} = \text{diag}(0, A_{11}, \dots, A_{k1}, A_{12}, \dots, A_{k2}, \dots).$$

Отметим, что неограниченный оператор $\hat{A} : D(A) \rightarrow \ell^2$ диссипативен (в соответствии с определением 1.7 на с. 42):

$$\langle \hat{A}x, x \rangle = \sum_{i=1}^k \sum_{n=1}^{\infty} c_i \sqrt{\lambda_{in}} (\eta_{in} \xi_{in} - \xi_{in} \eta_{in}) = 0, \quad \forall x \in D(\hat{A}) = D(A).$$

Легко видеть, что сопряженный к \hat{A} оператор

$$\hat{A}^* = \text{diag}(0, A_{11}^*, \dots, A_{k1}^*, A_{12}^*, \dots, A_{k2}^*, \dots)$$

также диссипативен. По утверждению 1.8 (с. 43), линейный неограниченный оператор \hat{A} является инфинитезимальным генератором C_0 -полугруппы операторов $\{e^{t\hat{A}}\}_{t \geq 0}$ в ℓ^2 . Поскольку оператор \hat{A}_0 ограничен, то по теореме об ограниченном возмущении инфинитезимального генератора [125, с. 76], $A = \hat{A}_0 + \hat{A}$ является инфинитезимальным генератором C_0 -полугруппы операторов $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ в ℓ^2 . Аналогичные рассуждения показывают, что сопряженный оператор A^* также порождает C_0 -полугруппу $\{S(t)^*\}_{t \geq 0}$ в ℓ^2 .

Определение 3.1. [115, 159], [123, с. 260] Будем называть состояние $x \in \ell^2$ системы (3.18) *приближенно управляемым*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдутся такие $\tau > 0$ и $v(\cdot) \in L^2(0, \tau)$, что

$$\left\| x - \int_0^\tau S(t-s)bv(s) \right\| ds < \varepsilon.$$

Система (3.18) называется *приближенно управляемой*, если множество всех ее приближенно управляемых состояний совпадает с ℓ^2 .

Имеет место критерий управляемости.

Теорема 3.1. [159] Для системы $\dot{x} = Ax + bi$ в гильбертовом пространстве H следующие два условия эквивалентны:

- (i) система $\dot{x} = Ax + bi$ не является приближенно управляемой;
- (ii) сопряженная полугруппа операторов $\{S(t)^*\}_{t \geq 0}$ имеет нетривиальное инвариантное подпространство в $\text{Ker } b^*$.

Для дальнейших рассуждений нам потребуется вспомогательная лемма.

Лемма 3.1. [11] Пусть

$$c_i^2 \lambda_{in} \neq c_j^2 \lambda_{jm} \quad (3.19)$$

для всех $(i, n) \neq (j, m)$. Тогда для всякого $\tau > 0$ система функций

$$\{1, t, \sin(c_i \sqrt{\lambda_{in} t}), \cos(c_i \sqrt{\lambda_{in} t}) : t \in [0, \tau], i = \overline{1, k}, n = 1, 2, \dots\} \quad (3.20)$$

линейно-независима на $[0, \tau]$.

Доказательство. Для доказательства воспользуемся теоремой 1.2.17 из монографии [160], которая формулируется следующим образом: если

$$\limsup_{y \rightarrow \infty} \limsup_{z \rightarrow \infty} \frac{n[y, y+z]}{z} < \frac{\tau}{2\pi}, \quad (3.21)$$

то система (3.20) минимальна в $L^2(0, \tau)$. Здесь $n[a, b]$ обозначает мощность множества $[a, b) \cap \Lambda$,

$$\Lambda = \{c_i \sqrt{\lambda_{in}} : i = \overline{1, k}, n \in \mathbb{N}\}.$$

Для доказательства (3.21) заметим, что $\lambda_{in} = (\beta_n/l_i)^4$, где β_n удовлетворяют трансцендентному уравнению вида (3.6), т.е.

$$\cos(\lambda_{in}^{1/4}l_i) \operatorname{ch}(\lambda_{in}^{1/4}l_i) = -1.$$

Отсюда следует следующее асимптотическое представление

$$\lambda_{in} = \left(\frac{\pi}{2l_i}\right)^4 (2n-1)^4 + \Delta_{in}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (3.22)$$

где $\Delta_{in} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Подставляя (3.22) в (3.21), получим

$$\limsup_{y \rightarrow \infty} \limsup_{z \rightarrow \infty} \frac{n[y, y+z]}{z} = 0.$$

Отсюда на основании теоремы 1.2.17 из [160] следует утверждение леммы.

Докажем теперь признак управляемости системы (3.18).

Теорема 3.2. [11] *Пусть выполнено предположение (3.19). Тогда система (3.18) приближенно управляема.*

Доказательство. Непосредственно из определения b в системе (3.17) следует, что

$$\operatorname{Ker} b^* = \{x^* \in \ell^{2*} : \omega = \sum_{i=1}^k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_{in}\eta_{in}}{\rho_i}\}. \quad (3.23)$$

Используя блочную структуру оператора A^* , приходим к выводу, что действие сопряженной полугруппы $S^*(t)$ на элемент $x(0)^* \in \ell^{2*} = \ell^2$ задается следующими выражениями

$$\begin{aligned} \theta(t) &= \theta(0), \quad \omega(t) = \theta(0)t + \omega(0), \\ \eta_{in}(t) &= \xi_{in}(0) \sin(c_i \sqrt{\lambda_{in}t}) + \eta_{in}(0) \cos(c_i \sqrt{\lambda_{in}t}), \\ \xi_{in}(t) &= \xi_{in}(0) \cos(c_i \sqrt{\lambda_{in}t}) - \eta_{in}(0) \sin(c_i \sqrt{\lambda_{in}t}), \\ i &= \overline{1, k}, \quad n \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (3.24)$$

Предположим, что $S(t)^*$ имеет инвариантное подпространство

$$S_0 \subseteq \operatorname{Ker} b^*.$$

Пусть $x(0)^* \in S_0$, тогда из (3.23), (3.24) следует

$$-\omega(0) - \theta(0)t + \sum_{i=1}^k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_{in}}{\rho_i} \left(\xi_{in}(0) \sin(c_i \sqrt{\lambda_{in} t}) + \eta_{in}(0) \cos(c_i \sqrt{\lambda_{in} t}) \right) \equiv 0 \quad (3.25)$$

при всех $t \geq 0$. Если выполнено условие (3.19), то на основании леммы 3.1 из (3.25) следует равенство

$$\theta(0) = \omega(0) = J_{in}\eta_{in}(0) = J_{in}\xi_{in}(0) = 0.$$

Поскольку по формуле (3.11) $J_{in} \neq 0$ для всех (i, n) , то $x(0)^* = 0$. Это означает, что $S_0 = \{0\}$, а значит система (3.18) приближенно управляема по теореме 3.1. Теорема доказана.

3.3 Стабилизация с обратной связью

В данном подразделе будет получено управление с обратной связью, которое обеспечивает сильную асимптотическую устойчивость особой точки $x = 0$ нелинейной системы (3.17). Отметим, что оператор A не является диссипативным в ℓ^2 со стандартной нормой, а значит порожденная им S_0 -полугруппа не является сжимающей согласно теореме Люмера – Филлипса (утверждение 1.7 на с. 43). Следовательно, прямое использование известных методов стабилизации линейных сжимающих [115, 159] и спектральных [161, 162] систем не подходит для нашего случая.

Для исследования нелинейной системы (3.17) рассмотрим функционал в виде полной энергии с добавочными слагаемыми:

$$2V(x) = c_0\theta^2 + J\omega^2 + \sum_{i=1}^k \sum_{n=1}^{\infty} (\rho_i \xi_{in}^2 + \rho_i \eta_{in}^2 + 2J_{in}\omega\eta_{in}), \quad (3.26)$$

где c_0 – произвольная положительная константа. Запишем неравенство Коши – Буняковского в ℓ^2 :

$$\left| \sum_{i=1}^k \sum_{n=1}^{\infty} J_{in}\eta_{in} \right| \leq \left(\sum_{i,n} \frac{J_{in}^2}{\rho_i} \right)^{1/2} \left(\sum_{i,n} \eta_{in}^2 \rho_i \right)^{1/2}.$$

Из приведенного неравенства и формулы (3.26) вытекает, что

$$\begin{aligned} G \left(-|\omega|, \left(\sum_{i,n} \rho_i \eta_{in}^2 \right)^{1/2} \right) &\leq 2V(x) - c_0 \theta^2 - \sum_{i,n} \rho_i \xi_{in}^2 \leq \\ &\leq G \left(|\omega|, \left(\sum_{i,n} \rho_i \eta_{in}^2 \right)^{1/2} \right), \end{aligned} \quad (3.27)$$

где квадратичная форма G определена следующим образом:

$$G(a, b) = Ja^2 + 2 \left(\sum_{i,n} \frac{J_{in}^2}{\rho_i} \right)^{1/2} ab + b^2.$$

Вычислим главные миноры матрицы квадратичной формы G :

$$\Delta_1 = J > 0, \quad \Delta_2 = J - \sum_{i,n} \frac{J_{in}^2}{\rho_i} = J_0 > 0.$$

Здесь использовано представление (3.14). Согласно критерию Сильвестра, G – положительно - определенная квадратичная форма, т.е.

$$\alpha_1(a^2 + b^2) \leq G(a, b) \leq \alpha_2(a^2 + b^2), \quad (3.28)$$

при некоторых константах $\alpha_1 > 0$, $\alpha_2 > 0$.

Тогда из представлений (3.26), (3.27), (3.28) следует, что

$$\min\{c_0, \alpha_1, \rho_1, \dots, \rho_k\} \|x\|^2 \leq 2V(x) \leq \max\{c_0, \alpha_2, \rho_1, \dots, \rho_k\} \|x\|^2. \quad (3.29)$$

при всех $x \in \ell^2$. Таким образом $V(x)$ – положительно - определенная квадратичная форма.

Используя известное правило вычисления производной функционала по направлению векторного поля в гильбертовом пространстве [75, с. 101], запишем производную V в силу системы (3.17):

$$\begin{aligned} \dot{V} = \langle \nabla_x V, \dot{x} \rangle &= \left(c_0 \theta + \sum_{i=1}^k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi_{in} (J_{in}(\omega^2 - c_i^2 \lambda_{in}) + \rho_i \omega \eta_{in})}{c_i \sqrt{\lambda_{in}}} \right) \omega + \\ &+ \left(J - \sum_{i,n} \frac{J_{in}^2}{\rho_i} \right) \omega v. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Поскольку \dot{V} делится на ω , то естественно выбрать стабилизирующую функцию обратной связи $v = v(x)$ из условия $\dot{V} = -h\omega^2 + o(\|x\|^2)$, где h – положительная константа. Такому условию удовлетворяет линейный функционал $v(x)$ следующего вида:

$$v(x) = -\frac{1}{J_0} \left(c_0\theta + h\omega - \sum_{i=1}^k \sum_{n=1}^{\infty} c_i \sqrt{\lambda_{in}} J_{in} \xi_{in} \right). \quad (3.31)$$

Тогда производная V в силу системы (3.17) с $v = v(x)$ запишется в виде

$$\dot{V} = -h\omega^2 \left(1 - \frac{1}{h} \sum_{i=1}^k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi_{in}(J_{in}\omega + \rho_i \eta_{in})}{c_i \sqrt{\lambda_{in}}} \right). \quad (3.32)$$

Таким образом, условие $\dot{V} \leq 0$ выполнено, если

$$\sum_{i=1}^k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\xi_{in}(J_{in}\omega + \rho_i \eta_{in})}{c_i \sqrt{\lambda_{in}}} < h. \quad (3.33)$$

Используя формулу (3.33) и оценку (3.29), заключаем, что неравенство $\dot{V}(x) \leq 0$ выполнено при

$$x \in D(A) \cap X,$$

где

$$X = \{x \in \ell^2 \mid V(x) \leq \mu\} \quad (3.34)$$

при некоторой константе $\mu > 0$.

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 3.3. [11] Пусть выполнено предположение (3.19), и пусть c_0, h – положительные константы. Тогда управление с обратной связью $v = v(x)$, заданное выражением (3.31), обеспечивает сильную асимптотическую устойчивость тривиального решения системы (3.17), т.е. для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что каждое решение $x(t)$ системы (3.17) с $v = v(x)$, удовлетворяющее начальному условию $\|x(0)\| < \delta(\varepsilon)$, обладает свойствами:

1.

$$\|x(t)\| < \varepsilon, \quad \forall t \geq 0; \quad (3.35)$$

2.

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} \|x(t)\| = 0. \quad (3.36)$$

Доказательство. Рассмотрим непрерывный функционал $y(x) = \|x\|$ в пространстве ℓ^2 . Если предположить, что система дифференциальных уравнений (3.17) с управлением $v = v(x)$, $v(0) = 0$, порождает непрерывную полугруппу нелинейных операторов, то для доказательства достаточно проверить условия теоремы 2.2 (с. 72) для функционала $V(x)$ вида (3.26), поскольку свойства сильной асимптотической устойчивости (3.35) и (3.36) эквивалентны асимптотической устойчивости особой точки $x = 0$ по отношению к функционалу y .

Условие 1) теоремы 2.2 следует из доказанного выше неравенства (3.29), а условие 2) выполнено по построению множества X в (3.34).

Представим функционал (3.26) в виде $2V(x) = \langle Qx, x \rangle$, где Q – самосопряженный оператор. Из свойства положительной определенности функционала $2V(x) = \langle Qx, x \rangle$ следует, что Q – положительный самосопряженный оператор [46, с. 190], а значит, Q допускает представление (см. [46, с. 204]):

$$Q = U^*U,$$

где линейный оператор $U : \ell^2 \rightarrow \ell^2$ ограничен, $0 \notin \sigma(U)$. Определим в ℓ^2 билинейную форму

$$\langle x, \bar{x} \rangle_U = \langle Ux, U\bar{x} \rangle.$$

Вследствие оценки (3.29) стандартная норма

$$\|x\| = \left(\theta^2 + \omega^2 + \sum_{i=1}^k \sum_{n=1}^{\infty} (\eta_{in}^2 + \xi_{in}^2) \right)^{1/2}$$

и

$$\|x\|_U = \sqrt{\langle x, x \rangle_U}.$$

эквивалентны в ℓ^2 . Запишем линейную часть системы (3.17) с $v = v(x)$ в виде

$$\dot{x} = -\tilde{A}x, \quad x(0) = x_0 \in \ell^2, \quad (3.37)$$

где область определения $D(\tilde{A})$ плотна в ℓ^2 , $\tilde{A}(0) = 0$. Вычислим производную функционала $V(x) = \frac{1}{2} \langle Qx, x \rangle$ в силу линейного дифференциального уравнения (3.37):

$$\dot{V}(x) = \langle Qx, -\tilde{A}x \rangle = -h\omega^2 \leq 0,$$

для всех $x \in D(\tilde{A})$. С другой стороны,

$$\langle Qx, -\tilde{A}x \rangle = \langle Ux, -U\tilde{A}x \rangle = -\langle x, \tilde{A}x \rangle_U.$$

Это означает, что в гильбертовом пространстве ℓ^2 со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle_U$ линейный оператор $\tilde{A} : D(\tilde{A}) \rightarrow \ell^2$ является аккретивным, т.е. $-\tilde{A} : D(\tilde{A}) \rightarrow \ell^2$ – диссипативен. Для проверки условия 3) теоремы 2.2 докажем сначала предкомпактность полутраекторий линейного дифференциального уравнения (3.37) с помощью теоремы 1.10 (с. 50). Для этого докажем компактность оператора $(\lambda\tilde{A} + I)^{-1} : \ell^2 \rightarrow \ell^2$ при некотором $\lambda > 0$.

Рассмотрим сначала уравнение $Ix - \lambda Ax - \lambda bv = \bar{x}$ относительно x , где $\lambda = \text{const}$,

$$x = (\theta, \omega, \xi_{11}, \eta_{11}, \dots, \xi_{k1}, \eta_{k1}, \xi_{12}, \eta_{12}, \dots)^T \in \ell^2,$$

$$\bar{x} = (\bar{\theta}, \bar{\omega}, \bar{\xi}_{11}, \bar{\eta}_{11}, \dots, \bar{\xi}_{k1}, \bar{\eta}_{k1}, \bar{\xi}_{12}, \bar{\eta}_{12}, \dots)^T \in \ell^2.$$

В покомпонентном виде это уравнение примет вид:

$$(I_{2 \times 2} - \lambda A_0) \begin{pmatrix} \theta \\ \omega \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\theta} \\ \bar{\omega} + \lambda v \end{pmatrix},$$

$$(I_{2 \times 2} - \lambda A_{in}) \begin{pmatrix} \xi_{in} \\ \eta_{in} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \bar{\xi}_{in} \\ \bar{\eta}_{in} - \lambda \frac{J_{in}}{\rho_i} v \end{pmatrix}, \quad i = 1, 2, \dots, k, \quad n = 1, 2, \dots,$$

где 2×2 -матрицы A_0 и A_{in} . Решая приведенные уравнения методом обратной матрицы, получим:

$$\omega = \bar{\omega} + \lambda v, \quad \theta = \bar{\theta} + \lambda \bar{\omega} + \lambda^2 v, \quad (3.38)$$

$$\begin{pmatrix} \xi_{in} \\ \eta_{in} \end{pmatrix} = \frac{1}{1 + \lambda^2 c_i^2 \lambda_{in}} \begin{pmatrix} 1 & \lambda_i c_i \sqrt{\lambda_{in}} \\ -\lambda c_i \sqrt{\lambda_{in}} & 1 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \bar{\xi}_{in} \\ \bar{\eta}_{in} - \frac{\lambda J_{in}}{\rho_i} v \end{pmatrix}. \quad (3.39)$$

Затем, подставив выражения (3.38), (3.39) в выражение для v (3.31), будем иметь:

$$v = - \left(J_0 + \lambda h + \lambda^2 c_0 + \lambda^2 \sum_{i=1}^k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_i^2 \lambda_{in} J_{in}^2}{\rho_i (1 + \lambda^2 c_i^2 \lambda_{in})} \right)^{-1} \times \\ \times \left(c_0 \bar{\theta} + (\lambda c_0 + h) \bar{\omega} - \sum_{i=1}^k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_i J_{in} \sqrt{\lambda_{in}} (\bar{\xi}_{in} + \lambda c_i \sqrt{\lambda_{in}} \bar{\eta}_{in})}{1 + \lambda^2 c_i^2 \lambda_{in}} \right). \quad (3.40)$$

Формула (3.40) определяет линейный функционал $v(\bar{x})$ в ℓ^2 . Для произвольного $\lambda > 0$, $v(\bar{x})$ ограничен, поскольку его коэффициенты лежат в ℓ^2 :

$$0 < J_0 + \lambda h + \lambda^2 c_0 + \lambda^2 \sum_{i=1}^k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_i^2 \lambda_{in} J_{in}^2}{\rho_i (1 + \lambda^2 c_i^2 \lambda_{in})} = \text{const} < \infty, \\ \sum_{i=1}^k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_{in}^2 \lambda_{in}}{(1 + \lambda^2 c_i^2 \lambda_{in})^2} < \infty, \quad \sum_{i=1}^k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_{in}^2 \lambda_{in}^2}{(1 + \lambda^2 c_i^2 \lambda_{in})^2} < \infty.$$

Приведенные выше ряды сходятся вследствие оценок (3.5) и (3.11). Таким образом, для всякого $\lambda > 0$ найдется такое положительное число $M_1(\lambda)$, что $|v(\bar{x})| \leq M_1(\lambda) \|\bar{x}\|$ в формуле (3.40) при всех $\bar{x} \in \ell^2$.

Формулы (3.38), (3.39), (3.40) определяют $x = (\lambda \tilde{A} + I)^{-1} \bar{x}$ при всех $\bar{x} \in \ell^2$ для $\lambda > 0$. Отсюда следует, что

$$\|(\lambda \tilde{A} + I)^{-1} \bar{x}\|^2 \leq (\bar{\omega} + \lambda v(\bar{x}))^2 + (\bar{\theta} + \lambda \bar{\omega} + \lambda^2 v(\bar{x}))^2 + \\ + 2 \left(\sum_{i,n} \frac{1}{1 + \lambda^2 c_i^2 \lambda_{in}} \right) \sum_{i,n} \left(\bar{\xi}_{in}^2 + (\bar{\eta}_{in} - \lambda J_{in} v(\bar{x}) / \rho_i)^2 \right) \leq M_2(\lambda) \|\bar{x}\|^2$$

при некоторой константе $M_2(\lambda)$, поскольку

$$\sum_{i=1}^k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + \lambda^2 c_i^2 \lambda_{in}} < \infty \quad (3.41)$$

и $v(\bar{x})$ – ограниченный функционал.

Таким образом, определен ограниченный линейный оператор

$$(\lambda \tilde{A} + I)^{-1} : \ell^2 \rightarrow \ell^2$$

при каждом $\lambda > 0$. Для доказательства его компактности рассмотрим оператор $\Pi_N : \ell^2 \rightarrow \ell^2$, который проектирует элементы $x \in \ell^2$ на подпространство с $\theta = \omega = \xi_{in} = \eta_{in} = 0$ при $n < N$. В координатной записи Π_N можно представить следующим образом:

$$\Pi_N x = (0, 0, \dots, 0, \xi_{1N}, \eta_{1N}, \dots, \xi_{kN}, \eta_{kN}, \xi_{1,N+1}, \eta_{1,N+1}, \dots)^T.$$

Рассмотрим ограниченный линейный оператор в ℓ^2 :

$$U_N = (I - \Pi_N)(\lambda\tilde{A} + I)^{-1}.$$

Каждый оператор U_N компактен (вполне непрерывен), поскольку его образ имеет конечную размерность (см. [46, с. 63]). Покажем, что оператор $(\lambda\tilde{A} + I)^{-1}$ является пределом по норме компактных операторов:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \|(\lambda\tilde{A} + I)^{-1} - U_N\| = \lim_{N \rightarrow \infty} \|\Pi_N(\lambda\tilde{A} + I)^{-1}\| = 0. \quad (3.42)$$

Имеем:

$$\begin{aligned} & \|\Pi_N(\lambda\tilde{A} + I)^{-1}\bar{x}\|^2 \leq \\ & \leq 2 \left(\sum_{i=1}^k \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{1 + \lambda^2 c_i^2 \lambda_{in}} \right) \sum_{i=1}^k \sum_{n=1}^{\infty} \left(\xi_{in}^{-2} + (\bar{\eta}_{in} - \lambda J_{in} v(\bar{x}) / \rho_i)^2 \right) \leq \\ & \leq 2 \left(\sum_{i=1}^k \sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{1 + \lambda^2 c_i^2 \lambda_{in}} \right) \times \\ & \times \left(1 + 2\lambda M_1(\lambda) \left(\sum_{i=1}^k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_{in}^2}{\rho_i^2} \right)^{1/2} + \lambda^2 M_1(\lambda)^2 \sum_{i=1}^k \sum_{n=1}^{\infty} \frac{J_{in}^2}{\rho_i^2} \right) \|\bar{x}\|^2. \quad (3.43) \end{aligned}$$

Из сходимости ряда (3.41) следует, что

$$\sum_{n=N}^{\infty} \frac{1}{1 + \lambda^2 c_i^2 \lambda_{in}} \rightarrow 0 \quad \text{при } N \rightarrow \infty.$$

Таким образом, из оценки (3.43) вытекает свойство (3.42), а значит, оператор $(\lambda\tilde{A} + I)^{-1} : \ell^2 \rightarrow \ell^2$ компактен поскольку он является пределом конечномерных операторов [46, с. 62], [135, с. 246].

В частности, из компактности линейного оператора $(\lambda\tilde{A}+I)^{-1} : \ell^2 \rightarrow \ell^2$ следует, что $R(\lambda\tilde{A}+I)$ – область значений линейного оператора $\lambda\tilde{A}+I$ совпадает с ℓ^2 , а значит, $-\tilde{A}$ – m -диссипативный оператор (в смысле определения 1.8 на с. 1.8). Из теоремы Люмера – Филлипса (утверждение 1.7) следует, что $-\tilde{A}$ является инфинитезимальным генератором C_0 -полугруппы $\{e^{-t\tilde{A}}\}_{t \geq 0}$ в ℓ^2 , и такая полугруппа является сжимающей относительно нормы $\|\cdot\|_U$. Из компактности оператора $(\lambda\tilde{A}+I)^{-1}$ на основании утверждения 1.10 следует предкомпактность всех положительных полутраекторий линейного дифференциального уравнения (3.37) в ℓ^2 .

Представим теперь нелинейную систему (3.16) с управлением в виде обратной связи (3.31) следующим образом:

$$\dot{x}(t) = -\tilde{A}x(t) + \omega^2(t)Cx(t), \quad x(0) = x_0 \in \ell^2, \quad (3.44)$$

где

$$Cx = \left(0, 0, 0, \frac{\xi_{11}}{c_1\sqrt{\lambda_{11}}}, \dots, 0, \frac{\xi_{k1}}{c_k\sqrt{\lambda_{k1}}}, 0, \frac{\xi_{12}}{c_1\sqrt{\lambda_{12}}}, \dots, 0, \frac{\xi_{k2}}{c_k\sqrt{\lambda_{k2}}}, \dots \right)^T. \quad (3.45)$$

Отметим, что правая часть уравнения (3.44) является локально липшицевым возмущением оператора $-\tilde{A}$, следовательно, при любом $x_0 \in \ell^2$ обобщенное решение $x(t)$ задачи (3.44) определено единственным образом на полуинтервале $t \in [0, t_{max})$ (теорема 1.4 из [125, с. 185]). Из способа задания множества X в (3.34) следует, что X – положительно-инвариантно. Поскольку множество X ограничено, то из $x_0 \in X$ вытекает ограниченность решения $x(t)$, поэтому $t_{max} = +\infty$ согласно теореме 1.4 из [125, с. 185]. Отсюда следует, что решения нелинейного дифференциального уравнения (3.44) задаются с помощью некоторой непрерывной полугруппы операторов $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ в X .

Воспользуемся теоремой 2.3 (с. 79) для доказательства предкомпактности полутраекторий уравнения (3.44). Положим

$$f(t) = \omega^2(t), \quad R(x, t) = Cx(t)$$

в условиях теоремы 2.3. Поскольку производная функционала V в силу системы (4.8) при $\|x\| \leq \mu$ допускает оценку

$$\dot{V}(x(t)) \leq -h^* \omega^2(t), \quad h^* = \text{const} > 0, \quad (3.46)$$

то

$$\int_0^{+\infty} \omega^2(t) dt < \infty, \quad (3.47)$$

а значит, $f \in L^1[0, +\infty)$ если $x_0 \in X$. Из представления (3.22) следует, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_{in}} < \infty,$$

при каждом $i = 1, 2, \dots, k$, т.е. линейный оператор $C : \ell^2 \rightarrow \ell^2$ компактен поскольку сумма квадратов элементов его матрицы конечна (см. [46, с. 200]). Учитывая ограниченность решений $x(t) \in X$ заключаем, что значения $R(x, t)$ находятся в компактном множестве если $x_0 \in X$. По доказанному выше, полутраектории $\{e^{-t\tilde{A}}x_0\}_{t \geq 0}$ линейного уравнения предкомпактны, а значит положительные полутраектории нелинейного уравнения (3.44) предкомпактны по теореме 2.3.

Остается проверить условие 5) теоремы 2.2. Покажем, что множество

$$M = \{x \in \ell^2 : \dot{V}(x) = 0\}$$

не содержит нетривиальных полутраекторий системы (3.16) с $v = v(x)$, определенных при $t \geq 0$. Поскольку $\dot{V}(x)$ удовлетворяет неравенству (3.46), то каждая полутраектория на M удовлетворяет соотношениям

$$\omega(t) = 0, \quad \theta(t) = \theta(0) + \omega(0)t, \quad v(x(t)) = \dot{\omega}(t) = 0,$$

$$\theta(0) = \sum_{i=1}^k \sum_{n=1}^{\infty} c_i \sqrt{\lambda_{in}} J_{in} \xi_{in}(t),$$

$$\xi_{in}(t) = \xi_{in}(0) \cos(c_i \sqrt{\lambda_{in}} t) + \eta_{in}(0) \sin(c_i \sqrt{\lambda_{in}} t),$$

$$\eta_{in}(t) = -\xi_{in}(0) \sin(c_i \sqrt{\lambda_{in}} t) + \eta_{in}(0) \cos(c_i \sqrt{\lambda_{in}} t),$$

В частности, из приведенных выше выражений следует

$$\theta(0) \equiv \sum_{i=1}^k \sum_{n=1}^{\infty} c_i \sqrt{\lambda_{in}} J_{in} \left(\xi_{in}(0) \cos(c_i \sqrt{\lambda_{in}} t) + \eta_{in}(0) \sin(c_i \sqrt{\lambda_{in}} t) \right) \quad (3.48)$$

при всех $t \geq 0$. Из леммы 3.1 и условий $J_{in} \neq 0$, $\lambda_{in} > 0$ в (3.11) вытекает, что тождество (3.48) выполнено на M только при $x(0) = 0$ в условиях предположения (3.19). Поэтому множество M не содержит нетривиальных полутраекторий, а значит особая точка $x = 0$ системы (3.16) с $v = v(x)$ сильно асимптотически устойчива по теореме 2.2, что и требовалось доказать.

3.4 Частичная стабилизация в случае кратных частот

Исследуем вопрос о стабилизируемости системы (3.17) при нарушении условия (3.19). В данном подразделе предположим, что все балки имеют одинаковые механические параметры, т.е.

$$l_i = l, \quad \rho_i = \rho, \quad c_i = c$$

при всех $i = 1, 2, \dots, k$. Тогда $\lambda_{1n} = \dots = \lambda_{kn} = \lambda_n$ в силу представления (3.8). Покажем, что в этом случае система линейного приближения (3.18) не является стабилизируемой при $k \geq 2$. Действительно, рассмотрим невырожденное линейное преобразование $\Phi : \ell^2 \rightarrow \ell^2$ следующего вида:

$$\Phi(x) = (\theta, \omega, \dots, Q_{in}, P_{in}, \dots)^T,$$

где

$$Q_{kn} = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \xi_{jn}, \quad P_{kn} = \frac{1}{k} \sum_{j=1}^k \eta_{jn},$$

$$Q_{in} = \xi_{in} - Q_{kn}, \quad P_{in} = \eta_{in} - P_{kn}, \quad i = \overline{1, k-1}.$$

Применяя Φ к фазовому вектору x линейной системы (3.18), получим следующие дифференциальные уравнения относительно Q_{in} , P_{in} :

$$\dot{Q}_{in} = c\sqrt{\lambda_n} P_{in}, \quad \dot{P}_{in} = -c\sqrt{\lambda_n} Q_{in}, \quad (i = \overline{1, k-1}, n \geq 1). \quad (3.49)$$

Таким образом, на всяком решении системы дифференциальных уравнений (3.49) выполнено тождество:

$$\sum_{i=1}^{k-1} \sum_{n=1}^{\infty} (P_{in}(t)^2 + Q_{in}(t)^2) = \text{const.} \quad (3.50)$$

Отсюда следует, что в случае $k \geq 2$ нулевое решение подсистемы (3.49) не является асимптотически устойчивым, а значит, система (3.18) нестабилизируема. Покажем, что в этом случае возможна частичная асимптотическая стабилизация системы (3.17).

Для рассмотрения задачи частичной стабилизации определим ограниченный линейный оператор $\Pi : \ell^2 \rightarrow \ell^2$ следующим образом:

$$\Pi : x \mapsto (\theta, \omega, \sum_{i=1}^k \xi_{i1}, \sum_{i=1}^k \eta_{i1}, \dots, \sum_{i=1}^k \xi_{in}, \sum_{i=1}^k \eta_{in}, \dots)^T. \quad (3.51)$$

Если $k = 1$, то Π является единичным оператором в ℓ^2 , в противном случае значение

$$\|\Pi\Phi^{-1}(\theta, \omega, \dots, Q_{in}, P_{in}, \dots)^T\|$$

не зависит от Q_{in}, P_{in} при $i \leq k - 1$, следовательно, постоянная интеграла (3.50) не влияет на $\|\Pi x(t)\|$ в линейном случае.

Из формулы (3.51) видно, что оператор Π проектирует фазовое пространство ℓ^2 на линейное подпространство, параметризованное с помощью угла поворота и угловой скорости твердого тела, а также координат Q_{kn} и P_{kn} . Таким образом, Πx описывает состояние “усредненной” механической системы с одной балкой, для которой обобщенные координаты индекса n получены путем усреднения модальных координат с тем же индексом n по всем k балкам исходной системы.

Рассмотрим непрерывный функционал $y(x) = \|\Pi x\|$ в ℓ^2 . С механической точки зрения, стабилизация решения $x = 0$ системы (3.17) по отношению к функционалу y приводит к стабилизации ориентации твердого тела-носителя с одновременным гашением усредненных координат и скоростей, соответствующих колебаниям балок. Вообще говоря, такая задача

частичной стабилизации не гарантирует затухание смещений балок относительно их усредненных значений (т.е. координат Q_{in} и P_{in} с $i \leq k - 1$).

Докажем основной результат о разрешимости задачи частичной стабилизации для системы с одинаковыми балками.

Теорема 3.4. [8] Пусть c_0, h – произвольные положительные константы. Тогда управление с обратной связью $v = v(x)$ вида (3.31) обеспечивает асимптотическую устойчивость решения $x = 0$ нелинейной системы (3.17) по отношению к ограниченному функционалу

$$y(x) = \|Px\|$$

в ℓ^2 . При этом решение $x = 0$ замкнутой системы (3.17) с обратной связью является сильно устойчивым по Ляпунову (вообще говоря, неасимптотически).

Доказательство. Из оценки (3.29) вытекает, что функционал V удовлетворяет условию 1) теоремы 2.2 при $y(x) = \|Px\|$. Отметим также, что $\dot{V}(x) \leq 0$ при всех $x \in D(A) \cap X$, где множество X задано формулой (3.34). Свойство предкомпактности положительных полутраекторий нелинейной системы (3.17) с управлением в виде обратной связи (3.31) установлено при доказательстве теоремы 3.3. Таким образом, остается проверить условия 4) и 5) теоремы 2.2.

Система (3.17) с обратной связью $v = v(x)$ на множестве

$$Z = \overline{\{x \in D(A) \mid \dot{V}(x) = 0\}}$$

примет следующий вид:

$$\dot{x}(t) = Ax(t), \quad \omega(t) = 0, \quad v(x(t)) = 0.$$

Решая это линейное уравнение покомпонентно, получим

$$\begin{aligned} \theta(t) &= \theta_0, \\ \xi_{in}(t) &= C_{in}^{(1)} \sin(\sqrt{\lambda_n} ct) + C_{in}^{(2)} \cos(\sqrt{\lambda_n} ct), \end{aligned} \quad (3.52)$$

$$\eta_{in}(t) = C_{in}^{(1)} \cos(\sqrt{\lambda_n} ct) - C_{in}^{(2)} \sin(\sqrt{\lambda_n} ct),$$

где константы θ_0 , $C_{in}^{(j)}$ определяются начальными условиями. Поскольку левая часть формулы (3.31) равна нулю на Z , то подстановка (3.52) в (3.31) дает:

$$\frac{c_0 \theta_0}{c} = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{i=1}^k J_n \sqrt{\lambda_n} \left(C_{in}^{(1)} \sin(\sqrt{\lambda_n} ct) + C_{in}^{(2)} \cos(\sqrt{\lambda_n} ct) \right). \quad (3.53)$$

Предположим, что замкнутая система имеет полутраекторию на Z для $t \geq 0$. Тогда соотношение (3.53) выполнено с некоторыми константами θ_0 , $C_{in}^{(j)}$. Система функций

$$\{1, \sin \sqrt{\lambda_n} \tau, \cos \sqrt{\lambda_n} \tau \mid \tau \geq 0, n \in \mathbb{N}\}$$

линейно-независима на \mathbb{R}_+ вследствие оценки (3.5) по теореме 1.2.17 из [160].

Поскольку $\lambda_n \neq 0$ и $J_n = J_{in} \neq 0$ в (3.11), то соотношение (3.53) выполняется только при

$$\theta_0 = \sum_{i=1}^k C_{in}^{(1)} = \sum_{i=1}^k C_{in}^{(2)} = 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}. \quad (3.54)$$

Это означает, что максимальное положительно-инвариантное подмножество множества Z содержится в

$$Z_0 = \{x \in \ell^2 \mid \theta = \omega = \sum_{i=1}^k \xi_{in} = \sum_{i=1}^k \eta_{in} = 0, \forall n \in \mathbb{N}\}.$$

Из свойства $\text{Ker } \Pi = Z_0$ следует, что условия 4) и 5) теоремы 2.2 выполнены. Таким образом, решение $x = 0$ нелинейной системы (3.17) с обратной связью (3.31) асимптотически устойчиво по отношению к функционалу y на основании теоремы 2.2.

3.5 Стабилизация конечномерной подсистемы и результаты вычислений

Зафиксируем конечное число N мод колебаний упругих балок и рассмотрим аппроксимацию нелинейной системы (3.16), соответствующую обобщенным координатам с индексом $n \leq N$. Если отбросить также слагаемые

с ξ_{in}, η_{in} при $n > N$ в формуле для управления (3.31), то получим конечномерную систему с обратной связью. Такая модель рассмотрена в работе [4] для случая двух балок.

На рис. 3.2-3.4 приведены результаты численного интегрирования конечномерной аппроксимации системы (3.16), (3.31) в случае $N = 5, k = 2$ для следующих значений механических параметров:

$$l_i = 1, \rho_i = 1, c_i = 1 \ (i = 1, 2), J_0 = 1, d = 1/2, h = 3.$$

При этом выбраны такие начальные условия:

$$\theta(0) = \pi, \omega(0) = 0,$$

$$\xi_{in}(0) = \eta_{in}(0) = 0, \ (i = \overline{1, 2}, n = \overline{1, 5}).$$

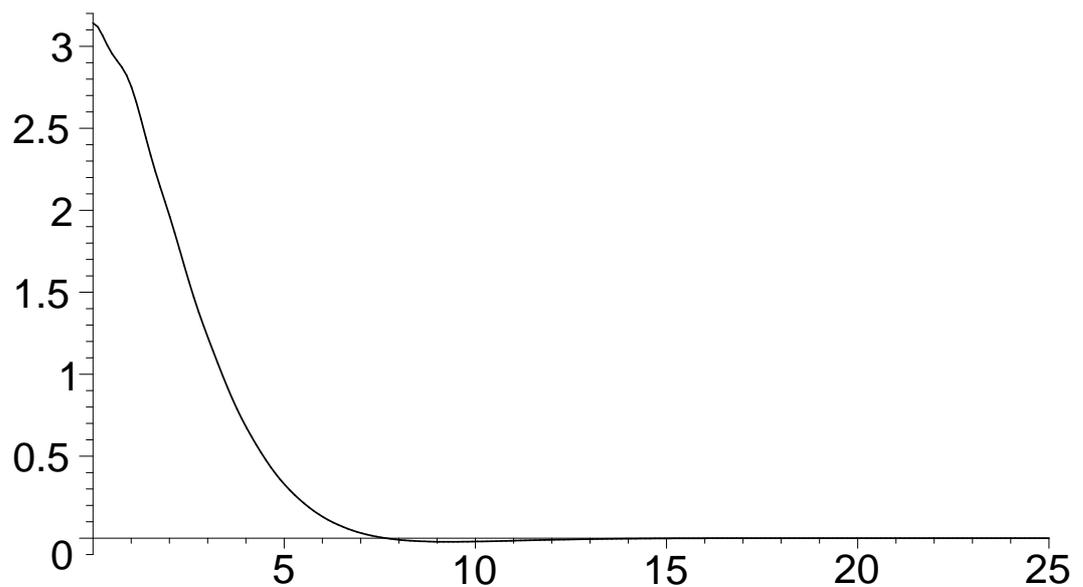


Рис. 3.2. Компонента $\theta(t)$ решения конечномерной системы.

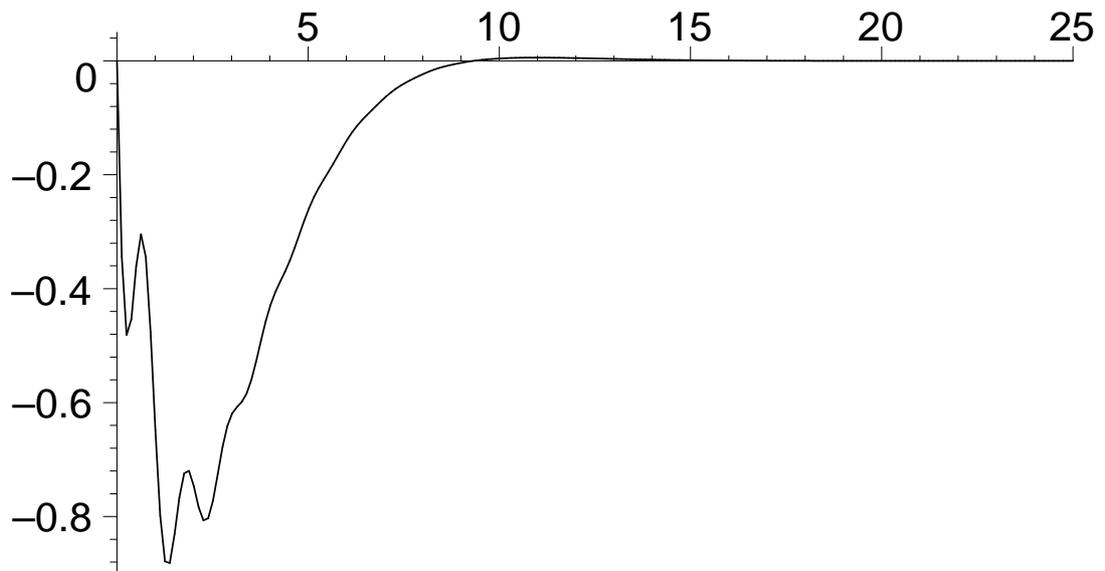


Рис 3.3. Компонента $\omega(t)$ решения конечномерной системы.

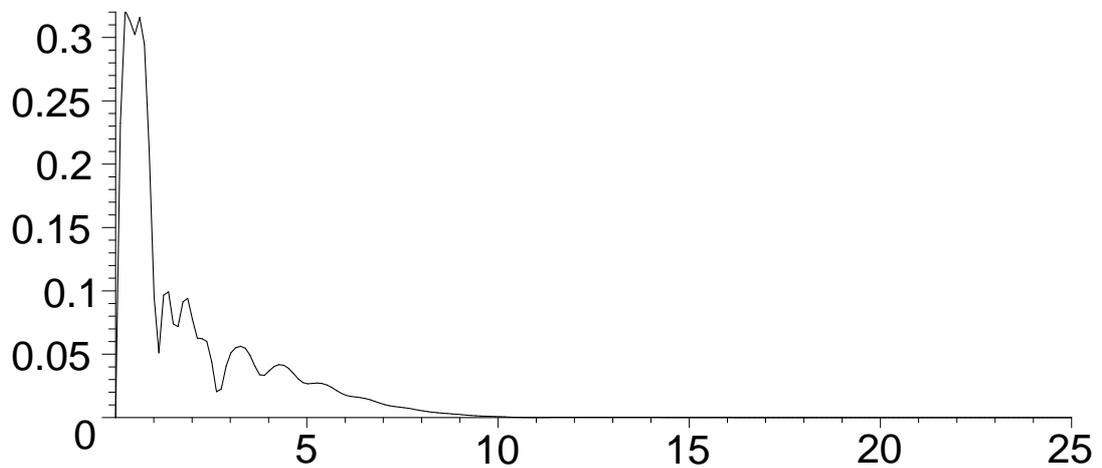


Рис 3.4. Функция $(\sum_{i \leq 2} \sum_{n \leq 5} (\xi_{in}(t)^2 + \eta_{in}(t)^2))^{1/2}$ на решении конечномерной системы.

Приведенные графики иллюстрируют возможность стабилизации конечномерной модели с помощью управления вида (3.31).

3.6 Выводы

В данном разделе исследованы задачи управляемости и стабилизации движения для модели спутника в виде твердого тела-носителя и произвольного числа k упругих балок, прикрепленных к нему. Получены следующие основные результаты.

1. Выведены уравнения движения вращающегося твердого тела с произвольным числом консольно заземленных балок Эйлера – Бернулли. Уравнения движения записаны в виде нелинейного дифференциального уравнения (3.16) в гильбертовом пространстве ℓ^2 с учетом бесконечного количества модальных координат. Для упрощения формы записи уравнений движения введен новый параметр управления v , который связан с исходным управляющим моментом сил M линейным преобразованием (3.13). Исследуемая система обладает большей общностью, чем модели работ [59], [69, с. 9], [88], поскольку в данном разделе диссертации исследуются задачи управления для произвольного числа балок.

2. Получены условия приближенной управляемости линейного приближения рассматриваемой модели в гильбертовом пространстве при использовании одномерного управления (теорема 3.2). Установлено, что ключевым при анализе управляемости является условие отсутствия резонансов (3.19). При выполнении этого условия построено управление с обратной связью, обеспечивающее сильную асимптотическую устойчивость положения равновесия нелинейной системы (теорема 3.3). Полученные утверждения обобщают известные результаты об управляемости [100, 105, 160] и стабилизируемости [83, 103, 104, 163, 164] вращающейся балки Эйлера – Бернулли на случай системы с несколькими балками. В части цитируемых работ (см. [69, с. 12], [104, 163]) рассмотрены модели балки без демпфирования. Отмечено [104], что отсутствие диссипации существенно усложняет анализ асимптотической устойчивости нелинейной системы с обратной связью. В диссертации также предполагается, что внутреннее демпфирование в рассматриваемой механической системе отсутствует, и для такой бесконечномерной модели решены задачи стабилизации с одномерным управляющим воздействием.

3. Показано, что в случае $k \geq 2$ одинаковых балок Эйлера – Бернулли тривиальное решение рассматриваемой системы не может быть стабилизировано асимптотически. При таком условии поставлена и решена задача о частичной асимптотической стабилизации нелинейной системы по отношению к непрерывному функционалу, который описывает состояние “усредненной” механической системы с одной балкой, для которой обобщенные координаты индекса n получены путем усреднения модальных координат с тем же индексом n по всем k балкам исходной системы (теорема 3.4). Рассмотренная задача частичной стабилизации решения приводит к стабилизации ориентации твердого тела-носителя с одновременным гашением усредненных координат и скоростей, соответствующих колебаниям балок.
4. В подразделе 3.5 рассмотрена конечномерная подсистема уравнений движения, соответствующая обобщенным модальным координатам с индексами $n \leq N$. Показано, что конечномерные аппроксимации функционала управления (3.31) могут быть использованы для решения задачи стабилизации приближенной системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Такой вывод подтверждается результатами численного интегрирования на ЭВМ.

Результаты раздела опубликованы в журнальных статьях [4, 8, 11] и работах [26, 27, 31, 32].

4 Управление системой с обобщенными координатами с использованием канонической формы

Раздел 4 посвящен решению двухточечной задачи управления для модели колебаний твердого тела с упругой балкой при произвольном количестве модальных координат. При исследовании такой задачи использовано приведение линеаризованной системы к стандартной канонической форме управляемой системы (канонической форме Бруновского) [165, 166].

4.1 Приведение конечномерной системы к канонической форме Бруновского

Для случая одной балки ($k = 1$) конечномерная аппроксимация уравнений движения (3.18), соответствующая обобщенным координатам с индексами не выше N , может быть записана следующим образом:

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_0 &= \eta_0, \\ \dot{\eta}_0 &= v, \\ \dot{\xi}_j &= \omega_j \eta_j, \\ \dot{\eta}_j &= -\omega_j \xi_j + b_j v, \quad (j = \overline{1, N}),\end{aligned}\tag{4.1}$$

где $\xi_0 = \phi$ – угол поворота твердого тела; $\eta_0 = \omega$ – угловая скорость вращения твердого тела; $v \in \mathbb{R}$ – управление; N – количество учитываемых мод колебаний упругой балки; ξ_j и η_j – координата и скорость для j -й моды колебаний балки. Коэффициенты системы (4.1) определяются в терминах собственных значений и функций задачи Штурма – Лиувилля (3.3), (3.4):

$$\omega_j = c_1 \sqrt{\lambda_{1j}} > 0, \quad b_j = -J_{1j}/\rho_1.\tag{4.2}$$

При доказательстве всех результатов подразделов 4.1 – 4.4 не используются предположения (4.2) о связи коэффициентов ω_j и b_j с решениями задачи Штурма – Лиувилля. По существу, условия вида (4.2) необходимы только в подразделе 4.5.

Исследуем вопрос о приведении системы (4.1) к стандартной канонической форме Бруновского и решении двухточечной задачи оптимального управления с квадратичным функционалом качества. Как будет показано ниже, оптимальные траектории такой задачи могут быть использованы для аппроксимации траекторий исходной бесконечномерной системы.

Перед доказательством основных результатов сформулируем вспомогательное утверждение.

Лемма 4.1. *Если все ω_j^2 различны и не равны нулю при $j = \overline{1, N}$, то матрица*

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ -\omega_1^2 & -\omega_2^2 & \dots & -\omega_N^2 \\ \omega_1^4 & \omega_2^4 & \dots & \omega_N^4 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-\omega_1^2)^{N-1} & (-\omega_2^2)^{N-1} & \dots & (-\omega_N^2)^{N-1} \end{pmatrix} \quad (4.3)$$

невыврождена,

$$(W^{-1})_{kp} = \left(\prod_{i \neq k} \frac{1}{\omega_i^2 - \omega_k^2} \right) \sum_{(j_1, \dots, j_{N-p}) \in S_{kp}} (\omega_{j_1} \omega_{j_2} \dots \omega_{j_{N-p}})^2, \quad (4.4)$$

$$S_{kp} = \{(j_1, j_2, \dots, j_{N-p}) : 1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_{N-p} \leq N, j_1, j_2, \dots, j_{N-p} \neq k\}.$$

В случае $p = N$ сумма в формуле (4.4) полагается равной единице.

Доказательство. Утверждение леммы следует из известных свойств миноров матрицы Вандермонда (см. [167, с. 26, 32]).

Приведение к стандартной канонической форме. Введем сле-

дующие обозначения:

$$\xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_N \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N, \quad \eta = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_N \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^N, \quad x = \begin{pmatrix} \xi_0 \\ \eta_0 \\ \xi_1 \\ \eta_1 \\ \vdots \\ \xi_N \\ \eta_N \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2N+2}.$$

Обозначим также через $\tilde{\xi}$, $\tilde{\eta}$, \tilde{x} столбцы с соответствующими элементами $\tilde{\xi}_j$ и $\tilde{\eta}_j$ вместо ξ_j и η_j .

Теорема 4.1. [15] *Если $b_j \neq 0$ и все $\omega_j^2 \neq 0$ различны для $j = \overline{1, N}$, то существует невырожденное линейное преобразование*

$$\tilde{x} = \Phi x, \quad \tilde{v} = \alpha v + \beta \xi, \quad (|\Phi| \neq 0, \alpha \neq 0), \quad (4.5)$$

приводящее систему (4.1) к канонической форме Бруновского:

$$\begin{aligned} \dot{\tilde{\xi}}_{j-1} &= \tilde{\eta}_{j-1}, \\ \dot{\tilde{\eta}}_{j-1} &= \tilde{\xi}_j, \quad (j = \overline{1, N}), \\ \dot{\tilde{\xi}}_N &= \tilde{\eta}_N, \\ \dot{\tilde{\eta}}_N &= \tilde{v}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Компоненты преобразования (4.5) задаются соотношениями

$$\Phi : \tilde{\xi}_0 = c_0 \xi_0 + \bar{c} \xi, \quad \tilde{\eta}_0 = c_0 \eta_0 + \bar{c} \Omega \eta, \quad \tilde{\xi} = -WC \Omega^2 \xi, \quad \tilde{\eta} = -WC \Omega^3 \eta, \quad (4.7)$$

$$\alpha = c_0 \sum_{j=1}^N \left(\omega_j^{2N} \prod_{i \neq j} \frac{\omega_i^2}{\omega_j^2 - \omega_i^2} \right), \quad \beta = (-1)^{N+1} \bar{c} \Omega^{2N+2}, \quad (4.8)$$

где

$$\bar{c} = (c_1, c_2, \dots, c_N), \quad C = \begin{pmatrix} c_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & c_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & c_N \end{pmatrix}, \quad \Omega = \begin{pmatrix} \omega_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \omega_N \end{pmatrix}, \quad (4.9)$$

$$c_j = -\frac{c_0}{\omega_j b_j} \prod_{i \neq j} \frac{\omega_i^2}{\omega_i^2 - \omega_j^2}, \quad (j = \overline{1, N}), \quad (4.10)$$

матрица W определена в (4.3), $c_0 \neq 0$ – произвольная константа.

Доказательство. Запишем систему (4.1) в матричном виде:

$$\dot{x} = Ax + bv,$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \omega_1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\omega_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \omega_N \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & -\omega_N & 0 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ b_1 \\ \vdots \\ 0 \\ b_N \end{pmatrix}.$$

Воспользуемся известной схемой приведения линейной управляемой системы к канонической форме (см. [166], [168, С. 176-177]). Для этого необходимо выбрать вектор

$$h = (c_0, d_0, c_1, d_1, \dots, c_N, d_N)$$

так, чтобы выполнялись условия

$$hb = hAb = hA^2b = \dots = hA^{2N}b = 0, \quad hA^{2N+1}b = \alpha \neq 0,$$

т.е.

$$\Phi b = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \alpha \end{pmatrix}, \quad \text{где } \Phi = \begin{pmatrix} h \\ hA \\ \vdots \\ hA^{2N+1} \end{pmatrix}. \quad (4.11)$$

Положим $d_0 = d_1 = \dots = d_N = 0$ и вычислим матрицу Φ :

$$\Phi = \begin{pmatrix} c_0 & 0 & c_1 & 0 & \dots & c_N & 0 \\ 0 & c_0 & 0 & c_1\omega_1 & \dots & 0 & c_N\omega_N \\ 0 & 0 & -c_1\omega_1^2 & 0 & \dots & -c_N\omega_N^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -c_1\omega_1^3 & \dots & 0 & -c_N\omega_N^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & (-1)^N c_1\omega_1^{2N} & 0 & \dots & (-1)^N c_N\omega_N^{2N} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & (-1)^N c_1\omega_1^{2N+1} & \dots & 0 & (-1)^N c_N\omega_N^{2N+1} \end{pmatrix}. \quad (4.12)$$

Легко видеть, что $hA^{2j}b = 0$ для всех $j = \overline{0, N}$ при таком выборе коэффициентов d_0, d_1, \dots, d_N . Используя четные строки матрицы Φ , приходим к выводу, что условия $hA^{2j+1}b = 0, j = \overline{0, N-1}$ эквивалентны следующей системе линейных уравнений относительно c_0, c_1, \dots, c_N :

$$W \begin{pmatrix} b_1\omega_1c_1 \\ b_2\omega_2c_2 \\ \vdots \\ b_N\omega_Nc_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -c_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Решая эту систему с помощью обратной матрицы (4.4), получим формулу (4.10) для коэффициентов c_1, c_2, \dots, c_N , в зависимости от произвольной константы c_0 . Покажем, что при любом $c_0 \neq 0$ выполнено оставшееся условие $hA^{2N+1}b \neq 0$ в (4.11):

$$\begin{aligned} hA^{2N+1}b &= (-1)^N \sum_{j=1}^N b_j c_j \omega_j^{2N+1} = (-1)^{N-1} c_0 \sum_{j=1}^N \omega_j^{2N} \prod_{i \neq j} \frac{\omega_i^2}{\omega_i^2 - \omega_j^2} = \\ &= c_0 \sum_{j=1}^N \omega_j^{2N} \prod_{i \neq j} \frac{\omega_i^2}{\omega_j^2 - \omega_i^2}, \end{aligned} \quad (4.13)$$

т.е. полученное выражение совпадает с $\alpha \neq 0$ в (4.8).

Определим $\tilde{x} = \Phi x$. Принимая во внимание структуру матрицы (4.12) и обозначения (4.9), приходим к выводу, что компоненты такого отображения $x \mapsto \tilde{x}$ удовлетворяют формулам (4.7). Покажем невырожденность Φ , используя свойства определителей:

$$\begin{aligned} |\Phi| &= c_0^2 \begin{vmatrix} -c_1\omega_1^2 & 0 & \dots & -c_N\omega_N^2 & 0 \\ 0 & -c_1\omega_1^3 & \dots & 0 & -c_N\omega_N^3 \\ c_1\omega_1^4 & 0 & \dots & c_N\omega_N^4 & 0 \\ 0 & c_1\omega_1^5 & \dots & 0 & c_N\omega_N^5 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ (-1)^N c_1\omega_1^{2N} & 0 & \dots & (-1)^N c_N\omega_N^{2N} & 0 \\ 0 & (-1)^N c_1\omega_1^{2N+1} & \dots & 0 & (-1)^N c_N\omega_N^{2N+1} \end{vmatrix} = \\ &= (c_0 c_1 \dots c_N)^2 (\omega_1 \omega_2 \dots \omega_N)^5 |W|^2 = \end{aligned}$$

$$= (c_0 c_1 \dots c_N)^2 (\omega_1 \omega_2 \dots \omega_N)^5 \prod_{1 \leq i < j \leq N} (\omega_j^2 - \omega_i^2)^2.$$

Итак, $|\Phi| \neq 0$ при выполнении условий теоремы. Вычисляя производные координат вектора \tilde{x} в силу системы (4.1), получим:

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_j &= \frac{d}{dt}(hA^{2j}x) = hA^{2j+1}x + hA^{2j}bv = hA^{2j+1}x = \tilde{\eta}_j, \quad (j = \overline{0, N}), \\ \dot{\tilde{\eta}}_j &= \frac{d}{dt}(hA^{2j+1}x) = hA^{2j+2}x + hA^{2j+1}bv = hA^{2j+2}x = \tilde{\xi}_{j+1}, \quad (j = \overline{0, N-1}), \\ \dot{\tilde{\eta}}_N &= \frac{d}{dt}(hA^{2N+1}x) = hA^{2N+2}x + hA^{2N+1}bv. \end{aligned} \quad (4.14)$$

Поскольку

$$hA^{2N+2}x = (-1)^{N+1} \sum_{j=1}^N c_j \omega_j^{2N+2} \xi_j,$$

то из (4.14) с учетом (4.8) и (4.13) следует $\dot{\tilde{\eta}}_N = \alpha v + \beta \xi = \tilde{v}$. Таким образом, система (4.1) в новых переменных \tilde{x} , \tilde{v} имеет вид (4.6).

Теорема 4.2. [15] *Пусть выполнены условия теоремы 4.1. Тогда для любых значений*

$$t_0 < t_1, \quad x^0 = \begin{pmatrix} \xi_0^0 \\ \eta_0^0 \\ \vdots \\ \xi_N^0 \\ \eta_N^0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2N+2}, \quad x^1 = \begin{pmatrix} \xi_0^1 \\ \eta_0^1 \\ \vdots \\ \xi_N^1 \\ \eta_N^1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2N+2}$$

существует управление $v = v_{x^0 x^1}(t)$, при котором система (4.1) имеет решение $x(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, удовлетворяющее граничным условиям $x(t_0) = x^0$, $x(t_1) = x^1$. Указанное управление определяется формулой

$$v_{x^0 x^1}(t) = \alpha^{-1} \left(\frac{d^{2N+2}}{dt^{2N+2}} + \sum_{p=1}^N \gamma_p \frac{d^{2p}}{dt^{2p}} \right) y(t), \quad t \in [t_0, t_1], \quad (4.15)$$

где $y \in C^{2N+2}[t_0, t_1]$ – произвольная функция, удовлетворяющая граничным условиям:

$$y(t_i) = \sum_{j=0}^N c_j \xi_j^i, \quad \dot{y}(t_i) = c_0 \eta_0^i + \sum_{j=1}^N c_j \omega_j \eta_j^i,$$

$$\begin{aligned}
& \begin{pmatrix} \frac{d^2}{dt^2} y \\ \frac{d^4}{dt^4} y \\ \vdots \\ \frac{d^{2N}}{dt^{2N}} y \end{pmatrix}_{t=t_i} = -WC\Omega^2 \begin{pmatrix} \xi_1^i \\ \xi_2^i \\ \vdots \\ \xi_N^i \end{pmatrix}, \\
& \begin{pmatrix} \frac{d^3}{dt^3} y \\ \frac{d^5}{dt^5} y \\ \vdots \\ \frac{d^{2N+1}}{dt^{2N+1}} y \end{pmatrix}_{t=t_i} = -WC\Omega^3 \begin{pmatrix} \eta_1^i \\ \eta_2^i \\ \vdots \\ \eta_N^i \end{pmatrix}, \quad i = 0, 1, \\
& \gamma_p = \sum_{k=1}^N \left\{ \omega_k^{2N} \left(\prod_{\substack{1 \leq l \leq N \\ l \neq k}} \frac{1}{\omega_k^2 - \omega_l^2} \right) \sum_{\substack{1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_{N-p} \leq N \\ j_1, j_2, \dots, j_{N-p} \neq k}} (\omega_{j_1} \omega_{j_2} \cdots \omega_{j_{N-p}})^2 \right\}.
\end{aligned} \tag{4.16}$$

$$\tag{4.17}$$

В формуле (4.17) сумма по (j_1, \dots, j_{N-p}) полагается равной единице при $p = N$, все произведения с пустым множеством индексов также считаются равными единице.

Доказательство. Приведем систему (4.1) к канонической форме (4.6) с помощью преобразования (4.5). Если функция $y(t)$ принадлежит классу $C^{2N+2}[t_0, t_1]$ и удовлетворяет граничным условиям (4.16), то

$$\tilde{x}(t) = \left(y(t), \frac{d}{dt} y(t), \dots, \frac{d^{2N+1}}{dt^{2N+1}} y(t) \right)^T,$$

очевидно, является решением системы (4.6) с управлением

$$\tilde{v}(t) = \frac{d^{2N+2}}{dt^{2N+2}} y(t).$$

Согласно формулам (4.5) соответствующая вектор-функция $x(t) = \Phi^{-1} \tilde{x}(t)$ удовлетворяет граничным условиям

$$x(t_0) = x^0, \quad x(t_1) = x^1$$

и системе (4.1) с управлением

$$v(t) = \alpha^{-1}(\tilde{v}(t) - \beta \xi(t)). \tag{4.18}$$

Учитывая, что $\tilde{\xi} = -WC\Omega^2\xi$ в (4.7), перепишем соотношение (4.18) следующим образом:

$$v(t) = \alpha^{-1} \frac{d^{2N+2}}{dt^{2N+2}} y(t) + \alpha^{-1} \beta \Omega^{-2} C^{-1} W^{-1} \left(\frac{d^2}{dt^2} y(t), \frac{d^4}{dt^4} y(t), \dots, \frac{d^{2N}}{dt^{2N}} y(t) \right)^T.$$

Проведя выкладки с использованием Леммы 4.1, получим формулу (4.15).

Доказанная теорема сводит поиск управления к определению функции $y(t)$ исходя из $2 \times (2N + 2)$ граничных условий (4.16). В частности, такую функцию $y(t)$ можно искать в виде многочлена. Отметим, что в формулу для управления (4.15) входят только производные четного порядка от $y(t)$.

Полученные результаты позволяют решать двухточечную задачу управления для системы (4.1) *явным образом* при произвольном количестве упругих координат. Представляет несомненный интерес дальнейшее исследование применимости такого подхода при добавлении к правой части системы (4.1) нелинейных членов. Вопрос о влиянии предложенного управления на высокочастотные моды колебаний балки с номерами выше N также требует дальнейшего анализа в рамках теории систем с распределенными параметрами. Эти вопросы исследуются в дальнейших подразделах.

4.2 Проверка условий точной линеаризуемости с обратной связью

Как отмечено в работах [150, 169, 170], многие классы систем, используемых в нелинейной теории управления, являются плоскими (flat) системами. В частности, цитируемые работы содержат примеры плоских систем, которые описывают движение твердого тела под воздействием двух управляющих моментов, кинематику и динамику роботов-манипуляторов и подъемных кранов, процессы в электромеханических системах и химических реакторах. Поскольку каждая плоская система приводится к линейной с помощью некоторого преобразования с динамической обратной связью, то для таких систем эффективно решаются задачи планирования движения,

отслеживания траектории, стабилизации. Однако, алгоритмическая проверка принадлежности произвольной нелинейной системы к классу плоских систем и построение соответствующих преобразований остаются открытыми проблемами [170, с. 738], [171].

В данном подразделе исследуется нелинейная система обыкновенных дифференциальных уравнений с управлением, описывающая движение твердого тела с присоединенной упругой балкой в конечномерной постановке. Будет доказано (теорема 4.3), что рассматриваемая система не является плоской при любом количестве обобщенных координат, характеризующих упругие колебания.

Точная линеаризация и плоские системы. Следуя определению [170, с. 710], система дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = F(x, u), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^m \quad (4.19)$$

называется *плоской*, если существуют целые числа $k, l \geq 0$ и функции

$$h : \mathbb{R}^n \times (\mathbb{R}^m)^{k+1} \rightarrow \mathbb{R}^m, \quad \varphi : (\mathbb{R}^m)^{l+1} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad \psi : (\mathbb{R}^m)^{l+1} \rightarrow \mathbb{R}^m,$$

для которых

$$\begin{aligned} y &= h(x, u, \dot{u}, \dots, u^{(k)}), \\ x &= \varphi(y, \dot{y}, \dots, y^{(l)}), \quad u = \psi(y, \dot{y}, \dots, y^{(l)}). \end{aligned} \quad (4.20)$$

Здесь x – фазовый вектор системы (4.19), u – управление; предполагается, что функции F, h, φ, ψ удовлетворяют некоторым условиям регулярности. Как отмечалось, вопрос о существовании функции h , вообще говоря, является открытой проблемой [171]. Однако, в некоторых частных случаях возможно конструктивно проверить принадлежность конкретной системы к классу плоских систем.

Рассмотрим частный случай аффинной по управлению системы (4.19) при $m = 1$:

$$\dot{x} = f(x) + g(x)u, \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n, \quad u \in \mathbb{R}^1, \quad (4.21)$$

где $f, g \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$. Будем говорить, что система (4.21) *линеаризуема* (со статической обратной связью), если существуют диффеоморфизм

$$\tilde{x} = \Phi(x) \quad (4.22)$$

и преобразование с обратной связью

$$\tilde{u} = \alpha(x)u + \beta(x), \quad \beta(x) \neq 0, \quad (4.23)$$

которые приводят систему (4.21) к линейной управляемой системе:

$$\dot{\tilde{x}}_1 = \tilde{x}_2, \quad \dot{\tilde{x}}_2 = \tilde{x}_3, \quad \dots, \quad \dot{\tilde{x}}_{n-1} = \tilde{x}_n, \quad \dot{\tilde{x}}_n = \tilde{u},$$

где $\tilde{x} = (\tilde{x}_1, \tilde{x}_2, \dots, \tilde{x}_n)^T$ – фазовый вектор, \tilde{u} – управление. Если указанные преобразования (4.22), (4.23) существуют для значений x из некоторой окрестности точки $x_0 \in \mathbb{R}^n$, то система (4.21) называется *локально линеаризуемой в окрестности точки x_0* . Согласно результату [172] (см. также [170, с. 740]), существование функций h, φ, ψ для системы (4.21) эквивалентно свойству линеаризуемости этой системы со статической обратной связью.

Для формулировки условий линеаризуемости введем скобку Ли векторных полей f и g :

$$[f, g](x) = \frac{\partial g(x)}{\partial x} f(x) - \frac{\partial f(x)}{\partial x} g(x),$$

где $\frac{\partial f(x)}{\partial x}$ и $\frac{\partial g(x)}{\partial x}$ обозначают матрицы Якоби отображений f и g . Определим итерированные скобки Ли следующего вида:

$$ad_f^0 g = g, \quad ad_f^1 g = [f, g], \quad ad_f^{j+1} g = [f, ad_f^j g], \quad j = 1, 2, \dots$$

Утверждение 4.1. [173], [168, с. 180] Система (4.21) локально линеаризуема в окрестности точки $x_0 \in \mathbb{R}^n$ только тогда, когда в некоторой окрестности $G \ni x_0$ выполнены два условия:

(C1) $\{g(x), ad_f g(x), \dots, ad_f^{n-1} g(x)\}$ – линейно-независимы при всех $x \in G$;

(C2) для каждой $0 \leq i, j \leq n-2$ существуют гладкие функции $\gamma_q^{ij}(x)$,

такие что

$$[ad_f^i g, ad_f^j g](x) = \sum_{q=0}^{n-2} \gamma_q^{ij}(x) ad_f^q g(x), \quad \forall x \in G.$$

Вращение твердого тела с упругими балками. Подсистема нелинейных уравнений движения (3.16), соответствующая упругим координатам с индексом не выше N , записывается следующим образом в случае одной балки ($k = 1$):

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_0 &= \eta_0, \\ \dot{\eta}_0 &= v, \\ \dot{\xi}_j &= \omega_j \eta_j, \\ \dot{\eta}_j &= (\eta_0^2 r_j - \omega_j) \xi_j + b_j v, \quad (j = \overline{1, N}),\end{aligned}\tag{4.24}$$

где $\xi_0 = \phi$ – угол поворота твердого тела; $\eta_0 = \omega$ – угловая скорость вращения твердого тела; $v \in \mathbb{R}$ – управление; N – количество учитываемых мод колебаний упругой балки; ξ_j и η_j – координата и скорость для j -й моды колебаний балки. Коэффициенты системы (4.24) представимы в виде:

$$\omega_j = c_1 \sqrt{\lambda_{1j}} > 0, \quad b_j = -\frac{J_{1j}}{\rho_1}, \quad r_j = \frac{1}{c_1 \sqrt{\lambda_{1j}}}.$$

Докажем, что при любом числе N модальных координат система (4.24) не приводится к линейной в случае $r_1, r_2, \dots, r_N \neq 0$.

Теорема 4.3. [16] Пусть $0 < \omega_1 < \dots < \omega_N$, $b_j \neq 0$, $r_j \neq 0$ для всех $j = \overline{1, N}$. Тогда система (4.24) не является плоской (flat) системой и не линеаризуема локально в окрестности нуля.

Доказательство. Обозначим

$$z = \begin{pmatrix} \xi_0 \\ \eta_0 \\ \xi \\ \eta \end{pmatrix}, \quad \xi = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_N \end{pmatrix}, \quad \eta = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ \eta_2 \\ \vdots \\ \eta_N \end{pmatrix}$$

и перепишем систему (4.24) в виде:

$$\dot{z} = f(z) + g(z)v, \quad z \in \mathbb{R}^{2N+2}, \quad v \in \mathbb{R},\tag{4.25}$$

где z – фазовый вектор, v – управление,

$$f(z) = \begin{pmatrix} F_0 & 0_{2 \times N} & 0_{2 \times N} \\ 0_{N \times 2} & 0_{N \times N} & \Omega \\ 0_{N \times 2} & \eta_0^2 R - \Omega & 0_{N \times N} \end{pmatrix} z, \quad g(z) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0_{N \times 1} \\ b \end{pmatrix}, \quad F_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\Omega = \begin{pmatrix} \omega_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \omega_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \omega_N \end{pmatrix}, \quad R = \begin{pmatrix} r_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & r_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & r_N \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_N \end{pmatrix},$$

в записи блочных матриц $0_{i \times j}$ обозначает клетку из нулей с i строками и j столбцами. Докажем, что условие (C2) утверждения 4.1 не выполнено для системы (4.25) ни в какой окрестности точки $z = 0$. Для этого вычислим соответствующие матрицы Якоби и скобки Ли:

$$\frac{\partial f(z)}{\partial z} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0_{1 \times N} & 0_{1 \times N} \\ 0 & 0 & 0_{1 \times N} & 0_{1 \times N} \\ 0_{N \times 1} & 0_{N \times 1} & 0_{N \times N} & \Omega \\ 0_{N \times 1} & 2\eta_0 R \xi & \eta_0^2 R - \Omega & 0_{N \times N} \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial g(z)}{\partial z} = 0_{(2N+2) \times (2N+2)},$$

$$ad_f^0 g = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0_{N \times 1} \\ b \end{pmatrix}, \quad ad_f^1 g = [f, g] = -\frac{\partial f(z)}{\partial z} g = -\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \Omega b \\ 2\eta_0 R \xi \end{pmatrix}. \quad (4.26)$$

Вычисляя последующие скобки Ли (с учетом коммутирования степеней диагональных матриц Ω и R), получим:

$$ad_f^{2j} g = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ Q_j(\eta_0) \xi \\ -Q_j(\eta_0) \eta + P_j(\eta_0) b \end{pmatrix}, \quad ad_f^{2j+1} g = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2Q_j(\eta_0) \Omega \eta - P_j(\eta_0) \Omega b \\ 2Q_j(\eta_0) (\Omega - \eta_0^2 R) \xi \end{pmatrix} \quad (4.27)$$

при всех $j \in \mathbb{N}$, где

$$Q_j(\eta_0) = 2^{2j-1}\eta_0 R \Omega^j (\eta_0^2 R - \Omega)^{j-1}, \quad P_j(\eta_0) = \Omega^j (\eta_0^2 R - \Omega)^j. \quad (4.28)$$

Проверим условие (C2) утверждения 4.1 для скобок $[ad_f^0 g, ad_f^1 g]$. Если условие (C2) выполнено, то для всех z из некоторой окрестности нуля выполнено соотношение

$$[ad_f^0 g, ad_f^1 g] = \begin{pmatrix} O_{2 \times 1} \\ O_{N \times 1} \\ -2R\xi \end{pmatrix} = \sum_{j=0}^{2N} \gamma_j ad_f^j g(z) \quad (4.29)$$

при некоторых $\gamma_j = \gamma_j(z)$. Используя выражения (4.26), (4.27) и сравнивая соответствующие координаты векторов в (4.29), будем иметь: $\gamma_0 = \gamma_1 = 0$,

$$\begin{pmatrix} O_{N \times 1} \\ -2R\xi \end{pmatrix} = \sum_{j=1}^N \gamma_{2j} \begin{pmatrix} Q_j \xi \\ -Q_j \eta + P_j b \end{pmatrix} + \sum_{j=1}^{N-1} \gamma_{2j+1} \begin{pmatrix} 2\Omega(Q_j \eta - P_j) b \\ 2Q_j(\Omega - \eta_0^2 R) \xi \end{pmatrix}. \quad (4.30)$$

При фиксированном z соотношения (4.30) можно рассматривать как систему $2N$ линейных алгебраических уравнений относительно $2N - 1$ неизвестных $\gamma_2, \gamma_3, \dots, \gamma_{2N}$. Согласно теореме Кронекера – Капелли, такая система совместна только если ранг расширенной $2N \times 2N$ -матрицы

$$M = \begin{pmatrix} O_{N \times 1} & Q_1 \xi & 2\Omega(Q_1 \eta - P_1) b & \dots & 2\Omega(Q_{N-1} \eta - P_{N-1}) b & Q_N \xi \\ -2R\xi & -Q_1 \eta + P_1 b & 2Q_1(\Omega - \eta_0^2 R) \xi & \dots & 2Q_{N-1}(\Omega - \eta_0^2 R) \xi & -Q_N \eta + P_N b \end{pmatrix}$$

равен рангу $2N \times (2N - 1)$ -матрицы, полученной из M вычеркиванием первого столбца. Отсюда следует, что если в любой окрестности точки $z_0 = 0$ найдутся значения z , для которых $\text{rank } M = 2N$, то система (4.30) несовместна, т.е. условие (C2) нарушено. Пусть $N = 1$, тогда

$$\det M = \begin{vmatrix} O & Q_1 \xi \\ -2R\xi & -Q_1 \eta + P_1 b \end{vmatrix} = 2RQ_1 \xi_1^2 = 4r_1^2 \omega_1 \eta_0 \xi_1^2,$$

а значит условие (C2) не выполняется во всех точках $z = (\xi_0, \eta_0, \xi_1, \eta_1)^T \in \mathbb{R}^4$, которые лежат вне гиперплоскостей $\xi_1 = 0, \eta_0 = 0$.

Рассмотрим случай $N > 1$. Положим $\xi_1 = \dots = \xi_{N-1} = 0$ и вычислим $\det M$:

$$\det M = (-1)^N 2r_N \xi_N \omega_1 \omega_2 \dots \omega_{N-1}.$$

$$\cdot \begin{vmatrix} 0 & \dots & 0 & 2q_1^1 \eta_1 - p_1^1 b_1 & \dots & 2q_1^{N-1} \eta_1 - p_1^{N-1} b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 2q_{N-1}^1 \eta_{N-1} - p_{N-1}^1 b_{N-1} & \dots & 2q_{N-1}^{N-1} \eta_{N-1} - p_{N-1}^{N-1} b_{N-1} \\ q_N^1 \xi_N & \dots & q_N^N \xi_N & \omega_N (2q_N^1 \eta_N - p_N^1 b_N) & \dots & \omega_N (2q_N^{N-1} \eta_N - p_N^{N-1} b_N) \\ p_1^1 b_1 - q_1^1 \eta_1 & \dots & p_1^N b_1 - q_1^N \eta_1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{N-1}^1 b_{N-1} - q_{N-1}^1 \eta_{N-1} & \dots & p_{N-1}^N b_{N-1} - q_{N-1}^N \eta_{N-1} & 0 & \dots & 0 \end{vmatrix},$$

где $(q_1^j, q_2^j, \dots, q_N^j)$ и $(p_1^j, p_2^j, \dots, p_N^j)$ – диагональные элементы матриц $Q_j(\eta_0)$ и $P_j(\eta_0)$, соответственно. Раскладывая записанный определитель по минорам $(N-1)$ -го порядка из верхних строк матрицы M , получим

$$\det M = \pm 2r_N \xi_N^2 \omega_1 \omega_2 \dots \omega_{N-1} \Delta_1 \Delta_2, \quad (4.31)$$

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 2q_1^1 \eta_1 - p_1^1 b_1 & \dots & 2q_1^{N-1} \eta_1 - p_1^{N-1} b_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 2q_{N-1}^1 \eta_{N-1} - p_{N-1}^1 b_{N-1} & \dots & 2q_{N-1}^{N-1} \eta_{N-1} - p_{N-1}^{N-1} b_{N-1} \end{vmatrix},$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} q_N^1 & \dots & q_N^N \\ p_1^1 b_1 - q_1^1 \eta_1 & \dots & p_1^N b_1 - q_1^N \eta_1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{N-1}^1 b_{N-1} - q_{N-1}^1 \eta_{N-1} & \dots & p_{N-1}^N b_{N-1} - q_{N-1}^N \eta_{N-1} \end{vmatrix}.$$

Поскольку из формул (4.28) следует

$$2Q_j(\eta_0)\eta - P_j(\eta_0)b = (-1)^{j+1} \Omega^j b + O(\eta_0)$$

при $\eta_0 \rightarrow 0$, то запишем Δ_1 следующим образом:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} \omega_1 b_1 & -\omega_1^2 b_1 & \dots & (-1)^N \omega_1^{N-1} b_1 \\ \omega_2 b_2 & -\omega_2^2 b_2 & \dots & (-1)^N \omega_2^{N-1} b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega_{N-1} b_{N-1} & -\omega_{N-1}^2 b_{N-1} & \dots & (-1)^N \omega_{N-1}^{N-1} b_{N-1} \end{vmatrix} + O(\eta_0) =$$

$$= (\omega_1 b_1)(\omega_2 b_2) \dots (\omega_{N-1} b_{N-1}) \prod_{1 \leq i < j \leq N-1} (\omega_i - \omega_j) + O(\eta_0). \quad (4.32)$$

В (4.32) использована известная формула для определителя Вандермонда. Применяя (4.28), получим

$$Q_j(\eta_0) = 2\eta_0\Omega R(-4\Omega^2)^{j-1} + O(\eta_0^2), \quad P_j(\eta_0)b - Q_j(\eta_0)\eta = (-\Omega^2)^j b + O(\eta_0).$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \Delta_2 = 2\eta_0 r_N \omega_N & \begin{vmatrix} 1 & -4\omega_N^2 & \dots & (-4\omega_N^2)^{N-1} \\ -\omega_1^2 b_1 & (-\omega_1^2)^2 b_1 & \dots & (-\omega_1^2)^N b_1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ -\omega_{N-1}^2 b_{N-1} & (-\omega_{N-1}^2)^2 b_{N-1} & \dots & (-\omega_{N-1}^2)^N b_{N-1} \end{vmatrix} + O(\eta_0^2) = \\ & = 2\eta_0 r_N \omega_N \left(\prod_{i=1}^{N-1} b_i \omega_i^2 (\omega_i^2 - 4\omega_N^2) \right) \prod_{1 \leq i < j \leq N-1} (\omega_i^2 - \omega_j^2) + O(\eta_0^2). \end{aligned} \quad (4.33)$$

Из выражений (4.31), (4.32), (4.33) вытекает, что $\text{rank } M = 2N$ для достаточно малых $\eta_0 \neq 0$, $\xi_N \neq 0$, т.е. условие (C2) утверждения 4.1 не выполнено ни в какой окрестности точки $z_0 = 0$. Следовательно, система (4.25) не является локально линеаризуемой в окрестности $z_0 = 0$. Поскольку $m = \dim v = 1$, то рассматриваемая система (4.25) также не является плоской на основании утверждения из [172], [170, с. 740], что и требовалось.

Доказанный результат подтверждает, что теорема 4.1 о приведении линейной системы (т.е. системы (4.24) с $r_1 = \dots = r_N = 0$) к стандартной канонической форме является окончательным, в том смысле, что любое нелинейное возмущение системы (т.е. система (4.24) с $r_1, \dots, r_N \neq 0$) неприводимо к такой форме. Этот вывод справедлив для произвольного конечного числа N модальных обобщенных координат.

4.3 Оптимальное управление для конечномерной системы

Классический подход к решению задач оптимального управления, изложенный в известных монографиях [174, 175, 176], предполагает использование принципа максимума Понтрягина или метода динамического про-

граммирования Беллмана. Следует подчеркнуть, что метод Беллмана позволяет эффективно свести задачу оптимального управления для линейной системы с квадратичным функционалом качества к решению матричного уравнения Риккати для случая, если граничное условие в конечный момент времени не задано (см. [108, гл. 8.2]). В диссертационной работе использован иной подход к решению задачи оптимального управления с граничными условиями на обоих концах отрезка времени. Такой подход опирается на сведение задачи оптимального управления к вариационной задаче Лагранжа относительно вспомогательной функции $y(t)$.

Постановка задачи. Доказанная выше теорема 4.2 позволяет решать двухточечную задачу управления следующего вида.

Задача 4.1. Для заданных

$$t_0 < t_1, \quad x^0 = (\xi_0^0, \eta_0^0, \dots, \xi_N^0, \eta_N^0)^T \in \mathbb{R}^{2N+2}, \quad x^1 = (\xi_0^1, \eta_0^1, \dots, \xi_N^1, \eta_N^1)^T \in \mathbb{R}^{2N+2}$$

требуется найти функцию управления $v = v(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, для которой система (4.1) имеет решение $x(t)$, удовлетворяющее граничным условиям $x(t_0) = x^0$, $x(t_1) = x^1$.

В качестве допустимых управлений $v(t)$ в предыдущем подразделе рассматривались непрерывные функции. Возможно также использовать более широкие классы допустимых управлений $L_\infty[t_0, t_1]$, $L_2[t_0, t_1]$ и определять решения системы (4.1) с помощью формулы Коши (формулы вариации произвольных постоянных) (см. напр. [176, с. 55], [175, с. 77]). Известно, что задача 4.1 в общем случае имеет бесконечно много решений, и реализация некоторых решений может приводить к слишком большим значениям нормы управления. Поэтому рассмотрим задачу оптимального управления следующего вида.

Задача 4.2. Для заданных $t_0 < t_1$ и $x^0, x^1 \in \mathbb{R}^{2N+2}$ требуется найти функцию управления $\bar{v} \in L_2[t_0, t_1]$, которая минимизирует значения функционала

$$J(v) = \int_{t_0}^{t_1} |v(t)|^2 dt \quad (4.34)$$

в классе всех управлений $v \in L_2[t_0, t_1]$, решающих задачу 4.1.

Поскольку система (4.1) автономна, то без ограничения общности в дальнейшем будем считать, что $t_0 = 0, t_1 = \tau > 0$. Сформулируем основной результат о разрешимости задачи 4.2.

Теорема 4.4. [18] Пусть $b_j \neq 0, \omega_j \neq 0$, и все числа ω_j^2 различны для $j = \overline{1, N}$. Тогда для любых $x^0, x^1 \in \mathbb{R}^{2N+2}, \tau > 0$ существует единственное оптимальное управление $\bar{v}(t), t \in [0, \tau]$, решающее задачу 4.2. Указанное оптимальное управление является гладким и задается формулой

$$\bar{v}(t) = k_0 + k_1 t + \sum_{j=1}^N (U_j \cos(\omega_j t) + V_j \sin(\omega_j t)), \quad t \in [0, \tau]$$

где коэффициенты k_0, k_1, U_j, V_j удовлетворяют системе линейных алгебраических уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\tau^2}{2} k_0 + \frac{\tau^3}{6} k_1 + \sum_{j=1}^N \left(\frac{1 - \cos(\omega_j \tau)}{\omega_j^2} U_j + \frac{\omega_j \tau - \sin(\omega_j \tau)}{\omega_j^2} V_j \right) &= \xi_0^1 - \xi_0^0 - \eta_0^0 \tau; \\ \tau k_0 + \frac{\tau^2}{2} k_1 + \sum_{j=1}^N \left(\frac{\sin(\omega_j \tau)}{\omega_j} U_j + \frac{1 - \cos(\omega_j \tau)}{\omega_j} V_j \right) &= \eta_0^1 - \eta_0^0; \\ \frac{\cos(\omega_j \tau) - 1}{\omega_j} k_0 + \frac{\omega_j \tau \cos(\omega_j \tau) - \sin(\omega_j \tau)}{\omega_j^2} k_1 - \frac{\sin^2(\omega_j \tau)}{2\omega_j} U_j + \frac{\sin(2\omega_j \tau) - 2\omega_j \tau}{4\omega_j} V_j + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \left(\frac{\cos(\omega_i + \omega_j) \tau}{\omega_i + \omega_j} + \frac{\cos(\omega_j - \omega_i) \tau}{\omega_j - \omega_i} + \frac{2\omega_j}{\omega_i^2 - \omega_j^2} \right) U_i + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \left(\frac{\sin(\omega_i + \omega_j) \tau}{\omega_i + \omega_j} + \frac{\sin(\omega_i - \omega_j) \tau}{\omega_j - \omega_i} \right) V_i = \frac{\xi_j^1 \cos(\omega_j \tau) - \eta_j^1 \sin(\omega_j \tau) - \xi_j^0}{b_j}; \\ \frac{\sin(\omega_j \tau)}{\omega_j} k_0 + \frac{\omega_j \tau \sin(\omega_j \tau) + \cos(\omega_j \tau) - 1}{\omega_j^2} k_1 + \frac{2\omega_j \tau + \sin(2\omega_j \tau)}{4\omega_j} U_j + \frac{\sin^2(\omega_j \tau)}{2\omega_j} V_j + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \left(\frac{\cos(\omega_i - \omega_j) \tau}{\omega_j - \omega_i} - \frac{\cos(\omega_i + \omega_j) \tau}{\omega_i + \omega_j} + \frac{2\omega_i}{\omega_i^2 - \omega_j^2} \right) V_i + \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i \neq j} \left(\frac{\sin(\omega_i + \omega_j) \tau}{\omega_i + \omega_j} + \frac{\sin(\omega_i - \omega_j) \tau}{\omega_i - \omega_j} \right) U_i = \frac{\xi_j^1 \sin(\omega_j \tau) + \eta_j^1 \cos(\omega_j \tau) - \eta_j^0}{b_j}, \quad j = \overline{1, N}. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Доказательство этой теоремы будет проведено ниже.

Вспомогательные построения. Если выполнены условия теоремы 4.4, то каждое непрерывное управление $v(t)$, решающее задачу 4.1, можно по

теореме 4.2 представить в виде (4.15), где α и γ_p определяются формулами (4.8) и (4.17), а функция $y \in C^{2N+2}[t_0, t_1]$ удовлетворяет граничным условиям:

$$\begin{aligned}
 y(t_i) &= \sum_{j=0}^N c_j \xi_j^i, \quad \dot{y}(t_i) = c_0 \eta_0^i + \sum_{j=1}^N c_j \omega_j \eta_j^i, \\
 \begin{pmatrix} \frac{d^2}{dt^2} y \\ \frac{d^4}{dt^4} y \\ \vdots \\ \frac{d^{2N}}{dt^{2N}} y \end{pmatrix}_{t=t_i} &= -W \begin{pmatrix} c_1 \omega_1^2 \xi_1^i \\ c_2 \omega_2^2 \xi_2^i \\ \vdots \\ c_N \omega_N^2 \xi_N^i \end{pmatrix}, \\
 \begin{pmatrix} \frac{d^3}{dt^3} y \\ \frac{d^5}{dt^5} y \\ \vdots \\ \frac{d^{2N+1}}{dt^{2N+1}} y \end{pmatrix}_{t=t_i} &= -W \begin{pmatrix} c_1 \omega_1^3 \eta_1^i \\ c_2 \omega_2^3 \eta_2^i \\ \vdots \\ c_N \omega_N^3 \eta_N^i \end{pmatrix}, \quad i = 0, 1. \tag{4.36}
 \end{aligned}$$

Матрица W определена в (4.3),

$$c_j = -\frac{c_0}{\omega_j b_j} \prod_{\substack{1 \leq i \leq N \\ i \neq j}} \frac{\omega_i^2}{\omega_i^2 - \omega_j^2},$$

c_0 – произвольная ненулевая константа, произведения с пустым множеством индексов считаются равными единице. Приведем более удобную форму записи управления (4.15).

Лемма 4.2. *Формула (4.15) эквивалентна следующей:*

$$v(t) = \frac{1}{c_0 \omega_1^2 \omega_2^2 \dots \omega_N^2} \left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega_1^2 \right) \left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega_2^2 \right) \dots \left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega_N^2 \right) \frac{d^2 y(t)}{dt^2}, \tag{4.37}$$

где $t \in [t_0, t_1]$.

Доказательство. Раскрывая скобки в формуле (4.37) и приравнявая коэффициенты при соответствующих производных от $y(t)$ в (4.15) и (4.37), получим:

$$\alpha = c_0 \omega_1^2 \omega_2^2 \dots \omega_N^2, \quad \gamma_p = \sum_{1 \leq j_1 < j_2 < \dots < j_{N-p+1} \leq N} \omega_{j_1}^2 \omega_{j_2}^2 \dots \omega_{j_{N-p+1}}^2. \tag{4.38}$$

Для доказательства леммы достаточно установить равенства (4.38), где α и γ_p определяются выражениями (4.8) и (4.17). С этой целью вычислим определитель матрицы, образованной строками W из (4.3):

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ -\omega_1^2 & -\omega_2^2 & \dots & -\omega_N^2 \\ (-\omega_1^2)^2 & (-\omega_2^2)^2 & \dots & (-\omega_N^2)^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (-\omega_1^2)^{N-2} & (-\omega_2^2)^{N-2} & \dots & (-\omega_N^2)^{N-2} \\ (-\omega_1^2)^{N-m} & (-\omega_2^2)^{N-m} & \dots & (-\omega_N^2)^{N-m} \end{vmatrix} = \sum_{k=1}^N (-1)^{k+m} \omega_k^{2(N-m)} \Delta_k, \quad (4.39)$$

где $1 \leq m \leq N$, Δ_k – минор, полученный вычеркиванием последней строки и k -го столбца матрицы W . Формула (4.39) получена разложением определителя по элементам нижней строки. Из известной формулы для определителя Вандермонда [167, с. 32] следует, что

$$|W| = \prod_{i < l} (\omega_i^2 - \omega_l^2), \quad \Delta_k = \prod_{\substack{i < l \\ i, l \neq k}} (\omega_i^2 - \omega_l^2).$$

Подстановка этих выражений в формулу (4.39) при $m = 1$ дает такое тождество:

$$|W| = \prod_{i < l} (\omega_i^2 - \omega_l^2) = \sum_{k=1}^N (-1)^{k+1} \omega_k^{2(N-1)} \prod_{\substack{i < l \\ i, l \neq k}} (\omega_i^2 - \omega_l^2). \quad (4.40)$$

Заметим также, что для произвольного фиксированного индекса j выполняется равенство:

$$|W| = \prod_{i < l} (\omega_i^2 - \omega_l^2) = \left(\prod_{i < j} (\omega_i^2 - \omega_j^2) \right) \left(\prod_{i > j} (\omega_j^2 - \omega_i^2) \right) \left(\prod_{\substack{i < l \\ i, l \neq j}} (\omega_i^2 - \omega_l^2) \right). \quad (4.41)$$

Учитывая, что строки матрицы в (4.39) линейно зависимы при $1 < m \leq N$,

получим

$$\sum_{k=1}^N (-1)^k \omega_k^{2(N-m)} \prod_{\substack{i < l \\ i, l \neq k}} (\omega_i^2 - \omega_l^2) = 0, \quad (1 < m \leq N). \quad (4.42)$$

Перепишем формулу (4.8) для α следующим образом:

$$\begin{aligned} \alpha &= c_0 \omega_1^2 \dots \omega_N^2 \sum_{j=1}^N \frac{\omega_j^{2(N-1)}}{\prod_{i \neq j} (\omega_j^2 - \omega_i^2)} = \\ &= c_0 \omega_1^2 \dots \omega_N^2 \sum_{j=1}^N \frac{(-1)^{j-1} \omega_j^{2(N-1)}}{\left(\prod_{i < j} (\omega_i^2 - \omega_j^2) \right) \left(\prod_{i > j} (\omega_j^2 - \omega_i^2) \right)}. \end{aligned}$$

После приведения дроби под знаком суммы к общему знаменателю $|W|$ и применения формулы (4.41), получим

$$\alpha = \frac{c_0 \omega_1^2 \dots \omega_N^2}{|W|} \sum_{j=1}^N \left((-1)^{j-1} \omega_j^{2(N-1)} \prod_{\substack{i < l \\ i, l \neq j}} (\omega_i^2 - \omega_l^2) \right).$$

Отсюда с учетом разложения (4.40) следует, что $\alpha = c_0 \omega_1^2 \omega_2^2 \dots \omega_N^2$. Итак, остается доказать равенство (4.38) для γ_p . Приводя выражение (4.17) к общему знаменателю $|W|$ с помощью представления (4.41), будем иметь

$$\gamma_p = \frac{1}{|W|} \sum_{k=1}^N \left\{ (-1)^{k-1} \omega_k^{2N} \left(\prod_{\substack{i < l \\ i, l \neq k}} (\omega_i^2 - \omega_l^2) \right) \sum_{\substack{1 \leq j_1 < \dots < j_{N-p} \leq N \\ j_1, \dots, j_{N-p} \neq k}} (\omega_{j_1} \omega_{j_2} \dots \omega_{j_{N-p}})^2 \right\}. \quad (4.43)$$

Рассуждая по индукции, получим

$$\begin{aligned} \omega_k^{2N} \sum_{\substack{j_1 < \dots < j_{N-p} \\ j_1, \dots, j_{N-p} \neq k}} (\omega_{j_1} \dots \omega_{j_{N-p}})^2 &= \omega_k^{2(N-1)} \sum_{j_1 < \dots < j_{N-p+1}} (\omega_{j_1} \dots \omega_{j_{N-p+1}})^2 - \\ &\quad - \omega_k^{2(N-1)} \sum_{\substack{j_1 < \dots < j_{N-p+1} \\ j_1, \dots, j_{N-p+1} \neq k}} (\omega_{j_1} \dots \omega_{j_{N-p+1}})^2 = \\ &= \sum_{m=1}^p (-1)^{m-1} \omega_k^{2(N-m)} \sum_{j_1 < \dots < j_{N-p+m}} (\omega_{j_1} \dots \omega_{j_{N-p+m}})^2. \quad (4.44) \end{aligned}$$

Подставим (4.44) в (4.43) и воспользуемся свойством (4.42) для значений индекса $m > 1$. В результате останутся только слагаемые, соответствующие $m = 1$:

$$\begin{aligned} \gamma_p &= \frac{1}{|W|} \sum_{k=1}^N \left\{ (-1)^{k-1} \omega_k^{2(N-1)} \left(\prod_{\substack{i < l \\ i, l \neq k}} (\omega_i^2 - \omega_l^2) \right) \sum_{j_1 < \dots < j_{N-p+1}} (\omega_{j_1} \cdots \omega_{j_{N-p+1}})^2 \right\} = \\ &= \sum_{j_1 < \dots < j_{N-p+1}} (\omega_{j_1} \cdots \omega_{j_{N-p+1}})^2. \end{aligned}$$

Здесь использовано представление (4.40). Итак, равенства (4.38) доказаны.

Доказательство теоремы 4.4. Рассмотрим сначала задачу 4.2 в классе непрерывных функций управления $v(t)$ на отрезке $t \in [0, \tau]$. Из представления (4.15) и леммы 4.2 следует, что задача 4.2 эквивалентна задаче Лагранжа о минимизации функционала $\tilde{J}(y)$:

$$\tilde{J}(y) = \int_0^\tau F(y, \dot{y}, \ddot{y}, \dots, y^{(2N+2)}) dt \rightarrow \min, \quad (4.45)$$

$$F(y, \dot{y}, \dots, y^{(2N+2)}) = \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega_1^2 \right) \left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega_2^2 \right) \cdots \left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega_N^2 \right) \frac{d^2 y(t)}{dt^2} \right\}^2,$$

в классе функций $y \in C^{2N+2}[0, \tau]$, удовлетворяющих граничным условиям (4.36). Пусть $y = \bar{y}(t)$ – решение задачи (4.45), (4.36), тогда соответствующее ему по формуле (4.37) управление $\bar{v}(t)$ будет оптимальным для задачи 4.2 (в классе непрерывных управлений). Если $\bar{y} \in C^{4N+4}$, то $\bar{y}(t)$ удовлетворяет уравнению Эйлера – Пуассона для функционала \tilde{J} [177, с. 310]:

$$\frac{\partial F}{\partial y} + \sum_{k=1}^{2N+2} (-1)^k \frac{d^k}{dt^k} \left(\frac{\partial F}{\partial y^{(k)}} \right) \Big|_{y=\bar{y}(t)} = 0, \quad t \in [0, \tau], \quad (4.46)$$

а также граничным условиям (4.36). Введем линейный дифференциальный оператор $D : C^{2N}[0, \tau] \rightarrow C[0, \tau]$,

$$y(t) \mapsto Dy(t) = \left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega_1^2 \right) \left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega_2^2 \right) \cdots \left(\frac{d^2}{dt^2} + \omega_N^2 \right) y(t).$$

Тогда, как нетрудно видеть, уравнение (4.46) можно представить в следующем виде:

$$\frac{d^4}{dt^4} D^2 \bar{y}(t) = 0, \quad t \in [0, \tau]. \quad (4.47)$$

Поскольку решение $\bar{y}(t)$ уравнения (4.47) связано с оптимальным управлением $\bar{v}(t)$ соотношением (4.37), то $\bar{v}(t) = \frac{1}{c_0\omega_1^2\dots\omega_N^2} \frac{d^2}{dt^2} D\bar{y}(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению:

$$\frac{d^2}{dt^2} D\bar{v}(t) = 0, \quad t \in [0, \tau]. \quad (4.48)$$

Запишем характеристическое уравнение для (4.48):

$$\lambda^2(\lambda^2 + \omega_1^2)(\lambda^2 + \omega_2^2) \dots (\lambda^2 + \omega_N^2) = 0.$$

Отсюда следует, что всякое решение дифференциального уравнения (4.48) представимо в виде

$$\bar{v}(t) = k_0 + k_1 t + \sum_{j=1}^N (U_j \cos(\omega_j t) + V_j \sin(\omega_j t)), \quad t \in [0, \tau]. \quad (4.49)$$

Согласно теореме 4.2, граничные условия (4.36) на $y = \bar{y}(t)$ означают, что соответствующее решение $x(t)$ системы (4.1) с управлением $v = \bar{v}(t)$ обладает свойствами $x(0) = x^0$ и $x(\tau) = x^1$. Вместо интегрирования уравнения (4.47) с громоздкими граничными условиями (4.36), определим константы k_0, k_1, U_j, V_j с помощью подстановки управления (4.49) непосредственно в граничную задачу (4.1), $x(0) = x^0, x(\tau) = x^1$. Применение формулы Коши для линейной неоднородной системы (4.1) с $v = \bar{v}(t)$ и начальными условиями $x(0) = x^0$ дает:

$$\begin{pmatrix} \xi_j(t) \\ \eta_j(t) \end{pmatrix} = e^{tA_j} \begin{pmatrix} \xi_j^0 \\ \eta_j^0 \end{pmatrix} + \int_0^t e^{(t-s)A_j} \begin{pmatrix} 0 \\ b_j \bar{v}(s) \end{pmatrix} ds, \quad j = \overline{0, N}, \quad (b_0 = 1), \quad (4.50)$$

где

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad e^{tA_0} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$A_j = \begin{pmatrix} 0 & \omega_j \\ -\omega_j & 0 \end{pmatrix}, \quad e^{tA_j} = \begin{pmatrix} \cos \omega_j t & \sin \omega_j t \\ -\sin \omega_j t & \cos \omega_j t \end{pmatrix}, \quad j = \overline{1, N}.$$

Интегрируя первые два уравнения системы (4.1) с управлением $v = \bar{v}(t)$, получим

$$\eta_0(t) = \eta_0^0 + \int_0^t \bar{v}(s) ds, \quad \xi_0(t) = \xi_0^0 + \int_0^t \eta_0(s) ds.$$

Затем умножим обе части формулы (4.50) на e^{-tA_j} ($1 \leq j \leq N$) и запишем граничное условие $x(\tau) = x^1$ по компонентам $\xi_0, \eta_0, \dots, \xi_N, \eta_N$. В результате получим систему (4.35) из $2N + 2$ линейных неоднородных алгебраических уравнений относительно $2N + 2$ неизвестных k_0, k_1, U_j, V_j . Остается показать, что эта система имеет единственное решение при любых $\tau > 0$ и $x^0, x^1 \in \mathbb{R}^{2N+2}$, а также, что соответствующее управление (4.49) является оптимальным для задачи 4.2.

Для всякого ненулевого управления $v \in L_2[0, \tau]$ функционал (4.34), очевидно, удовлетворяет неравенству $J(v) > 0$. Поэтому задача 4.2 имеет решение $\bar{v} \in L_2[0, \tau]$ при любых $\tau > 0$ и $x^0, x^1 \in \mathbb{R}^{2N+2}$ на основании предложения 16.1 из [176, с. 216]. Кроме того, любое оптимальное управление $\bar{v}(t)$ является гладким, поскольку максимальное значение гамильтониана в принципе максимума Понтрягина достигается для управления в виде линейной функции от сопряженных переменных (см. [176, с. 219]). Следовательно, ввиду представления (4.15), (4.36), решение $y = \bar{y}(t)$ задачи Лагранжа (4.45) существует и является гладкой функцией, и формула (4.49) определяет оптимальное управление при некоторых значениях коэффициентов, определяемых условиями (4.35). Если предположить, что решение системы (4.35) неединственно при некоторых $\tau > 0$ и $x^0, x^1 \in \mathbb{R}^{2N+2}$, то возможно выбрать другие векторы граничных условий \tilde{x}^0, \tilde{x}^1 в правой части (4.35) таким образом, что система окажется несовместной. Сделанное предположение противоречит существованию оптимального управления для системы (4.1) с граничными условиями $x(0) = \tilde{x}^0, x(\tau) = \tilde{x}^1$. Теорема доказана.

4.4 Решение задачи приближенной управляемости в явном виде

В данном подразделе исследован вопрос о поведении решений бесконечномерной системы (3.18). В качестве управляющих функций использовано семейство функций $\bar{v}_N(t)$, которые решают двухточечную задачу управления для подсистем с N обобщенными упругими координатами. При дополнительных предположениях доказано, что такие управления решают задачу приближенной управляемости [82, с. 445] для полной системы, т.е. из любого начального состояния x^0 систему можно перевести в произвольную ε -окрестность заданного состояния x^1 в гильбертовом пространстве ℓ^2 . Этот результат обосновывает применимость оптимальных (в смысле L_2 -нормы) управлений, предложенных в теореме 4.4, для системы с бесконечным числом степеней свободы.

Запишем систему дифференциальных уравнений (3.18) в случае одной балки $k = 1$ следующим образом:

$$\dot{x} = Ax + Bv, \quad (4.51)$$

где $x = (\xi_0, \eta_0, \xi_1, \eta_1, \xi_2, \eta_2, \dots)^T \in \ell^2$ – фазовый вектор-столбец системы, $v \in \mathbb{R}^1$ – управление. Система (4.51) рассматривается в вещественном гильбертовом пространстве ℓ^2 со стандартной нормой

$$\|x\| = \left(\sum_{n=0}^{\infty} (\xi_n^2 + \eta_n^2) \right)^{1/2}.$$

Линейный оператор $A : D(A) \rightarrow \ell^2$ задан блочно-диагональной матрицей

$$\begin{aligned} A &= \text{diag}(A_0, A_1, A_2, \dots), \\ A_0 &= \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_n = \begin{pmatrix} 0 & \omega_n \\ -\omega_n & 0 \end{pmatrix}, \\ B &= (0, 1, 0, b_1, 0, b_2, \dots)^T \in \ell^2, \\ \omega_j &= c_1 \sqrt{\lambda_{1j}} > 0, \quad b_j = -J_{1j}/\rho_1. \end{aligned} \quad (4.52)$$

Приведенная система моделирует плоское вращение твердого тела с присоединенной к нему упругой балкой для малых значений угловой скорости (в уравнениях (4.51) отброшены нелинейные слагаемые).

Нетрудно проверить, что для любой последовательности $\{\omega_n\}_{n=1}^{\infty}$ оператор A замкнут, его область определения

$$D(A) = \{x \in \ell^2 \mid \sum_{n=1}^{\infty} \omega_n^2 (\xi_n^2 + \eta_n^2) < \infty\}$$

плотна в ℓ^2 . Оператор A представим в виде $A = \tilde{A}_0 + \tilde{A}$, где оператор

$$\tilde{A}_0 = \text{diag}(A_0, 0, 0, \dots)$$

ограничен, а $\tilde{A} = \text{diag}(0, A_1, A_2, \dots)$ – диссипативный оператор в ℓ^2 . По теореме Люмера – Филлипса (утверждение 1.7 на с. 43) и теореме об ограниченном возмущении инфинитезимального генератора [125, с. 76], A является инфинитезимальным генератором C_0 -полугруппы операторов $\{e^{tA}\}_{t \geq 0}$ в ℓ^2 . Отсюда следует, что для любых $\tau > 0$, $v \in L_1(0, \tau)$, $x^0 \in \ell^2$, задача Коши для уравнения (4.51) с начальным условием $x(0) = x^0 \in \ell^2$ и управлением $v = v(t)$ имеет единственное обобщенное (mild) решение $x = x(t; x^0, v)$ (см. [125, с. 106]):

$$x(t; x^0, v) = e^{tA}x^0 + \int_0^t e^{(t-s)A}Bv(s) ds, \quad t \in [0, \tau]. \quad (4.53)$$

Если $x^0 \in D(A)$ и $v \in C^1[0, \tau]$, то формула (4.53) определяет классическое решение рассмотренной задачи Коши на $[0, \tau)$ (см. [46, с. 285], [125, с. 107]).

Зададимся произвольным натуральным числом N и рассмотрим уравнения системы (4.51), соответствующие координатам ξ_j, η_j с индексами $j \leq N$:

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_0 &= \eta_0, \\ \dot{\eta}_0 &= v, \\ \dot{\xi}_j &= \omega_j \eta_j, \\ \dot{\eta}_j &= -\omega_j \xi_j + b_j v, \quad j = \overline{1, N}. \end{aligned} \quad (4.54)$$

Для произвольных векторов

$$x_N^0 = (\xi_0^0, \eta_0^0, \dots, \xi_N^0, \eta_N^0)^T \in \mathbb{R}^{2N+2}, \quad x_N^1 = (\xi_0^1, \eta_0^1, \dots, \xi_N^1, \eta_N^1)^T \in \mathbb{R}^{2N+2},$$

в теореме 4.4 предложено (оптимальное) управление $v = \bar{v}_N(t)$, $0 \leq t \leq \tau$, которое переводит фазовый вектор $x_N = (\xi_0, \eta_0, \dots, \xi_N, \eta_N)^T$ системы (4.54) из x_N^0 в x_N^1 за произвольное время $\tau > 0$. Указанное управление определяется формулой

$$\bar{v}_N(t) = k_0 + k_1 t + \sum_{j=1}^N (U_j \cos(\omega_j t) + V_j \sin(\omega_j t)), \quad t \in [0, \tau], \quad (4.55)$$

где коэффициенты k_0, k_1, U_j, V_j удовлетворяют системе линейных уравнений

$$(M + F) \begin{pmatrix} k_0 \\ \tau k_1 \\ U_1 \\ V_1 \\ \vdots \\ U_N \\ V_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (\xi_0^1 - \xi_0^0)/\tau - \eta_0^0 \\ \eta_0^1 - \eta_0^0 \\ (\xi_1^1 \sin \omega_1 \tau + \eta_1^1 \cos \omega_1 \tau - \eta_1^0)/b_1 \\ (\xi_1^1 \cos \omega_1 \tau - \eta_1^1 \sin \omega_1 \tau - \xi_1^0)/b_1 \\ \vdots \\ (\xi_N^1 \sin \omega_N \tau + \eta_N^1 \cos \omega_N \tau - \eta_N^0)/b_N \\ (\xi_N^1 \cos \omega_N \tau - \eta_N^1 \sin \omega_N \tau - \xi_N^0)/b_N \end{pmatrix}, \quad (4.56)$$

где M – блочно-диагональная матрица размера $(2N + 2) \times (2N + 2)$,

$$M = \text{diag} \left(\left(\begin{pmatrix} \tau/2 & \tau/6 \\ \tau & \tau/2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \tau/2 & 0 \\ 0 & -\tau/2 \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \tau/2 & 0 \\ 0 & -\tau/2 \end{pmatrix} \right) \right). \quad (4.57)$$

Компоненты матрицы $F = (f_{lk})$ заданы формулами

$$\begin{aligned} f_{1,2i+1} &= \frac{1 - \cos(\omega_i \tau)}{\omega_i^2 \tau}, \quad f_{1,2i+2} = \frac{\omega_i \tau - \sin(\omega_i \tau)}{\omega_i^2 \tau}, \quad f_{2,2i+1} = \frac{\sin(\omega_i \tau)}{\omega_i}, \quad f_{2,2i+2} = \frac{1 - \cos(\omega_i \tau)}{\omega_i}, \\ f_{2j+1,1} &= \frac{\sin(\omega_j \tau)}{\omega_j}, \quad f_{2j+1,2} = \frac{\omega_j \tau \sin(\omega_j \tau) + \cos(\omega_j \tau) - 1}{\omega_j^2 \tau}, \quad f_{2j+1,2j+1} = \frac{\sin(2\omega_j \tau)}{4\omega_j}, \\ f_{2j+1,2j+2} &= \frac{\sin^2(\omega_j \tau)}{2\omega_j}, \quad f_{2j+1,2i+1} = \frac{1}{2} \left(\frac{\sin(\omega_i + \omega_j)\tau}{\omega_i + \omega_j} + \frac{\sin(\omega_i - \omega_j)\tau}{\omega_i - \omega_j} \right), \\ f_{2j+1,2i+2} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\cos(\omega_i - \omega_j)\tau}{\omega_j - \omega_i} - \frac{\cos(\omega_i + \omega_j)\tau}{\omega_i + \omega_j} + \frac{2\omega_i}{\omega_i^2 - \omega_j^2} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f_{2j+2,1} &= \frac{\cos(\omega_j \tau) - 1}{\omega_j}, \quad f_{2j+2,2} = \frac{\omega_j \tau \cos(\omega_j \tau) - \sin(\omega_j \tau)}{\omega_j^2 \tau}, \quad f_{2j+2,2j+1} = -\frac{\sin^2(\omega_j \tau)}{2\omega_j}, \\
f_{2j+2,2j+2} &= \frac{\sin(2\omega_j \tau)}{4\omega_j}, \quad f_{2j+2,2i+1} = \frac{1}{2} \left(\frac{\cos(\omega_i + \omega_j) \tau}{\omega_i + \omega_j} + \frac{\cos(\omega_j - \omega_i) \tau}{\omega_j - \omega_i} + \frac{2\omega_j}{\omega_i^2 - \omega_j^2} \right), \\
f_{2j+2,2i+2} &= \frac{1}{2} \left(\frac{\sin(\omega_i + \omega_j) \tau}{\omega_i + \omega_j} + \frac{\sin(\omega_i - \omega_j) \tau}{\omega_j - \omega_i} \right), \quad i, j = \overline{1, N}, \quad i \neq j. \quad (4.58)
\end{aligned}$$

Матричная запись уравнения (4.56) получена из системы (4.35) путем деления первого уравнения системы на τ и перестановки последних двух уравнений (с индексом j) в системе (4.35).

Далее будет показано, что управление $v = \bar{v}_N(t)$ может быть использовано для решения задачи приближенной управляемости бесконечномерной системы (4.51) при достаточно больших N и τ .

Обозначим

$$S = \{x \in \ell^2 \mid \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{j=n+1}^{\infty} b_j^2 \right) \left(\sum_{j=1}^n \frac{\xi_j^2 + \eta_j^2}{b_j^2} \right) = 0\}. \quad (4.59)$$

Докажем основной результат данного раздела.

Теорема 4.5. [20] Пусть $b_j \neq 0$, $\omega_j > 0$, $\omega_i \neq \omega_j$ для всех индексов $i \neq j$. Предположим также, что

$$\sum_{\substack{i, j=1 \\ i \neq j}}^{\infty} \frac{1}{(\omega_i - \omega_j)^2} < \infty. \quad (4.60)$$

Тогда существует $\tau > 0$, при котором для любых $x^0, x^1 \in S \subset \ell^2$ и $\varepsilon > 0$ найдется такое число $N_0 = N_0(x^0, x^1, \varepsilon)$, что неравенство

$$\|x(\tau; x^0, \bar{v}_N) - x^1\| < \varepsilon \quad (4.61)$$

выполнено при всех $N \geq N_0$. Здесь управление $\bar{v}_N(t)$ ($0 \leq t \leq \tau$) определено формулой (4.55).

Доказательство. Для $x^0, x^1 \in \ell^2$, $N \geq 1$, обозначим

$$x^i = \begin{pmatrix} x_N^i \\ z_N^i \end{pmatrix}, \quad x_N^i = \begin{pmatrix} \xi_0^i \\ \eta_0^i \\ \vdots \\ \xi_N^i \\ \eta_N^i \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2N+2}, \quad z_N^i = \begin{pmatrix} \xi_{N+1}^i \\ \eta_{N+1}^i \\ \xi_{N+2}^i \\ \eta_{N+2}^i \\ \vdots \end{pmatrix} \in \ell^2, \quad (i = 0, 1). \quad (4.62)$$

С учетом блочной структуры матрицы оператора A , формула (4.53) примет вид:

$$x(t; x^0, v) = (\xi_0(t), \eta_0(t), \xi_1(t), \eta_1(t), \dots)^T, \\ \begin{pmatrix} \xi_j(t) \\ \eta_j(t) \end{pmatrix} = e^{tA_j} \begin{pmatrix} \xi_j^0 \\ \eta_j^0 \end{pmatrix} + b_j \int_0^t e^{(t-s)A_j} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} v(s) ds, \quad b_0 = 1, \quad j = 0, 1, \dots, \quad (4.63)$$

где

$$e^{tA_0} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad e^{tA_j} = \begin{pmatrix} \cos \omega_j t & \sin \omega_j t \\ -\sin \omega_j t & \cos \omega_j t \end{pmatrix}, \quad (j = 1, 2, \dots). \quad (4.64)$$

Зададимся произвольным числом $\varepsilon > 0$ и подставим управление $v = \bar{v}_N(t)$, $0 \leq t \leq \tau$, в формулу (4.63). Из построения $\bar{v}_N(t)$ в теореме 4.4 следует, что

$$(\xi_0(\tau), \eta_0(\tau), \dots, \xi_N(\tau), \eta_N(\tau))^T = x_N^1$$

при любом τ . Определим оператор $\tilde{A}_N = \text{diag}(A_{N+1}, A_{N+2}, \dots) : D(A) \rightarrow \ell^2$ и оценим норму разности $\|x(\tau; x^0, \bar{v}_N) - x^1\|$, учитывая представления (4.62), (4.63) и неравенство треугольника:

$$\begin{aligned} \|x(\tau; x^0, \bar{v}_N) - x^1\| &= \|(\xi_{N+1}(\tau), \eta_{N+1}(\tau), \xi_{N+2}(\tau), \eta_{N+2}(\tau), \dots)^T - z_N^1\| \leq \\ &\leq \|e^{\tau \tilde{A}_N} z_N^0\| + \left\| \int_0^\tau e^{(\tau-s)\tilde{A}_N} (0, b_{N+1}, 0, b_{N+2}, \dots)^T \bar{v}_N(s) ds \right\| + \|z_N^1\| \leq \\ &\leq \|e^{\tau \tilde{A}_N}\| \cdot \|z_N^0\| + \|z_N^1\| + \int_0^\tau \|e^{(\tau-s)\tilde{A}_N}\| \left(\sum_{j=N+1}^\infty b_j^2 \right)^{1/2} |\bar{v}_N(s)| ds. \quad (4.65) \end{aligned}$$

Из (4.64) следует что норма линейного оператора $e^{t\tilde{A}_N} : \ell^2 \rightarrow \ell^2$ равна единице. Таким образом, из (4.65) вытекает неравенство

$$\begin{aligned} \|x(\tau; x^0, \bar{v}_N) - x^1\| &\leq \|z_N^0\| + \|z_N^1\| + \left(\sum_{j=N+1}^{\infty} b_j^2 \right)^{1/2} \int_0^{\tau} 1 \cdot |v_N(s)| ds \leq \\ &\leq \|z_N^0\| + \|z_N^1\| + \left(\tau \sum_{j=N+1}^{\infty} b_j^2 \right)^{1/2} \|\bar{v}_N\|_{L_2(0,\tau)}. \end{aligned} \quad (4.66)$$

Здесь использовано неравенство Коши – Буняковского в $L_2(0, \tau)$. Поскольку $x^0, x^1 \in \ell^2$ то, очевидно, найдется такое число $N_1 = N_1(x^0, x^1, \varepsilon)$, что $\|z_N^0\| < \varepsilon/3$, $\|z_N^1\| < \varepsilon/3$ при всех $N \geq N_1$. В силу оценки (4.66) для доказательства теоремы достаточно показать, что из $x^0, x^1 \in S$ следует существование числа $N_0 = N_0(x^0, x^1, \varepsilon) \geq N_1$, такого что

$$\left(\sum_{j=N+1}^{\infty} b_j^2 \right) \|\bar{v}_N\|_{L_2(0,\tau)}^2 < \frac{\varepsilon^2}{9\tau} \quad (4.67)$$

при некотором $\tau > 0$ для всех $N \geq N_0$. Вычислим

$$\begin{aligned} \|\bar{v}_N\|_{L_2(0,\tau)}^2 &= \int_0^{\tau} \bar{v}_N^2(t) dt = \\ &= \int_0^{\tau} \left\{ k_0 + k_1 t + \sum_{j=1}^N (U_j \cos(\omega_j t) + V_j \sin(\omega_j t)) \right\} \bar{v}_N(t) dt. \end{aligned} \quad (4.68)$$

Для вычисления (4.68) домножим обе части формулы (4.63) на $e^{-\tau A_j}$ при $j = \overline{0, N}$:

$$e^{-\tau A_j} \begin{pmatrix} \xi_j^1 \\ \eta_j^1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \xi_j^0 \\ \eta_j^0 \end{pmatrix} = b_j \int_0^{\tau} e^{-t A_j} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \bar{v}_N(t) dt.$$

Отсюда, с учетом представлений (4.64), получим

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \xi_0^1 - \xi_0^0 - \tau \eta_0^1 \\ \eta_0^1 - \eta_0^0 \end{pmatrix} &= \int_0^{\tau} \begin{pmatrix} -t \bar{v}_N(t) \\ \bar{v}_N(t) \end{pmatrix} dt, \\ \begin{pmatrix} \xi_j^1 \cos \omega_j \tau - \eta_j^1 \sin \omega_j \tau - \xi_j^0 \\ \xi_j^1 \sin \omega_j \tau + \eta_j^1 \cos \omega_j \tau - \eta_j^0 \end{pmatrix} &= b_j \int_0^{\tau} \begin{pmatrix} -\sin(\omega_j t) \bar{v}_N(t) \\ \cos(\omega_j t) \bar{v}_N(t) \end{pmatrix} dt, \end{aligned}$$

при $j = 1, 2, \dots, N$. Подстановка этих интегралов в формулу (4.68) доказывает равенство

$$\begin{aligned} \|v_N\|_{L_2(0,\tau)}^2 &= (\eta_0^1 - \eta_0^0)k_0 + \left(\frac{\xi_0^0 - \xi_0^1}{\tau} + \eta_0^1 \right) \tau k_1 + \\ &+ \sum_{j=1}^N \left((\xi_j^1 \sin \omega_j \tau + \eta_j^1 \cos \omega_j \tau - \eta_j^0) \frac{U_j}{b_j} - (\xi_j^1 \cos \omega_j \tau - \eta_j^1 \sin \omega_j \tau - \xi_j^0) \frac{V_j}{b_j} \right). \end{aligned} \quad (4.69)$$

Нетрудно видеть, что коэффициенты при U_j, V_j в (4.69) совпадают (с точностью до знака) с выражениями в правой части уравнений (4.56). Обозначим в системе (4.56) вектор неизвестных через $\varkappa = (k_0, \tau k_1, U_1, V_1, \dots, U_N, V_N)^T$ и столбец свободных членов через y . Тогда система (4.56) примет вид $(M + F)\varkappa = y$, что эквивалентно записи

$$\varkappa = M^{-1}y - M^{-1}F\varkappa,$$

поскольку матрица M невырождена при всех $\tau > 0$. Отсюда следует, что

$$\|\varkappa\| \leq \|M^{-1}y\| + \|M^{-1}\| \cdot \|F\| \cdot \|\varkappa\|.$$

Если $\|M^{-1}\| \cdot \|F\| < 1$ то справедлива оценка

$$\|\varkappa\| \leq \frac{\|M^{-1}y\|}{1 - \|M^{-1}\| \cdot \|F\|}. \quad (4.70)$$

Вычислив обратную матрицу для (4.57), получим

$$M^{-1} = \frac{2}{\tau} \text{diag} \left(\left(\begin{array}{cc} 3 & -1 \\ -6 & 3 \end{array} \right), \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{array} \right), \dots, \left(\begin{array}{cc} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{array} \right) \right).$$

Учитывая, что матрица M^{-1} состоит из диагональных клеток, будем иметь

$$\begin{aligned} \|M^{-1}\| &= \frac{2}{\tau} \max \left\{ \left\| \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -6 & 3 \end{pmatrix} \right\|, \left\| \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\| \right\} = \\ &= \frac{2}{\tau} \max \left\{ \frac{\sqrt{61} + 7}{2}, 1 \right\} = \frac{\sqrt{61} + 7}{\tau}. \end{aligned}$$

Здесь и далее используется определение нормы $\|M^{-1}\| = \sup_{\|y\|=1} \|M^{-1}y\|$, где $\|y\|$ обозначает стандартную евклидову норму вектора y в \mathbb{R}^{2N+2} .

Оценим норму матрицы F :

$$\|F\|^2 \leq \sum_{l,k=1}^N f_{lk}^2 \leq \sum_{l,k=1}^{\infty} f_{lk}^2, \quad (4.71)$$

где элементы f_{lk} заданы формулами (4.58) для всех натуральных индексов. Зафиксируем произвольное число $\tau_0 > 0$. Нетрудно видеть, что каждое значение f_{lk} в (4.58) мажорируется линейной комбинацией чисел

$$\frac{1}{\omega_i}, \quad \frac{1}{\omega_i + \omega_j}, \quad \frac{1}{|\omega_i - \omega_j|}$$

с неотрицательными коэффициентами, которые равномерно ограничены при $\tau \geq \tau_0$. Из условия (4.60) вытекает, что последовательность положительных чисел $\{\omega_j\}_{j=1}^{\infty}$ имеет минимальный элемент $\omega_{min} > 0$. Следовательно, при выполнении условий теоремы справедливы неравенства:

$$\begin{aligned} \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\omega_j^2} &= \frac{1}{\omega_{min}^2} + \sum_{\omega_j > \omega_{min}} \frac{1}{\omega_j^2} < \frac{1}{\omega_{min}^2} + \sum_{\substack{\omega_i < \omega_j \\ \omega_j > \omega_{min}}} \frac{1}{(\omega_j - \omega_i)^2} < \\ &< \frac{1}{\omega_{min}^2} + \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{\infty} \frac{1}{(\omega_i - \omega_j)^2} < \infty, \\ \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{\infty} \frac{1}{(\omega_i + \omega_j)^2} &< \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{\infty} \frac{1}{(\omega_i - \omega_j)^2} < \infty. \end{aligned}$$

Это означает, что сумма (4.71) мажорируется сходящимся числовым рядом (равномерно по $\tau \geq \tau_0$), поэтому существует положительная константа $H < \infty$:

$$\|F\| \leq H, \quad \forall N \geq 1, \quad \forall \tau \geq \tau_0.$$

Выберем число τ из условий $\tau \geq \tau_0$, $\tau > (\sqrt{61} + 7)H$. Отметим, что такой выбор τ не зависит от граничных условий x^0 , x^1 и числа ε . Из оценки (4.70)

следует, что

$$\begin{aligned} \|\mathcal{Z}\| &\leq \frac{\tau \|M^{-1}y\|}{\tau - (\sqrt{61} + 7)H} = \\ &= \frac{\tau}{\tau - (\sqrt{61} + 7)H} \left\{ \left(\frac{\xi_0^1 - \xi_0^0}{\tau} - \eta_0^0 \right)^2 + (\eta_0^1 - \eta_0^0)^2 + \delta_N^2 \right\}^{1/2}, \end{aligned} \quad (4.72)$$

где

$$\begin{aligned} \delta_N^2 &= \sum_{j=1}^N \left(\frac{(\xi_j^1 \sin \omega_j \tau + \eta_j^1 \cos \omega_j \tau - \eta_j^0)^2}{b_j^2} + \frac{(\xi_j^1 \cos \omega_j \tau - \eta_j^1 \sin \omega_j \tau - \xi_j^0)^2}{b_j^2} \right) \leq \\ &\leq 2 \sum_{j=1}^N \left(\frac{(\xi_j^0)^2 + (\eta_j^0)^2 + (\xi_j^1)^2 + (\eta_j^1)^2}{b_j^2} \right). \end{aligned} \quad (4.73)$$

Здесь использовано неравенство $(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$. Применяя к формуле (4.69) неравенство Коши – Буняковского, получим

$$\|v_N\|_{L_2(0,\tau)}^2 \leq \|\mathcal{Z}\| \left\{ (\eta_0^1 - \eta_0^0)^2 + \left(\frac{\xi_0^0 - \xi_0^1}{\tau} + \eta_0^0 \right)^2 + \delta_N^2 \right\}^{1/2}.$$

Подставив сюда неравенства для $\|\mathcal{Z}\|$ из (4.72) и δ_N^2 из (4.73), придем к оценке

$$\|v_N\|_{L_2(0,\tau)}^2 \leq \hat{H} \left\{ (\xi_0^0)^2 + (\eta_0^0)^2 + (\xi_0^1)^2 + (\eta_0^1)^2 + \sum_{j=1}^N \left(\frac{(\xi_j^0)^2 + (\eta_j^0)^2 + (\xi_j^1)^2 + (\eta_j^1)^2}{b_j^2} \right) \right\} \quad (4.74)$$

с некоторой положительной константой \hat{H} . Поскольку $B \in \ell^2$, то

$$\sum_{j=N+1}^{\infty} b_j^2 \rightarrow 0 \quad \text{при } N \rightarrow \infty.$$

Из этого свойства и условия $x^0, x^1 \in S$ следует, что

$$\left(\sum_{j=N+1}^{\infty} b_j^2 \right) \left((\xi_0^0)^2 + (\eta_0^0)^2 + (\xi_0^1)^2 + (\eta_0^1)^2 + \sum_{j=1}^N \left(\frac{(\xi_j^0)^2 + (\eta_j^0)^2 + (\xi_j^1)^2 + (\eta_j^1)^2}{b_j^2} \right) \right) \rightarrow 0$$

при $N \rightarrow \infty$. Таким образом, неравенство (4.67) выполнено при достаточно больших N , что и доказывает теорему.

4.5 Приближенная управляемость модели Эйлера – Бернулли

С целью обоснования применимости теоремы 4.5 для управления моделью упругой системы с балкой Эйлера – Бернулли, проверим условия сходимости ряда (4.60) для дифференциального уравнения (4.51), коэффициенты которого допускают представления (4.52), т.е.

$$\omega_j = c_1 \sqrt{\lambda_{1j}} > 0, \quad b_j = -J_{1j}/\rho_1, \quad (4.75)$$

где λ_{1j} – собственные числа задачи Штурма – Лиувилля (3.3), (3.4), а значения J_{1j} определены в терминах собственных функций посредством соотношения (3.11).

Воспользуемся представлениями (4.75) для проверки условия (4.60) и построения оценки множества S в формуле (4.59).

Лемма 4.3. [21] *Пусть числовая последовательность $\{\omega_j\}_{j=1}^{\infty}$ задана с помощью представлений (4.75). Тогда*

$$\sum_{\substack{i, j = 1 \\ i \neq j}}^{\infty} \frac{1}{(\omega_i - \omega_j)^2} < \infty. \quad (4.76)$$

Доказательство. Воспользуемся представлением для собственных чисел (3.8):

$$\lambda_{1j} = (\beta_j/l_1)^4,$$

где $l_1 = l$ – длина балки, а $\beta_1 < \beta_2 < \dots$ – положительные корни трансцендентного уравнения (3.6),

$$1 + \cos(\beta_j) \cosh(\beta_j) = 0.$$

Перепишем это уравнение в виде

$$\cos(\beta_j) = \varphi(\beta_j), \quad \varphi(\beta_j) = -1/\cosh(\beta_j) \quad (4.77)$$

Поскольку $\varphi(\beta) \rightarrow 0$ и $\varphi'(\beta) \rightarrow 0$ при $\beta \rightarrow +\infty$, то решения уравнения (4.77) аппроксимируются нулями функции $\cos(\beta_j)$ при “больших” β_j , т.е. для всякого $\delta > 0$ найдется такое $n_0 = n_0(\delta) > 1$, что

$$\omega_-(j) < \omega_j < \omega_+(j) \quad (4.78)$$

для всех $j \geq n_0$, где

$$\omega_-(j) = \frac{\pi^2 c}{l^2} \left(j - \frac{1}{2} - \delta \right)^2, \quad \omega_+(j) = \frac{\pi^2 c}{l^2} \left(j - \frac{1}{2} + \delta \right)^2. \quad (4.79)$$

Выберем положительное число δ так, чтобы выполнялись условия

$$\omega_-(n_0) > \omega_{n_0-1}, \quad \omega_-(j+1) > \omega_+(j)$$

при всех $j \geq n_0(\delta)$. Нетрудно проверить, что эти условия могут выполняться только при $\delta < 1/2$. Поскольку все члены ряда (4.76) положительны, то перестановка слагаемых не влияет на его сходимость. Перепишем ряд (4.76) в виде

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \sum_{\substack{i, j = 1 \\ i \neq j}}^{\infty} \frac{1}{(\omega_i - \omega_j)^2} = \sum_{\substack{j \geq 1 \\ i > j}} \frac{1}{(\omega_i - \omega_j)^2} = \\ & = \sum_{\substack{1 \leq j < n_0 \\ j < i < n_0}} \frac{1}{(\omega_i - \omega_j)^2} + \sum_{\substack{1 \leq j < n_0 \\ i \geq n_0}} \frac{1}{(\omega_i - \omega_j)^2} + \sum_{\substack{j \geq n_0 \\ i > j}} \frac{1}{(\omega_i - \omega_j)^2} \end{aligned}$$

и заметим, что первая из сумм в фигурных скобках конечна. Это означает, что для доказательства сходимости ряда (4.76) достаточно установить, что

$$\sum_{\substack{1 \leq j < n_0 \\ i \geq n_0}} \frac{1}{(\omega_i - \omega_j)^2} < \infty, \quad \sum_{\substack{j \geq n_0 \\ i > j}} \frac{1}{(\omega_i - \omega_j)^2} < \infty. \quad (4.80)$$

Для исследования рядов (4.80) приведем неравенство, используемое в интегральном признаке сходимости. Если $f : [n_0, \infty) \rightarrow R$ — монотонно невозрастающая функция с неотрицательными значениями, то

$$\sum_{j=n_0}^{\infty} f(j) \leq f(n_0) + \int_{n_0}^{\infty} f(y) dy. \quad (4.81)$$

В справедливости этого неравенства легко убедиться, если сравнить площадь криволинейной трапеции, ограниченной графиком $f(y)$, с интегральной суммой, полученной разбиением промежутка интегрирования точками $y = n_0, n_0 + 1, n_0 + 2, \dots$. Если в левой части формулы (4.81) ряд расходится, то, очевидно, несобственный интеграл справа также расходится. Применим неравенства (4.78) и (4.81) к рядам (4.80):

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{1 \leq j < n_0 \\ i \geq n_0}} \frac{1}{(\omega_i - \omega_j)^2} &< \sum_{j=1}^{n_0-1} \sum_{i=n_0}^{\infty} \frac{1}{(\omega_-(i) - \omega_j)^2} \leq \\ &\leq \sum_{j=1}^{n_0-1} \left\{ \frac{1}{(\omega_-(n_0) - \omega_j)^2} + \int_{n_0}^{\infty} \frac{dy}{(\omega_-(y) - \omega_j)^2} \right\}, \end{aligned} \quad (4.82)$$

$$\begin{aligned} \sum_{\substack{j \geq n_0 \\ i > j}} \frac{1}{(\omega_i - \omega_j)^2} &< \sum_{\substack{j \geq n_0 \\ i > j}} \frac{1}{(\omega_-(i) - \omega_+(j))^2} \leq \\ &\leq \sum_{j=n_0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{(\omega_-(j+1) - \omega_+(j))^2} + \int_{j+1}^{\infty} \frac{dy}{(\omega_-(y) - \omega_+(j))^2} \right\}. \end{aligned} \quad (4.83)$$

Поскольку $\omega_-(y)$ — квадратичная функция, определенная в (4.79), и $\omega_-(y) - \omega_j \geq \omega_-(n_0) - \omega_j > 0$ при выбранном δ для всех $y \geq n_0, j \leq n_0 - 1$, то подынтегральное выражение в (4.82) допускает оценку

$$\frac{1}{(\omega_-(y) - \omega_j)^2} = O(y^{-4})$$

при $y \geq n_0, j \leq n_0 - 1$.

Отсюда следует, что при каждом значении индекса $j \leq n_0 - 1$ несобственный интеграл в правой части (4.82) сходится, а значит, сходится и ряд в левой части формулы (4.82). Для оценки правой части формулы (4.83) воспользуемся представлениями (4.79) и неравенством (4.81):

$$\begin{aligned} \sum_{j=n_0}^{\infty} \frac{1}{(\omega_-(j+1) - \omega_+(j))^2} &= \frac{l^4}{\pi^4 c^2} \sum_{j=n_0}^{\infty} \left\{ \left(j + \frac{1}{2} - \delta \right)^2 + \left(j - \frac{1}{2} + \delta \right)^2 \right\}^{-2} = \\ &= \frac{l^4}{4\pi^4 c^2 (1 - 2\delta)^2} \sum_{j=n_0}^{\infty} j^{-2}, \\ \sum_{j=n_0}^{\infty} \int_{j+1}^{\infty} \frac{dy}{(\omega_-(y) - \omega_+(j))^2} &= \frac{l^4}{\pi^4 c^2} \sum_{j=n_0}^{\infty} \int_{j+1}^{\infty} \left\{ \left(y - \frac{1}{2} - \delta \right)^2 + \left(j - \frac{1}{2} + \delta \right)^2 \right\}^{-2} dy = \\ &= \frac{l^4}{\pi^4 c^2} \sum_{j=n_0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{(2j - 1 + 2\delta)^3} \left(2 \ln \left(\frac{y + j - 1}{y - j - 2\delta} \right) - \frac{(2y - 1 - 2\delta)(2j - 1 - 2\delta)}{(y - j - 2\delta)(y + j - 1)} \right) \right\} \Big|_{y=j+1}^{\infty} = \\ &= \frac{l^4}{\pi^4 c^2} \sum_{j=n_0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{(2j - 1 + 2\delta)^3} \left(2 \ln \left(\frac{1 - 2\delta}{2j} \right) + \frac{(2j + 1 - 2\delta)(2j - 1 + 2\delta)}{2j(1 - 2\delta)} \right) \right\} = \sum_{j=n_0}^{\infty} O(j^{-2}). \end{aligned}$$

Таким образом, правая часть неравенства (4.83) мажорируется сходящимся рядом, что завершает доказательство леммы.

Доказанное утверждение позволяет вывести одно важное следствие теоремы 4.5 при некотором $\tau > 0$.

Следствие из теоремы 4.5. [21] Пусть коэффициенты системы (4.51) определены формулами (4.52). Тогда для любых x^0, x^1 из плотного подмножества $S \subset l^2$ и любого $\varepsilon > 0$ существует управление вида (4.55), при котором соответствующее решение системы (4.51) удовлетворяет оценке

$$\|x(\tau; x^0, \bar{v}_N) - x^1\| < \varepsilon.$$

Доказательство. Из леммы 4.3 следует, что коэффициенты ω_j удовлетворяют условиям теоремы 4.5. Из представлений (4.75) и (3.11) следует,

что $b_j \neq 0$ при всех $j = 1, 2, \dots$. Нетрудно видеть, что

$$S \supset S_0 = \{x \in \ell^2 \mid \exists n_0 : \xi_j = \eta_j = 0, \forall j \geq n_0\},$$

а множество S_0 плотно в ℓ^2 .

4.6 Выводы

В разделе 4 предложен конструктивный способ построения программного управления для модели вращающегося твердого тела с балкой Эйлера – Бернулли при фиксированных начальном и конечном значениях фазового вектора. Этот способ основан на явной схеме приведения линеаризованной системы с конечным числом степеней свободы (4.1) к стандартной канонической форме Бруновского. Отметим, что система вида (4.1) рассматривалась в монографии Ф.Л. Черноусько, Л.Д. Акуленко и Б.Н. Соколова [178, с. 340] для описания движения системы нескольких маятников с подвижной точкой подвеса. В цитируемой книге были найдены условия *существования* оптимального по быстродействию управления, а также предложено решение задачи о разгоне двух маятников из состояния покоя. Вопросы приведения к канонической форме и построения функций управления для такого типа систем в общем случае не рассматривались. Перечислим новые научные результаты, которые получены в разделе 4.

1. При произвольном количестве обобщенных модальных координат в явном виде построено преобразование, которое приводит систему (4.1) к стандартной канонической форме Бруновского (теорема 4.1). Отметим, что факт *существования* такого преобразования следует из известного результата [147, с. 68] о приведении линейной системы к стандартной канонической форме при выполнении условия полной управляемости, а в теореме 4.1 такое преобразование построено *явным образом* для любого числа N . Показано, что утверждение теоремы 4.1 является окончательным, в том смысле, что нелинейное возмущение

- системы (4.1) не приводится к канонической форме Бруновского (теорема 4.3).
2. Построенное в теореме 4.1 преобразование использовано для параметризации всех решений двухточечной задачи управления в терминах вспомогательной функции $y(t)$, удовлетворяющей краевым условиям (4.16) (теорема 4.2). Такая параметризация позволила свести задачу оптимального управления с квадратичным критерием качества для системы (4.1) к вариационной задаче Лагранжа относительно функции $y(t)$. С помощью этого сведения в теореме 4.4 получено явное выражение для оптимального управления (теорема 4.4). В отличие от традиционной задачи о линейном регуляторе [108, С. 363–364], в подразделе 4.3 рассмотрена задача оптимального управления с граничными условиями на обоих концах отрезка времени.
 3. Центральным результатом раздела является теорема 4.5, в которой показано, что семейство оптимальных управлений для конечномерных подсистем (4.1) может быть использовано для приближенного решения задачи управляемости полной системы (4.51) в бесконечномерном пространстве, т.е. минимизация “энергии” управления (в смысле функционала (4.34)) для конечномерных подсистем не приводит к значительному возмущению нормы высокочастотных компонент в системе (4.51). Применение этого результата предполагает проверку условий сходимости ряда (4.60) для всего бесконечного спектра собственных частот колебаний. Используемая в подразделе 4.4 методика оценки решений бесконечномерной системы с *программным управлением* $v = \bar{v}_N(t)$ отличается от подхода статьи [145], в которой исследовано поведение системы с управлением в виде *обратной связи*.
 4. Выведено следствие из теоремы 4.5, которое обосновывает применимость разработанного подхода для модели механической системы с упругой балкой Эйлера – Бернулли. При этом программное управле-

ние для системы в гильбертовом пространстве может быть конструктивно построено в виде конечной суммы известных функций. Возможным развитием используемого подхода является исследование условий сходимости вида (4.60) для моделей упругих систем с иным распределением собственных частот.

Результаты раздела опубликованы в статьях [15, 16, 18, 20, 21] и прошли апробацию на международных научных конференциях и семинарах [38, 39, 40].

5 Стабилизация многозвенного упругого манипулятора

Целью данного раздела является создание и исследование математической модели пространственного движения управляемого манипулятора, имеющего n упругих звеньев в виде балок Эйлера – Бернулли. Прообразом такого манипулятора является пожарная лестница IVECO Magirus, описанная в работе [92].

5.1 Описание модели

Рассматриваемая механическая система состоит из твердого тела B_0 , к которому посредством цилиндрического шарнира прикреплено твердое тело B_1 , несущее n упругих звеньев S_1, S_2, \dots, S_n и твердое тело Σ (рис. 5.1). Следуя работе [6], введем неподвижную декартову систему координат $OXYZ$ с ортами $(\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \mathbf{h}_3)$ таким образом, чтобы вращение тела B_0 происходило вокруг вертикальной оси OZ . С телом B_0 связана декартова система координат $0_1x_1yz_1$, которая получается из системы $OXYZ$ сдвигом на $-R$ вдоль оси OX и последующим поворотом на угол $-\varphi_T$ вокруг оси OZ . С телом B_1 свяжем декартову систему координат O_1xyz , полученную поворотом системы $O_1x_1yz_1$ на угол $-\varphi_R$ вокруг оси O_1y .

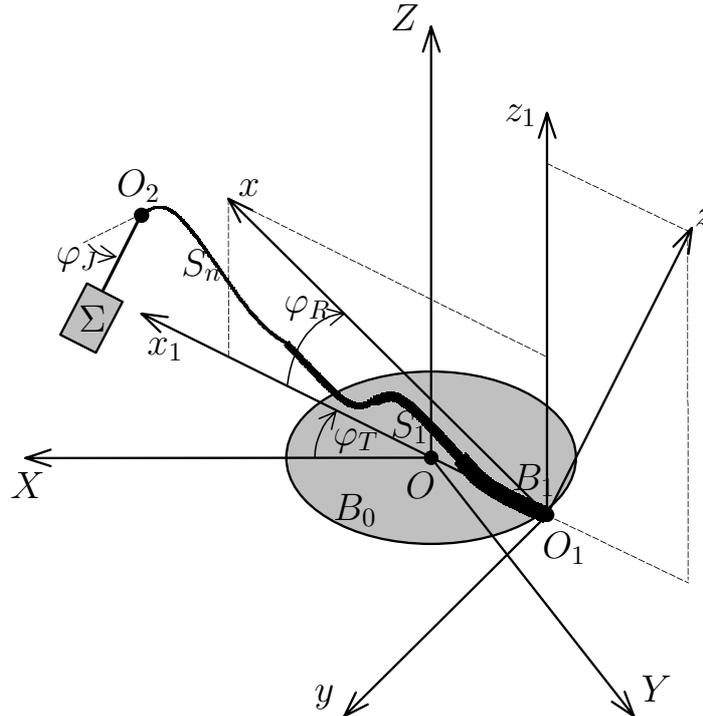


Рис. 5.1. Манипулятор с упругими звеньями.

Таким образом, переход от неподвижных векторов $(\mathbf{h}_1, \mathbf{h}_2, \mathbf{h}_3)$ к ортам $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$ системы O_1xyz задается соотношениями:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}_2 \\ \mathbf{e}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi_T \cos \varphi_R & -\sin \varphi_T \cos \varphi_R & \sin \varphi_R \\ \sin \varphi_T & \cos \varphi_T & 0 \\ -\cos \varphi_T \sin \varphi_R & \sin \varphi_T \sin \varphi_R & \cos \varphi_R \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{h}_1 \\ \mathbf{h}_2 \\ \mathbf{h}_3 \end{pmatrix}. \quad (5.1)$$

Угловая скорость $\boldsymbol{\omega}$ движения системы координат O_1xyz как абсолютно твердого тела равна:

$$\boldsymbol{\omega} = -\dot{\varphi}_T \sin \varphi_R \mathbf{e}_1 - \dot{\varphi}_R \mathbf{e}_2 - \dot{\varphi}_T \cos \varphi_R \mathbf{e}_3. \quad (5.2)$$

Звено S_1 жестко заделано в точке O_1 тела B_1 . Каждое из звеньев S_j , $j = 2, \dots, n$ может совершать перемещение относительно звена S_{j-1} с помощью механизма телескопической раздвижки лестницы. К концу O_2 звена S_n прикреплено твердое тело Σ (нагрузка).

Пусть l – расстояние от точки O_1 до ортогональной проекции точки O_2 на ось O_1x , $l \in [l_{min}, l_{max}]$ (т.е. l – обобщенная координата, характеризующая длину системы звеньев). Будем считать, что толщина каждого

из звеньев S_j , $j = 1, 2, \dots, n$ пренебрежимо мала сравнительно с его длиной l_j , и что в недеформированном состоянии центральная линия звена S_j совпадает с отрезком $[a_j(l), b_j(l)]$ оси O_1x , где

$$a_j(l) = \begin{cases} 0 & , n = 1, \\ \frac{j-1}{n-1}(l - l_{min}) + a_{j,min} & , n > 1, \end{cases} \quad b_j(l) = a_j(l) + l_j, \quad (5.3)$$

константы $a_{j,min}$ суть расстояния от точки O_1 до ближайшей точки звена S_j в недеформированном состоянии при $l = l_{min}$. Формула (5.3) получена из условия равенства поступательных перемещений звена S_j относительно S_{j-1} для всех $j = 2, \dots, n$. На практике такое движение реализуется с помощью троса и системы блоков, прикрепленных к звеньям.

Каждой точке M звена S_j поставим в соответствие ее лагранжеву координату $\xi_j \in [0, l_j]$, равную расстоянию от точки M до ближайшего к O_1 конца звена S_j в недеформированном состоянии. Таким образом, в предположениях теории колебаний тонких балок, движение точки M в момент времени t можно задать с помощью следующих функций:

$$\mathbf{O}_1\mathbf{M} = (a_j(l) + \xi_j)\mathbf{e}_1 + y_j(\xi_j, t)\mathbf{e}_2 + z_j(\xi_j, t)\mathbf{e}_3, \quad \xi_j \in [0, l_j], \quad t \geq 0.$$

При этом должно выполняться условие контакта в местах сопряжения соседних звеньев:

$$y_j(x - a_j(l), t) = y_{j-1}(x - a_{j-1}(l), t), \quad z_j(x - a_j(l), t) = z_{j-1}(x - a_{j-1}(l), t), \quad (5.4)$$

$$\forall x \in [b_{j-1}(l), a_j(l)], \quad j = \overline{2, n}.$$

Вычислим абсолютную скорость точки $M \in S_j$, имеющей лагранжеву координату ξ_j :

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_M(\xi_j, t) &= R\dot{\varphi}_T\mathbf{e}_2 + \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{O}_1\mathbf{M} + \dot{a}_j(l(t))\mathbf{e}_1 + \dot{y}_j(\xi_j, t)\mathbf{e}_2 + \dot{z}_j(\xi_j, t)\mathbf{e}_3 = \\ &= \left(\frac{j-1}{n-1}\dot{l} + \dot{\varphi}_T y_j \cos \varphi_R - \dot{\varphi}_R z_j \right) \mathbf{e}_1 + \\ &+ (\dot{y}_j + \dot{\varphi}_T [R + z_j \sin \varphi_R - (a_j + \xi_j) \cos \varphi_R]) \mathbf{e}_2 + \end{aligned}$$

$$+ (\dot{z}_j + (a_j + \xi_j)\dot{\varphi}_R - y_j\dot{\varphi}_T \sin \varphi_R) \mathbf{e}_3. \quad (5.5)$$

Здесь и далее все дробные выражения с $n - 1$ в знаменателе считаются равными нулю при $j = \overline{n} = 1$. Запишем выражение для кинетической энергии звена S_j , $j = \overline{1, n}$:

$$2T_j = \int_0^{l_j} \rho_j(\xi_j) \left\{ (y_j\dot{\varphi}_T \cos \varphi_R - z_j\dot{\varphi}_R)^2 + \left(\frac{j-1}{n-1} \right)^2 \dot{l}^2 + \frac{2(j-1)\dot{l}}{n-1} (y_j\dot{\varphi}_T \cos \varphi_R - z_j\dot{\varphi}_R) + \right. \\ \left. + (\dot{y}_j + \dot{\varphi}_T [R + z_j \sin \varphi_R - (a_j(l) + \xi_j) \cos \varphi_R])^2 + (\dot{z}_j - y_j\dot{\varphi}_T \sin \varphi_R + (a_j(l) + \xi_j)\dot{\varphi}_R)^2 \right\} d\xi_j, \quad (5.6)$$

где $\rho_j(\xi_j)$ – плотность (масса на единицу длины) материала звена S_j . В рамках теории упругих балок Эйлера – Бернулли (см. напр. [60, с. 153]), потенциальная энергия S_j имеет вид

$$2\Pi_j = \int_0^{l_j} \{ E_j \mathcal{I}_{jz} (y_j'')^2 + E_j \mathcal{I}_{jy} (z_j'')^2 + 2g\rho_j(\xi_j) (z_j \cos \varphi_R + (a_j(l) + \xi_j) \sin \varphi_R) \} d\xi_j, \quad (5.7)$$

$j = \overline{1, n}$, где штрих обозначает дифференцирование по ξ_j , E_j – модуль Юнга, \mathcal{I}_{jy} и \mathcal{I}_{jz} – центральные моменты инерции поперечного сечения j -го звена относительно осей, параллельных O_1 и $O_1 z$, соответственно, g – ускорение свободного падения. Величины E_j , \mathcal{I}_{jy} , \mathcal{I}_{jz} будем считать положительными C^2 -функциями переменной $\xi_j \in [0, l_j]$.

Суммарные кинетическая и потенциальная энергии тел B_0 и B_1 выражаются следующим образом:

$$2T_0 = (I_0 + I_1 \sin^2 \varphi_R + I_3 \cos^2 \varphi_R + m_0(R - d \cos \varphi_R)^2) \dot{\varphi}_T^2 + (I_2 + m_0 d^2) \dot{\varphi}_R^2, \\ \Pi_0 = m_0 g d \sin \varphi_R. \quad (5.8)$$

Здесь I_0 – момент инерции тела B_0 относительно оси OZ , I_1 , I_2 , I_3 – центральные моменты инерции тела B_1 относительно осей, параллельных $O_1 x_1$, $O_1 y$, $O_1 z_1$, соответственно, m_0 – масса тела B_1 . Предполагается, что координатные оси $O_1 x_1 y z_1$ являются главными осями инерции тела B_1 , а его центр масс лежит на оси Ox_1 на расстоянии d от точки O_1 .

Для описания движения тела-нагрузки Σ , введем в рассмотрение триэдр $O_2 \boldsymbol{\nu}_1 \boldsymbol{\nu}_2 \boldsymbol{\nu}_3$, жестко связанный со звеном S_n в точке O_2 . В недеформированном состоянии звеньев векторы $(\boldsymbol{\nu}_1, \boldsymbol{\nu}_2, \boldsymbol{\nu}_3)$ коллинеарны $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \mathbf{e}_3)$. Тело Σ совершает вращение на угол φ_J в цилиндрическом шарнире вокруг

$O_2\nu_2$. Свяжем с твердым телом Σ триэдр $O_2\gamma_1\gamma_2\gamma_3$, полученный поворотом $O_2\nu_1\nu_2\nu_3$ на угол φ_J вокруг $O_2\nu_2$. В линейной части относительно упругих деформаций, переход к базису $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$ определяется формулами

$$\begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \gamma_2 \\ \gamma_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi_J + z'_n \sin \varphi_J & y'_n \cos \varphi_J & z'_n \cos \varphi_J - \sin \varphi_J \\ -y'_n & 1 & 0 \\ \sin \varphi_J - z'_n \cos \varphi_J & y'_n \sin \varphi_J & z'_n \sin \varphi_J + \cos \varphi_J \end{pmatrix} \Big|_{\xi_n=l_n} \cdot \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix}. \quad (5.9)$$

Используя формулы (5.1), (5.2), (5.5), (5.9) и считая, что центр масс тела Σ лежит на оси $O_2\gamma_1$, найдем кинетическую и потенциальную энергии тела Σ :

$$\begin{aligned} 2T_\Sigma = & J_1 \{ \dot{y}'_n \sin \varphi_J + y'_n \dot{\varphi}_R \cos \varphi_J + \dot{\varphi}_T (z'_n \cos(\varphi_R - \varphi_J) + \sin(\varphi_R - \varphi_J)) \}^2 + \\ & + J_2 \{ \dot{\varphi}_J - \dot{\varphi}_R + y'_n \dot{\varphi}_T \sin \varphi_R - \dot{z}'_n \}^2 + \\ & + J_3 \{ \dot{y}'_n \cos \varphi_J - y'_n \dot{\varphi}_R \sin \varphi_J + \dot{\varphi}_T (z'_n \sin(\varphi_R - \varphi_J) - \cos(\varphi_R - \varphi_J)) \}^2 + \\ & + m \{ c(\dot{z}'_n - \dot{\varphi}_J) \sin \varphi_J + \dot{l} + \dot{\varphi}_R (lz'_n - z_n + c \sin \varphi_J) + \\ & + \dot{\varphi}_T (y_n \cos \varphi_R + y'_n (R - l \cos \varphi_R - c \sin \varphi_R \sin \varphi_J)) \}^2 + \\ & + m \{ \dot{y}_n + c\dot{y}'_n \cos \varphi_J - cy'_n \dot{\varphi}_R \sin \varphi_J + \\ & + \dot{\varphi}_T (R - l \cos \varphi_R + z_n \sin \varphi_R - c \cos(\varphi_R - \varphi_J) + cz'_n \sin(\varphi_R - \varphi_J)) \}^2 + \\ & + m \{ \dot{z}_n + c(\dot{z}'_n - \dot{\varphi}_J) \cos \varphi_J + \dot{\varphi}_R (l + c \cos \varphi_J) - \dot{\varphi}_T \sin \varphi_R (y_n + cy'_n \cos \varphi_J) \}^2 \Big|_{\xi_n=l_n}, \quad (5.10) \end{aligned}$$

$$\Pi_\Sigma = mg \{ l \sin \varphi_R + z_n \cos \varphi_R + cz'_n \cos(\varphi_R - \varphi_J) + c \sin(\varphi_R - \varphi_J) \} \Big|_{\xi_n=l_n}, \quad (5.11)$$

где J_1, J_2, J_3 – моменты инерции тела Σ относительно осей, проходящих через его центр масс и параллельных $\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3$, соответственно, m – масса тела Σ , c – расстояние от точки O_2 до центра масс тела Σ . При выводе формулы (5.10) предполагается также, что триэдр $O_2\gamma_1\gamma_2\gamma_3$ соответствует главным осям инерции тела Σ .

5.2 Уравнения движения

Обозначим через $\tilde{C}^k[\alpha, \beta]$, $k > 1$ множество всех непрерывно - дифференцируемых функций на $[\alpha, \beta]$, которые имеют кусочно-непрерывные производные порядка до k включительно.

Для вывода уравнений движения рассматриваемой механической системы воспользуемся вариационным принципом Гамильтона – Остроградского с функционалом Лагранжа

$$L : \mathbb{R}^8 \times \tilde{C}^2[0, l_1] \times C^1[0, l_1] \times \dots \times \tilde{C}^2[0, l_n] \times C^1[0, l_n] \rightarrow \mathbb{R}^1,$$

$$L(\varphi_R, \dot{\varphi}_R, \varphi_T, \dot{\varphi}_T, \varphi_J, \dot{\varphi}_J, l, \dot{l}, y_1, \dot{y}_1, \dots, z_n, \dot{z}_n) = \sum_{j=0}^n (T_j - \Pi_j) + T_\Sigma - \Pi_\Sigma. \quad (5.12)$$

Слагаемые формулы (6.3) заданы выражениями (5.6), (5.7), (5.8), (5.10), (5.11). Обоснование принципа Гамильтона – Остроградского применительно к сплошным средам дано в монографии В.Л. Бердичевского (см. [179, С. 189–190]).

Если заданы положения рассматриваемой механической системы в начальный ($t = t_1$) и конечный ($t = t_2$) моменты времени, то закон движения $\varphi_R(t)$, $\varphi_T(t)$, $\varphi_J(t)$, $l(t)$, $y_j(\cdot, t)$, $z_j(\cdot, t)$, $j = \overline{1, n}$ на отрезке $t \in [t_1, t_2]$ под действием активных сил и реакций связи обеспечивает равенство нулю интеграла

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L dt + \int_{t_1}^{t_2} (M_T(t)\delta\varphi_T(t) + M_R(t)\delta\varphi_R(t) + M_J(t)\delta\varphi_J(t) + F_l(t)\delta l(t)) dt = 0 \quad (5.13)$$

при всех значениях вариаций

$$\delta\varphi_T, \delta\varphi_R, \delta\varphi_J, \delta l \in C^1[t_1, t_2], \quad \delta y_j, \delta z_j \in C^1([0, l_j] \times [t_1, t_2]), \quad j = \overline{1, n},$$

удовлетворяющих условиям:

$$\delta\varphi_R(t_1) = \delta\varphi_R(t_2) = \delta\varphi_T(t_1) = \delta\varphi_T(t_2) = \delta\varphi_J(t_1) = \delta\varphi_J(t_2) = 0,$$

$$\delta l(t_1) = \delta l(t_2) = 0,$$

$$y_j(\xi_j, t_1) = y_j(\xi_j, t_2) = z_j(\xi_j, t_1) = z_j(\xi_j, t_2) = 0, \quad \forall \xi_j \in [0, l_j],$$

$$\delta y_1(0, t) = \delta y_1'(0, t) = \delta z_1(0, t) = \delta z_1'(0, t) = 0, \quad \delta y_j(\cdot, t), \delta z_j(\cdot, t) \in \tilde{C}^2[0, l_j], \quad (5.14)$$

$$\forall t \in [t_1, t_2], j = \overline{1, n}$$

и геометрическому условию контакта типа (5.4). При этом искомые функции упругих перемещений $y_j(\xi_j, t)$, $z_j(\xi_j, t)$ подчинены геометрическим краевым условиям

$$y_1(0, t) = y_1'(0, t) = z_1(0, t) = z_1'(0, t) = 0, \forall t \in [t_1, t_2]. \quad (5.15)$$

и условию контакта (5.4). В формуле (5.13) введены управляющие моменты M_R , M_T , M_J и сила l , обеспечивающие повороты элементов системы на углы φ_R , φ_T , φ_J и телескопическую раздвижку звеньев по обобщенной координате l , соответственно. (На практике, моменты управления реализованы с помощью гидравлических цилиндров, а сила F_l – натяжение тросов – регулируется двигателем лебедки механизма телескопирования. Указанные силовые воздействия можно задавать программой для компьютерной системы управления манипулятором.)

Обозначим

$$y(x, t) = y_j(x - a_j(l(t)), t), z(x, t) = z_j(x - a_j(l(t)), t), x - a_j(l(t)) \in [0, l_j], \quad (5.16)$$

$$\rho(x; l) = \sum_{j=1}^n \chi_{[a_j(l), b_j(l)]} \rho_j(x - a_j(l)), \rho^*(x; l) = \sum_{j=2}^n \frac{j-1}{n-1} \chi_{[a_j(l), b_j(l)]} \rho_j(x - a_j(l)),$$

$$c_y(x; l) = \sum_{j=1}^n \chi_{[a_j(l), b_j(l)]} E_j(x - a_j(l)) \mathcal{I}_{jy}(x - a_j(l)),$$

$$c_z(x; l) = \sum_{j=1}^n \chi_{[a_j(l), b_j(l)]} E_j(x - a_j(l)) \mathcal{I}_{jz}(x - a_j(l)),$$

где $\chi_{[a_j, b_j]}$ – индикатор отрезка $[a_j, b_j]$. Легко видеть, что функции $y(x, t)$, $z(x, t)$ в (5.16) корректно определены для всех $x \in [0, l]$, если все y_j , z_j удовлетворяют условию (5.4).

Будем считать, что $y_j(\cdot, t), z_j(\cdot, t) \in \tilde{C}^4[0, l_j], \forall t \in [t_1, t_2], j = \overline{1, n}$ в формуле (5.13). Выполняя интегрирование по частям в (5.13) с учетом (5.4), (5.14), (5.15), (5.16), получим следующую систему уравнений с частными производными [6]:

$$\ddot{y} + \frac{1}{\rho} (c_z y'')'' = \dot{\varphi}_T \left(y \dot{\varphi}_T - 2\dot{z} \sin \varphi_R - 2\dot{\varphi}_R (z \cos \varphi_R + x \sin \varphi_R) + \frac{2\rho^* \cos \varphi_R}{\rho} \right) + \quad (5.17)$$

$$\begin{aligned}
& +\ddot{\varphi}_T(x \cos \varphi_R - z \sin \varphi_R - R), \\
\ddot{z} + \frac{1}{\rho}(c_y z'')'' &= y\ddot{\varphi}_T \sin \varphi_R - x\ddot{\varphi}_R - g \cos \varphi_R + \dot{\varphi}_T \sin \varphi_R(2\dot{y} + \dot{\varphi}_T(R + z \sin \varphi_R - x \cos \varphi_R)) + \\
& + \dot{\varphi}_R \left(z\dot{\varphi}_R - \frac{2\rho^* \dot{l}}{\rho} \right)
\end{aligned} \quad (5.18)$$

при $x \in [0, l] \setminus S$, $S = \{a_1(l), b_1(l), \dots, a_n(l), b_n(l)\}$, а также краевые условия

$$y|_{x=0} = z|_{x=0} = y'|_{x=0} = z'|_{x=0} = 0, \quad (5.19)$$

$$\lim_{x \rightarrow p-0} \frac{\partial^k(c_z y'')}{\partial x^k} = \lim_{x \rightarrow p+0} \frac{\partial^k(c_z y'')}{\partial x^k}, \quad \lim_{x \rightarrow p-0} \frac{\partial^k(c_y z'')}{\partial x^k} = \lim_{x \rightarrow p+0} \frac{\partial^k(c_y z'')}{\partial x^k}, \quad \forall p \in (0, l) \cap S, \quad k = 0, 1, \quad (5.20)$$

$$\frac{1}{m}(c_z y'')' - \ddot{y} - c\ddot{y}' \cos \varphi_J - \ddot{\varphi}_T(R - l \cos \varphi_R - c \cos(\varphi_R - \varphi_J)) \Big|_{x=l} + \dots = 0, \quad (5.21)$$

$$\frac{1}{m}(c_y z'')' - g \cos \varphi_R - \ddot{z} + c(\ddot{\varphi}_J - \ddot{z}') \cos \varphi_J - \ddot{\varphi}_R(l + c \cos \varphi_J) \Big|_{x=l} + \dots = 0, \quad (5.22)$$

$$\begin{aligned}
& -c_z y'' + m(R - l \cos \varphi_R - c \sin \varphi_R \sin \varphi_J) \dot{\varphi}_T \{c(\dot{z}' - \dot{\varphi}_J) \sin \varphi_J + \dot{l} + \dot{\varphi}_R(lz' - z + c \sin \varphi_J) + \\
& + \dot{\varphi}_T(y \cos \varphi_R + y'(R - l \cos \varphi_R - c \sin \varphi_R \sin \varphi_J))\} - \\
& - J_1 \sin \varphi_J \{ \ddot{y}' \sin \varphi_J + \ddot{\varphi}_T(z' \cos(\varphi_R - \varphi_J) + \sin(\varphi_R - \varphi_J)) \} - \\
& - J_3 \cos \varphi_J \{ \ddot{y}' \cos \varphi_J + \ddot{\varphi}_T(z' \sin(\varphi_R - \varphi_J) - \cos(\varphi_R - \varphi_J)) \} + \\
& + mc \sin \varphi_J \{ \ddot{y} + c\ddot{y}' \cos \varphi_J + \ddot{\varphi}_T(R - l \cos \varphi_R - c \cos(\varphi_R - \varphi_J)) \} \Big|_{x=l} + \dots = 0, \quad (5.23)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -c_y z'' + (J_2 + mc^2)(\ddot{\varphi}_J - \ddot{\varphi}_R - \ddot{z}') - \\
& - mc \left\{ \ddot{l} \sin \varphi_J + (\ddot{z} + l\ddot{\varphi}_R) \cos \varphi_J + g \cos(\varphi_R - \varphi_J) \right\} \Big|_{x=l} + \dots = 0, \quad (5.24)
\end{aligned}$$

где штрихом обозначена производная по x . С целью упрощения модели, в уравнениях (5.17)-(5.24) не учитываются нелинейные члены относительно упругих деформаций. Здесь и далее многоточием обозначены слагаемые порядка малости выше первого относительно y , z и их производных.

Из выражения (5.13) получаем также уравнения Лагранжа второго рода в обобщенных координатах φ_R , φ_T , φ_J , l :

В развернутом виде эти уравнения запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned}
& \{I_0 + I_1 \sin^2 \varphi_R + I_3 \cos^2 \varphi_R + J_1 \sin^2(\varphi_R - \varphi_J) + J_3 \cos^2(\varphi_R - \varphi_J) + m_0(R - d \cos \varphi_R)^2 + \\
& + m(R - l \cos \varphi_R - c \cos(\varphi_R - \varphi_J))^2\} \ddot{\varphi}_T + m(R - l \cos \varphi_R - c \cos(\varphi_R - \varphi_J)) \ddot{y} + \\
& + \{J_1 \sin \varphi_J \sin(\varphi_R - \varphi_J) - J_3 \cos \varphi_J \cos(\varphi_R - \varphi_J) + \\
& + mc(R - l \cos \varphi_R - c \cos(\varphi_R - \varphi_J)) \cos \varphi_J\} \ddot{y}' \Big|_{x=l} +
\end{aligned}$$

$$+ \int_0^l (\ddot{y} + (R - x \cos \varphi_R) \ddot{\varphi}_T)(R - x \cos \varphi_R) \rho dx + \dots = M_T, \quad (5.25)$$

$$\left\{ I_2 + J_2 + m_0 d^2 + m(c^2 + l^2 + 2lc \cos \varphi_J) + \int_0^l x^2 \rho dx \right\} \ddot{\varphi}_R + \int_0^l x \ddot{z} \rho dx + mc \ddot{l} \sin \varphi_J + \\ + (J_2 + mc(c + l \cos \varphi_J))(\ddot{z}' - \ddot{\varphi}_J) + m(l + c \cos \varphi_J) \ddot{z} + g \left\{ \int_0^l (x \cos \varphi_R - z \sin \varphi_R) \rho dx + \right. \\ \left. + (m_0 d + ml) \cos \varphi_R - mz \sin \varphi_R + mc(\cos(\varphi_R - \varphi_J) - z' \sin(\varphi_R - \varphi_J)) \right\} \Big|_{x=l} + \dots = M_R, \quad (5.26)$$

$$(J_2 + mc^2)(\ddot{\varphi}_J - \ddot{z}') - mc(\ddot{z} \cos \varphi_J + \ddot{l} \sin \varphi_J) - \{J_2 + mc(c + l \cos \varphi_J)\} \ddot{\varphi}_R + \\ + mgc(z' \sin(\varphi_R - \varphi_J) - \cos(\varphi_R - \varphi_J)) \Big|_{x=l} + \dots = M_J, \quad (5.27)$$

$$\left(m + \sum_{j=2}^n \frac{(j-1)^2}{(n-1)^2} m_j \right) \ddot{l} + mc(\ddot{z}' \Big|_{x=l} + \ddot{\varphi}_R - \ddot{\varphi}_J) \sin \varphi_J - g \left(m + \sum_{j=2}^n \frac{j-1}{n-1} m_j \right) \sin \varphi_R + \dots = F_l, \quad (5.28)$$

где m_j – масса j -го звена.

Итак, получена нелинейная система интегро-дифференциальных уравнений (5.17)-(5.28), описывающих управляемое движение упругого многозвенного манипулятора, с учетом изменения длины системы звеньев.

5.3 Условия равновесия системы

Одним из основных режимов функционирования манипулятора является его положение равновесия с заданными значениями углов и координаты l . Для обеспечения такого равновесия необходимо определить соответствующие значения управляющих моментов M_T , M_R , M_J и силы F_l . С целью решения этой задачи, выясним условия существования решений вида

$$\varphi_T = \text{const}, \quad \varphi_R = \text{const}, \quad \varphi_J = \text{const}, \quad l = \text{const}, \quad y(x, t) = 0, \quad z(x, t) = z_0(x) \quad (5.29)$$

системы уравнений движения. Подстановка (5.29) в (5.17)-(5.28) дает [6]:

$$(c_y(x; l) z_0''(x))'' = -\rho g \cos \varphi_R, \quad x \in [0, l] \setminus S, \quad S = \{a_1(l), b_1(l), \dots, a_n(l), b_n(l)\}, \quad (5.30)$$

$$z_0(0) = z_0'(0) = 0, \quad \lim_{x \rightarrow p-0} \frac{d^k(c_y z_0'')}{dx^k} = \lim_{x \rightarrow p+0} \frac{d^k(c_y z_0'')}{dx^k}, \quad \forall p \in (0, l) \cap S, \quad k = 0, 1, \quad (5.31)$$

$$(c_y z_0'')' \Big|_{x=l} = mg \cos \varphi_R, \quad c_y z_0'' \Big|_{x=l} = -mgc \cos(\varphi_R - \varphi_J), \quad (5.32)$$

$$\frac{M_R}{g} = (m_0 d + ml) \cos \varphi_R - m z_0(l) \sin \varphi_R +$$

$$+ \int_0^l (x \cos \varphi_R - z_0(x) \sin \varphi_R) \rho dx + mc(\cos(\varphi_R - \varphi_J) - z'_0(l) \sin(\varphi_R - \varphi_J)),$$
(5.33)

$$M_T = 0, \quad M_J = mgc(z'_0(l) \sin(\varphi_R - \varphi_J) - \cos(\varphi_R - \varphi_J)),$$

$$F_l = -g \left(m + \sum_{j=2}^n \frac{j-1}{n-1} m_j \right) \sin \varphi_R.$$
(5.34)

В частном случае $n = 1$, $\rho = \text{const}$, $c_y = \text{const}$ решение краевой задачи (5.30)-(5.32) примет вид:

$$z_0(x) = -\frac{gx^2 \cos \varphi_R}{24c_y} (\rho x^2 - 6mx + 12ml) - \frac{mgcx^2 \cos(\varphi_R - \varphi_J)}{2c_y}.$$

Теперь искомые моменты и сила определяются подстановкой найденного $z_0(x)$ в (5.33)-(5.34).

5.4 Уравнения возмущенного движения в случае одного звена

Рассмотрим уравнения движения (5.17)-(5.28) для частного случая манипулятора с одним звеном ($n = 1$). Предположим также, что твердое тело Σ на конце манипулятора не совершает относительных вращений ($\varphi_J = 0$) и прикреплено к балке в своем центре масс ($c = 0$).

Таким образом, поперечные отклонения балки в точке $x \in [0, l]$ и момент времени t определяются функциями $y(x, t)$ и $z(x, t)$, где l – длина балки. Предположим, что для заданного угла φ_R^0 вычислен момент $M_R = M_R^0$, который реализует положение равновесия системы вида (5.29), т.е.

$$\varphi_T(t) = 0, \quad \varphi_R(t) = \varphi_R^0, \quad y(x, t) = 0, \quad z(x, t) = z_0(x).$$

При сделанных предположениях запишем систему линейного приближения для уравнений (5.17)-(5.28) в окрестности исследуемого положения равновесия [22]:

$$\ddot{y}(x, t) + \frac{1}{\rho} \left(c_z y''(x, t) \right)'' = \psi_T(x) \ddot{\varphi}_T, \quad x \in (0, l),$$
(5.35)

$$\ddot{z}(x, t) + \frac{1}{\rho} \left(c_y \ddot{z}''(x, t) \right)'' = g \tilde{\varphi}_R \sin \varphi_R^0 - x \ddot{\tilde{\varphi}}_R, \quad (5.36)$$

$$y|_{x=0} = \tilde{z}|_{x=0} = 0, \quad y'|_{x=0} = \tilde{z}'|_{x=0} = 0, \quad (5.37)$$

$$\frac{1}{m} (c_z y'')' - \ddot{y} + \psi_T(x) \ddot{\varphi}_T \Big|_{x=l} = 0, \quad (5.38)$$

$$-c_z y'' - J_3 \ddot{y}' + J_3 \psi_T'(x) \ddot{\varphi}_T \Big|_{x=l} = 0, \quad (5.39)$$

$$\frac{1}{m} (c_y \ddot{z}''')' + g \tilde{\varphi}_R \sin \varphi_R^0 - \ddot{\tilde{z}} - l \ddot{\tilde{\varphi}}_R \Big|_{x=l} = 0, \quad (5.40)$$

$$c_y \ddot{z}'' + J_2 (\ddot{\tilde{\varphi}}_R + \ddot{\tilde{z}}) \Big|_{x=l} = 0, \quad (5.41)$$

$$\begin{aligned} & \left\{ I_0 + (I_1 + J_1) \sin^2 \varphi_R^0 + (I_3 + J_3) \cos^2 \varphi_R^0 + \right. \\ & \left. + m_0 (R - d \cos \varphi_R^0)^2 + m (R - l \cos \varphi_R^0)^2 + \int_0^l (R - x \cos \varphi_R^0)^2 \rho dx \right\} \ddot{\varphi}_T + \\ & \quad + \int_0^l (R - x \cos \varphi_R^0) \ddot{y} \rho dx + \\ & \quad + \left\{ m R \ddot{y} - (m l \ddot{y} + J_3 \ddot{y}') \cos \varphi_R^0 \right\} \Big|_{x=l} = M_T, \quad (5.42) \\ & \left\{ I_2 + J_2 + m_0 d^2 + m l^2 + \int_0^l x^2 \rho dx \right\} \ddot{\tilde{\varphi}}_R + \int_0^l \ddot{\tilde{z}} x \rho dx + \left\{ m l \ddot{\tilde{z}} + J_2 \ddot{\tilde{z}}' \right\} \Big|_{x=l} - \\ & \quad - g \left\{ \int_0^l \tilde{z} \rho dx + m \tilde{z} \Big|_{x=l} + \right. \\ & \quad \left. + \left(m_0 d + m l + \int_0^l x \rho dx \right) \tilde{\varphi}_R \right\} \sin \varphi_R^0 - \\ & \quad - g \left\{ \int_0^l z_0 \rho dx + m z_0(l) \right\} \tilde{\varphi}_R \cos \varphi_R^0 = \tilde{M}_R, \quad (5.43) \end{aligned}$$

где

$$\tilde{z}(x, t) = z(x, t) - z_0(x), \quad \tilde{\varphi}_R(t) = \varphi_R(t) - \varphi_R^0, \quad \tilde{M}_R = M_R - M_R^0,$$

$$\psi_T(x) = x \cos \varphi_R^0 - z_0(x) \sin \varphi_R^0 - R.$$

Для упрощения этих уравнений подставим выражения (5.35), (5.36), (5.38)-(5.41) для $\ddot{y}(x, t)$, $\ddot{\tilde{z}}(x, t)$, \ddot{y} , \ddot{y}' , $\ddot{\tilde{z}}$, $\ddot{\tilde{z}}' \Big|_{x=l}$ в уравнения (5.42), (5.43) и выполним интегрирование по частям с учетом граничных условий (5.37). В результате уравнения (5.42) и (5.43) примут вид

$$\ddot{\varphi}_T = u_T, \quad \ddot{\tilde{\varphi}}_R = u_R, \quad (5.44)$$

где

$$\begin{aligned}
u_T = & \{I_0 + (I_1 + J_1) \sin^2 \varphi_R^0 + m_0(R - d \cos \varphi_R^0)^2 + \\
& + (I_3 \cos \varphi_R^0 + J_3 z_0'(l) \sin \varphi_R^0) \cos \varphi_R^0 + \left(m(l \cos \varphi_R^0 - R) z_0(l) + \right. \\
& \left. + \int_0^l (x \cos \varphi_R^0 - R) z_0 \rho dx \right) \sin \varphi_R^0 \}^{-1} \times \\
& \times \{ M_T - (R(c_z y''))' + c_z y'' \cos \varphi_R^0 \Big|_{x=0} \}, \tag{5.45}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
u_R = & \{I_2 + m_0 d^2\}^{-1} \times \left\{ \tilde{M}_R + c_y \tilde{z}'' \Big|_{x=0} + g \left(\int_0^l \tilde{z} \rho dx + m \tilde{z} \Big|_{x=l} + m_0 d \right) \sin \varphi_R^0 + \right. \\
& \left. + g \left(\int_0^l z_0 \rho dx + m z_0(l) \right) \tilde{\varphi}_R \cos \varphi_R^0 \right\}. \tag{5.46}
\end{aligned}$$

Для каждой $\tilde{\varphi}_R(t)$, $y(\cdot, t)$, $\tilde{z}(\cdot, t)$ формулы (5.45), (5.46) устанавливают взаимно-однозначное соответствие между моментами (M_T, \tilde{M}_R) и угловыми ускорениями (u_T, u_R) . Поэтому в дальнейшем будем рассматривать $(u_T, u_R) \in \mathbb{R}^2$ в качестве управления в линейной системе (5.35)-(5.41), (5.44).

5.5 Устойчивость линеаризованной системы с обратной связью

Для записи системы (5.35)-(5.41) в операторном виде рассмотрим линейное пространство

$$X = \left\{ \begin{pmatrix} \eta \\ \zeta \\ \phi \\ \omega \\ p \\ q \end{pmatrix} : \eta \in H^2(0, l), \zeta \in L_2(0, l), \eta(0) = \eta'(0) = 0, \phi, \omega, p, q \in \mathbb{R} \right\},$$

где $H^k(0, l)$ – пространство Соболева функций из $L_2(0, l)$, имеющих все обобщенные производные до порядка k включительно из $L_2(0, l)$ [119, с. 122].

Для элементов

$$\xi_1 = (\eta_1, \zeta_1, \phi_1, \omega_1, p_1, q_1)^T \in X, \quad \xi_2 = (\eta_2, \zeta_2, \phi_2, \omega_2, p_2, q_2)^T \in X,$$

определим скалярное произведение формулой

$$\langle \xi_1, \xi_2 \rangle_X = \int_0^l (\eta_1''(x)\eta_2''(x) + \zeta_1(x)\zeta_2(x)) dx + \phi_1\phi_2 + \omega_1\omega_2 + p_1p_2 + q_1q_2.$$

Используя неравенство Коши – Буняковского, легко проверить, что для всякой функции $\eta \in H^1(0, l)$ в случае $\eta(0) = 0$ справедливо неравенство Виртингера – Фридрихса [180, С. 219–221] следующего вида:

$$\begin{aligned} \|\eta\|_{L_2(0,l)}^2 &= \int_0^l \eta^2(x) dx = \int_0^l \left(\int_0^x \eta'(s) ds \right)^2 dx \leq \\ &\leq \int_0^l \left(\int_0^x ds \cdot \int_0^x \eta'^2(s) ds \right) dx = \\ &= \int_0^l \left(\eta'^2(s) \int_s^l x dx \right) ds \leq \frac{l^2}{2} \int_0^l \eta'^2(s) ds = \frac{l^2}{2} \|\eta'\|_{L_2(0,l)}^2. \end{aligned} \quad (5.47)$$

Аналогично, при $\eta \in H^2(0, l)$, $\eta'(0) = 0$ получаем:

$$\|\eta'\|_{L_2(0,l)}^2 \leq \frac{l^2}{2} \|\eta''\|_{L_2(0,l)}^2. \quad (5.48)$$

Из (5.47)-(5.48) для любой функции $\eta \in H^2(0, l)$, $\eta(0) = \eta'(0) = 0$ следует оценка:

$$\|\eta\|_{H^2(0,l)} = (\|\eta\|_{L_2}^2 + \|\eta'\|_{L_2}^2 + \|\eta''\|_{L_2}^2)^{1/2} \leq \left(\frac{l^4}{4} + \frac{l^2}{2} + 1 \right)^{1/2} \|\eta''\|_{L_2(0,l)}.$$

Отсюда легко видеть, что норма $\|\xi\|_X = \sqrt{\langle \xi, \xi \rangle_X}$ эквивалентна стандартной норме в линейном подпространстве X гильбертова пространства $H^2(0, l) \times L_2(0, l) \times \mathbb{R}^4$, следовательно, $(X, \|\cdot\|_X)$ – гильбертово пространство.

Определим линейный неограниченный оператор $A : D(A) \rightarrow X$ и элемент $B \in X$ следующим образом:

$$A : \xi = \begin{pmatrix} \eta \\ \zeta \\ \phi \\ \omega \\ p \\ q \end{pmatrix} \mapsto A\xi = \begin{pmatrix} \zeta \\ -\frac{1}{\rho}(c\eta'')'' + \gamma\phi \\ \omega \\ 0 \\ \gamma\phi + \frac{1}{m}(c\eta'')'|_{x=l} \\ -\frac{c}{J}\eta''|_{x=l} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi \\ 0 \\ 1 \\ \psi(l) \\ \psi'(l) \end{pmatrix}, \quad (5.49)$$

где область определения оператора A есть

$$D(A) = \left\{ \xi \in X : \begin{array}{l} \eta \in H^4(0, l), \zeta \in H^2(0, l), \\ \zeta(0) = \zeta'(0) = 0, \\ p = \zeta(l), q = \zeta'(l) \end{array} \right\}. \quad (5.50)$$

Будем предполагать, что $c(x) > 0$ и $\psi(x)$ – функции класса $C^2[0, l]$; $J > 0$ и γ – константы.

Пусть $(y(x, t), \tilde{z}(x, t), \varphi_T(t), \tilde{\varphi}_R(t))$ – классические решение краевой задачи (5.35)-(5.41), (5.44) с управлением $(u_T(t), u_R(t))$ при $0 \leq t < \tau$, $\tau \leq +\infty$. Определив

$$\xi_T(t) = \begin{pmatrix} y(\cdot, t) \\ \dot{y}(\cdot, t) \\ \varphi_T(t) \\ \dot{\varphi}_T(t) \\ y(l, t) \\ \dot{y}'(l, t) \end{pmatrix}, \quad \xi_R(t) = \begin{pmatrix} \tilde{z}(\cdot, t) \\ \dot{\tilde{z}}(\cdot, t) \\ \tilde{\varphi}_R(t) \\ \dot{\tilde{\varphi}}_R(t) \\ \tilde{z}(l, t) \\ \dot{\tilde{z}}'(l, t) \end{pmatrix}, \quad (5.51)$$

убеждаемся в том, что $\xi_T(t) \in D(A)$ и $\xi_R(t) \in D(A)$ при всех $t \in [0, \tau)$. Рассмотрим пару (A_T, B_T) , которая получена из (A, B) подстановкой

$$\psi(x) = \psi_T(x), \quad c(x) = c_z(x), \quad J = J_3, \quad \gamma = 0$$

в формулу (5.49). Аналогично, пусть пара (A_R, B_R) соответствует формулам для (A, B) с

$$\psi(x) = -x, \quad c(x) = c_y(x), \quad J = J_2, \quad \gamma = g \sin \varphi_R^0.$$

Тогда задача (5.35)-(5.41), (5.44) сводится к следующей системе:

$$\dot{\xi}_T = A_T \xi_T + B_T u_T, \quad (5.52)$$

$$\dot{\xi}_R = A_R \xi_R + B_R u_R, \quad (5.53)$$

где (ξ_T, ξ_R) – фазовый вектор, (u_T, u_R) – управление.

Далее будем рассматривать полученную систему как операторную запись задачи (5.35)-(5.41), (5.44) с $\xi_T, \xi_R \in X$ и $u_T, u_R \in \mathbb{R}$. Как видим,

система (5.52), (5.53) распадается на две подсистемы, следовательно, задача стабилизации может решаться независимо относительно компонент ξ_T и ξ_R .

Теорема 5.1. [22] *Рассмотрим задачу Коши при $t \geq 0$:*

$$\dot{\xi}(t) = A\xi(t) + Bu, \quad (5.54)$$

$$\xi(0) = \xi_0 \in X, \quad (5.55)$$

где A и B определены формулами (5.49), $u = h(\xi)$,

$$h(\xi) = -\frac{1}{\beta} \left\{ k\omega + \left(\alpha - \gamma \left(\int_0^l \rho\psi dx + m\psi(l) \right) \right) \phi + \right. \\ \left. + \int_0^l c\eta''\psi'' dx + \left(c\eta''\psi' - (c\eta'')'\psi \right) \Big|_{x=0} - \gamma \left(\int_0^l \rho\eta dx + m\eta(l) \right) \right\}, \quad (5.56)$$

где $k > 0$ – произвольная константа.

Тогда для достаточно больших значений констант $\alpha > 0$, $\beta > 0$ задача Коши (5.54), (5.55) с управлением (5.56) корректна при $t \geq 0$, а ее решение $\xi = 0$ сильно устойчиво по Ляпунову, т.е. для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, что любое решение задачи (5.54)-(5.56) удовлетворяет условию

$$\|\xi_0\| < \delta \Rightarrow \|\xi(t)\| < \varepsilon, \quad \forall t \geq 0.$$

Доказательство. Рассмотрим квадратичный функционал в X :

$$2V(\xi) = \alpha\phi^2 + \beta\omega^2 + \int_0^l \left\{ (\zeta - \psi\omega)^2 \rho + \eta'^2 c \right\} dx + \\ + m \{ p - \psi(l)\omega \}^2 + J \{ q - \psi'(l)\omega \}^2 - \\ - 2\gamma\phi \left\{ \int_0^l \eta\rho dx + m\eta(l) \right\}. \quad (5.57)$$

Вычислим производную функционала V в силу системы (5.54) при $\xi \in D(A)$:

$$\dot{V}(\xi) = \langle \nabla V(\xi), A\xi + Bu \rangle =$$

$$\begin{aligned}
&= \int_0^l \left(c\zeta''\eta'' - \zeta \cdot (c\eta'')'' \right) dx + \left(p(c\eta'')' - qc\eta'' \right) \Big|_l + \\
&+ \left\{ \alpha\phi + \beta u + \int_0^l \left(\psi \cdot (c\eta'')'' - \rho\gamma(\phi\psi + \eta) \right) dx + \right. \\
&\quad \left. + \left(c\psi'\eta'' - \psi \cdot (c\eta'')' - m\gamma(\phi\psi + \eta) \right) \Big|_{x=l} \right\} \omega. \tag{5.58}
\end{aligned}$$

Выполняя интегрирование по частям, с учетом граничных условий (5.50), получим:

$$\begin{aligned}
\int_0^l \zeta \cdot (c\eta'')'' dx &= \zeta \cdot (c\eta'')' \Big|_{x=0}^l - \int_0^l \zeta' \cdot (c\eta'')' dx = \\
&= \left(\zeta \cdot (c\eta'')' - \zeta' c\eta'' \right) \Big|_{x=l} + \int_0^l \zeta'' c\eta'' dx, \\
\int_0^l \psi \cdot (c\eta'')'' dx &= \psi \cdot (c\eta'')' \Big|_{x=0}^l - \int_0^l \psi' (c\eta'')' dx = \\
&= \left(\psi \cdot (c\eta'')' - \psi' c\eta'' \right) \Big|_{x=0}^l + \int_0^l \psi'' c\eta_T'' dx.
\end{aligned}$$

Подставим полученные формулы в (5.58) и воспользуемся граничными условиями $p = \zeta(l)$, $q = \zeta'(l)$ из (5.50). В результате получим следующее выражение для \dot{V} :

$$\begin{aligned}
\dot{V}(\xi) &= \left\{ \left(\alpha - \gamma \left(\int_0^l \rho\psi dx + m\psi(l) \right) \right) \phi + \beta u + \right. \\
&+ \int_0^l c\psi''\eta'' dx + \left(c\psi'\eta'' - \psi \cdot (c\eta'')' \right) \Big|_{x=0} - \\
&\quad \left. - \gamma \left(\int_0^l \rho\eta dx + m\eta(l) \right) \right\} \omega. \tag{5.59}
\end{aligned}$$

Если u определено выражением (5.56), то из формулы (5.59) вытекает

$$\dot{V}(\xi) = -k\omega^2 \leq 0, \quad (k = \text{const} > 0). \tag{5.60}$$

Покажем теперь, что функционал $V(\xi)$ удовлетворяет оценкам

$$M_1 \|\xi\|_X^2 \leq 2V(\xi) \leq M_2 \|\xi\|_X^2 \tag{5.61}$$

с некоторыми константами $0 < M_1 \leq M_2 < +\infty$. С одной стороны, используя неравенства $(a + b)^2 \leq 2a^2 + 2b^2$ и $2ab \leq a^2 + b^2$ в (5.57), получим

$$\begin{aligned} 2V(\xi) \leq & \alpha\phi^2 + \beta\omega^2 + \int_0^l \left(c\eta''^2 + 2(\zeta^2 + \psi^2\omega^2)\rho \right) dx + \\ & + 2m \left(p^2 + \psi^2(l)\omega^2 \right) + 2J \left(q^2 + \psi'^2(l)\omega^2 \right) + \\ & + \gamma^2\phi^2 + 2 \left(\int_0^l \eta\rho dx \right)^2 + 2(m\eta(l))^2. \end{aligned} \quad (5.62)$$

Тогда из неравенства Коши – Буняковского следует, что

$$\left(\int_0^l \eta\rho dx \right)^2 \leq \int_0^l \eta^2 dx \int_0^l \rho^2 dx, \quad (5.63)$$

$$\eta^2(l) = \left(\int_0^l \eta' dx \right)^2 \leq \int_0^l dx \int_0^l \eta'^2 dx. \quad (5.64)$$

Функции $\eta(x)$ и $\eta'(x)$ при выполнении граничных условий $\eta(0) = \eta'(0) = 0$ удовлетворяют неравенствам Виртингера – Фридрихса следующего вида (см. [180, С. 219–221], [62, с. 440]):

$$\int_0^l \eta^2 dx \leq \frac{l^2}{2} \int_0^l \eta'^2 dx \leq \frac{l^4}{4} \int_0^l \eta''^2 dx. \quad (5.65)$$

Использование неравенств (5.63)-(5.65) дает

$$\begin{aligned} \left(\int_0^l \eta\rho dx \right)^2 + m^2\eta^2(l) \leq & \int_0^l \eta^2 dx \int_0^l \rho^2 dx + \\ & + lm^2 \int_0^l \eta'^2 dx \leq \frac{l^3}{2} \left(m^2 + \frac{l}{2} \int_0^l \rho^2 dx \right) \int_0^l \eta''^2 dx. \end{aligned} \quad (5.66)$$

Применяя это неравенство в (5.62), получим оценку $2V(\xi) \leq M_2 \|\xi_T\|_X^2$,

$$\begin{aligned} M_2 = \max \left\{ \alpha + \gamma^2, 2m, 2J, 2 \max_{x \in [0, l]} \rho(x), \right. \\ \left. \beta + 2 \int_0^l \psi^2 \rho dx + 2J\psi'^2(l) + 2m\psi^2(l), \right. \\ \left. l^3 \left(m^2 + \frac{l}{2} \int_0^l \rho^2 dx \right) + \max_{x \in [0, l]} c(x) \right\}. \end{aligned}$$

С другой стороны, из неравенства $a^2 = (a - b + b)^2 \leq 2(a - b)^2 + 2b^2$ следует $(a - b)^2 \geq a^2/2 - b^2$. Используя последнее неравенство вместе с $-2ab \geq -\varkappa^2 a^2 - b^2/\varkappa^2$ ($\varkappa \neq 0$) in (5.57), придем к выводу, что:

$$\begin{aligned}
2V(\xi) &\geq \alpha\phi^2 + \beta\omega^2 + \int_0^l \left(c\eta''^2 + \frac{\rho}{2}\zeta^2 - \rho\psi^2\omega^2 \right) dx + \\
&\quad + m\left(\frac{p^2}{2} - \psi^2(l)\omega^2\right) + J\left(\frac{q^2}{2} - \psi'^2(l)\omega^2\right) - \\
&\quad - \varkappa^2\gamma^2\phi^2 - \frac{1}{\varkappa^2} \left(\int_0^l \eta\rho dx + m\eta(l) \right)^2 \geq \\
&\geq (\alpha - \varkappa^2\gamma^2)\phi^2 + \frac{m}{2}p^2 + \frac{J}{2}q^2 + \frac{1}{2} \int_0^l \zeta^2\rho dx + \\
&\quad + \left(\beta - \int_0^l \rho\psi^2 dx - m\psi^2(l) - J\psi'^2(l) \right) \omega^2 + \\
&\quad + \left\{ \min_{[0,l]} c - \frac{l^3}{\varkappa^2} \left(m^2 + \frac{l}{2} \int_0^l \rho^2 dx \right) \right\} \int_0^l \eta''^2 dx. \tag{5.67}
\end{aligned}$$

Здесь использовано также неравенство (5.66). Из оценки (5.67) вытекает $2V(\xi) \geq M_1\|\xi\|_X^2$, где

$$\begin{aligned}
M_1 &= \min \left\{ \alpha - \varkappa^2\gamma^2, \frac{m}{2}, \frac{J}{2}, \frac{1}{2} \min_{x \in [0,l]} \rho(x), \right. \\
&\quad \left. \beta - \int_0^l \rho\psi^2 dx - m\psi^2(l) - J\psi'^2(l), \right. \\
&\quad \left. \min_{x \in [0,l]} c(x) - \frac{l^3}{\varkappa^2} \left(m^2 + \frac{l}{2} \int_0^l \rho^2 dx \right) \right\} > 0
\end{aligned}$$

при условии

$$\begin{aligned}
\varkappa^2 &> \frac{l^3}{\min_{x \in [0,l]} c(x)} \left(m^2 + \frac{l}{2} \int_0^l \rho^2 dx \right), \\
\alpha &> \varkappa^2\gamma^2, \quad \beta > \int_0^l \rho\psi^2 dx + m\psi^2(l) + J\psi'^2(l).
\end{aligned}$$

В дальнейшем будем предлагать, что константы α , β , \varkappa удовлетворяют приведенным выше неравенствам.

Из оценки (5.61) следует, что нормы $\|\xi\|_X$ и $\|\xi\|_V = \sqrt{V(\xi)}$ эквивалентны в X . Запишем систему (5.54) с управлением u в виде обратной связи (5.56) следующим образом: $\dot{\xi} = \tilde{A}\xi$, где область определения

$D(\tilde{A}) = D(A)$ плотна в X . Из неравенства (5.60) вытекает, что оператор \tilde{A} диссипативен в X с нормой $\|\cdot\|_V$. Тогда по теореме Люмера – Филлипса (утверждение 1.7 на с. 43) оператор \tilde{A} является инфинитезимальным генератором сжимающей C_0 -полугруппы $\{e^{t\tilde{A}}\}_{t \geq 0}$ в X (относительно нормы $\|\cdot\|_V$). Отсюда следует, что задача Коши (5.54)-(5.56) имеет единственное обобщенное решение $\xi(t) = e^{t\tilde{A}}\xi_0$, $t \geq 0$, для любого $\xi_0 \in X$, и указанное решение является классическим при $\xi_0 \in D(A)$. Поскольку $\{e^{t\tilde{A}}\}_{t \geq 0}$ – сжимающая полугруппа (при эквивалентной перенормировке в X), то

$$\|\xi(t)\|_V \leq \|\xi_0\|_V, \quad \forall t \geq 0.$$

Отсюда следует, с учетом оценки (5.61), что

$$\|\xi(t)\|_X^2 \leq \frac{2V(\xi(t))}{M_1} \leq \frac{2V(\xi_0)}{M_1} \leq \frac{M_2}{M_1} \|\xi_0\|_X^2.$$

Полученное неравенство доказывает сильную устойчивость решения $\xi = 0$ в смысле Ляпунова. При этом можно положить $\delta(\varepsilon) = \varepsilon \sqrt{M_1/M_2}$ в определении устойчивости. Теорема доказана.

Замечание. Применяя формулу (5.56) отдельно к подсистемам (5.52), (5.53) и используя представление (5.51), запишем найденные управления в виде:

$$\begin{aligned} u_T &= -\frac{1}{\beta} \left\{ \alpha \varphi_T + k \dot{\varphi}_T + \int_0^l c_z y'' \psi'' dx + \left(c_z y'' \psi' - (c_z y'')' \psi \right) \Big|_{x=0} \right\}, \\ u_R &= -\frac{1}{\beta} \left\{ \alpha \tilde{\varphi}_R + k \dot{\tilde{\varphi}}_R - c_y \tilde{z}'' \Big|_{x=0} + \right. \\ &\quad \left. + g \left(\int_0^l (x \tilde{\varphi}_R - \tilde{z}) \rho dx + m(l \tilde{\varphi}_R - \tilde{z} \Big|_{x=l}) \right) \sin \varphi_R^0 \right\}. \end{aligned}$$

Для реализации таких управлений на практике достаточно вычислить u_T и u_R в зависимости от измерений φ_T , $\tilde{\varphi}_R$, $\dot{\varphi}_T$, $\dot{\tilde{\varphi}}_R$, y , \tilde{z} в каждый момент времени $t \geq 0$, а затем применить формулы (5.45), (5.46) для нахождения управляющих моментов M_T и M_R . Предложенный подход имеет преимущество в том, что для нахождения управления не требуется вычисления производных по времени от $y(x, t)$ и $\tilde{z}(x, t)$.

5.6 Локализация предельного множества траекторий уравнения Эйлера – Бернулли с управлением

В теореме 5.1 установлена корректность абстрактной задачи Коши и доказана неасимптотическая устойчивость тривиального решения системы с управлением в виде обратной связи. Поскольку производная функционала Ляпунова $V(\xi)$ не является определенно-отрицательной, то вопрос о существовании предельных точек решений при $t \rightarrow +\infty$ требует отдельного рассмотрения. Исследованию этого вопроса посвящен данный подраздел.

5.6.1 Предкомпактность траекторий системы с обратной связью

Обозначим через

$$\tilde{A} : \xi \mapsto A\xi + Bh(\xi)$$

линейный оператор, в котором A , B , $u = h(\xi)$ заданы формулами (5.49), (5.56). Тогда дифференциальное уравнение (5.54) с $u = h(\xi)$ запишется следующим образом:

$$\frac{d}{dt}\xi(t) = \tilde{A}\xi(t), \quad t \geq 0, \quad (5.68)$$

Легко видеть, что $D(\tilde{A}) = D(A)$, поскольку $h(\xi)$ в формуле (5.56) определено при всех $\xi \in D(A)$. В дальнейшем будем предполагать, что γ – константа, α , β , c , ρ , m , J – положительные константы, $\psi(x)$ – функция класса $C^2[0, l]$.

При достаточно больших α и β в теореме 5.1 показано, что линейный неограниченный оператор $\tilde{A} : D(\tilde{A}) \rightarrow X$ является инфинитезимальным генератором сильно непрерывной полугруппы линейных операторов $\{e^{t\tilde{A}}\}_{t \geq 0}$ в X . При этом неравенство $\dot{V} \leq 0$ обеспечивает невозрастание функции $V(\xi(t))$ на решениях уравнения (5.54) с обратной связью $u = h(\xi)$. Поэтому возникает вопрос о возможности исследования ω -предельных множеств этого уравнения с помощью принципа инвариантности ЛаСалля и соответствующей модификации теоремы Барбашина – Красовского. Как известно [75, 78], положительный ответ на этот вопрос требует доказатель-

ства предкомпактности полутраекторий в бесконечномерном пространстве X . Сформулируем результат о предкомпактности полутраекторий дифференциального уравнения (5.68).

Теорема 5.2. [24] Пусть α и β – достаточно большие константы, $k > 0$. Тогда всякая положительная полутраектория $\{\xi(t)\}_{t \geq 0}$ уравнения (5.54) с управлением $u = h(\xi)$ в виде обратной связи (5.56) содержится в компактном подмножестве пространства X .

Доказательство. Рассмотрим уравнение относительно $\xi \in D(A)$ с параметрами $\lambda > 0$, $u \in \mathbb{R}$, $\tilde{\xi} \in X$:

$$A\xi + Bu - \lambda\xi = \tilde{\xi}. \quad (5.69)$$

Запишем это уравнение по компонентам векторов $\xi = (\eta, \zeta, \phi, \omega, p, q)^T$ и $\tilde{\xi} = (\tilde{\eta}, \tilde{\zeta}, \tilde{\phi}, \tilde{\omega}, \tilde{p}, \tilde{q})^T$:

$$\zeta(x) - \lambda\eta(x) = \tilde{\eta}(x), \quad -\frac{c}{\rho} \frac{d^4\eta(x)}{dx^4} + \gamma\phi - \lambda\zeta(x) + \psi(x)u = \tilde{\zeta}(x), \quad x \in (0, l), \quad (5.70)$$

$$\omega - \lambda\phi = \tilde{\phi}, \quad -\lambda\omega + u = \tilde{\omega}, \quad (5.71)$$

$$\gamma\phi + \frac{c}{m}\eta'''(l) - \lambda p + \psi(l)u = \tilde{p}, \quad -\frac{c}{J}\eta''(l) - \lambda q + \psi'(l)u = \tilde{q}. \quad (5.72)$$

Разрешая уравнения (5.71) относительно ϕ , ω , получим

$$\phi = \frac{u - \tilde{\omega}}{\lambda^2} - \frac{\tilde{\phi}}{\lambda}, \quad \omega = \frac{u - \tilde{\omega}}{\lambda}. \quad (5.73)$$

Из первого уравнения (5.70) выразим

$$\zeta(x) = \tilde{\eta}(x) + \lambda\eta(x) \quad (5.74)$$

и подставим представления (5.73), (5.74) во второе уравнение (5.70). В результате получим дифференциальное уравнение относительно $\eta(x)$:

$$\frac{d^4\eta(x)}{dx^4} + \frac{\lambda^2\rho}{c}\eta(x) = f_0(x)u + f_1(x, \tilde{\xi}), \quad x \in (0, l), \quad (5.75)$$

где

$$f_0(x) = \frac{\rho}{c} \left(\frac{\gamma}{\lambda^2} + \psi(x) \right), \quad f_1(x, \tilde{\xi}) = -\frac{\rho}{c} \left(\frac{\gamma}{\lambda} \tilde{\phi} + \frac{\gamma}{\lambda^2} \tilde{\omega} + \lambda \tilde{\eta}(x) + \tilde{\zeta}(x) \right).$$

Из свойства $\xi \in D(A)$ вытекают граничные условия

$$\eta(0) = \eta'(0) = 0, \quad (5.76)$$

а также $p = \zeta(l)$, $q = \zeta'(l)$. Два последних условия с учетом (5.74) могут быть записаны в виде

$$p = \tilde{\eta}(l) + \lambda\eta(l), \quad q = \tilde{\eta}'(l) + \lambda\eta'(l). \quad (5.77)$$

Подстановка равенств (5.73), (5.77) в (5.72) дает следующие граничные условия на $\eta(x)$ при $x = l$:

$$\eta'''(l) - \frac{\lambda^2 m}{c} \eta(l) = g_{10}u + g_{11}(\tilde{\xi}), \quad (5.78)$$

$$\eta''(l) + \frac{\lambda^2 J}{c} \eta'(l) = g_{20}u + g_{21}(\tilde{\xi}), \quad (5.79)$$

где

$$g_{10} = -\frac{m}{c} \left(\frac{\gamma}{\lambda^2} + \psi(l) \right), \quad g_{11}(\tilde{\xi}) = \frac{m}{c} \left(\frac{\gamma}{\lambda} \tilde{\phi} + \frac{\gamma}{\lambda^2} \tilde{\omega} + \lambda \tilde{\eta}(l) + \tilde{p} \right),$$

$$g_{20} = \frac{J\psi'(l)}{c}, \quad g_{21}(\tilde{\xi}) = -\frac{J}{c} (\lambda \tilde{\eta}'(l) + \tilde{q}).$$

Таким образом, если $\eta \in H^4(0, l)$ – решение краевой задачи (5.75), (5.76), (5.78), (5.79) при заданных $\tilde{\xi} \in X$, λ , u , то формулы (5.73), (5.74), (5.77) определяют компоненты ϕ , ω , ζ , p , q решения $\xi \in D(A)$ уравнения (5.69). И наоборот, если $\xi \in D(A)$ – решение уравнения (5.69), то его компонента $\eta \in H^4(0, l)$ является решением краевой задачи (5.75), (5.76), (5.78), (5.79), а остальные компоненты ξ удовлетворяют соотношениям (5.73), (5.74), (5.77).

С помощью метода вариации постоянной найдем общее решение уравнения (5.75) при граничных условиях (5.76):

$$\eta(x) = \frac{1}{4\mu^3} \int_0^x \left(f_0(s)u + f_1(s, \tilde{\xi}) \right) K(x-s) ds + C_1\eta_1(x) + C_2\eta_2(x). \quad (5.80)$$

Здесь введен вспомогательный параметр $\mu > 0$ и функции $K(x)$, $\eta_1(x)$, $\eta_2(x)$ по формулам

$$\mu = \left(\frac{\lambda^2 \rho}{4c} \right)^{1/4}, \quad (5.81)$$

$$K(x) = \sin \mu x \operatorname{ch} \mu x - \cos \mu x \operatorname{sh} \mu x,$$

$$\eta_1(x) = \sin \mu x \operatorname{sh} \mu x, \quad \eta_2(x) = \cos \mu x \operatorname{sh} \mu x - e^{\mu x} \sin \mu x.$$

Поскольку $K(x)$ – гладкая функция, удовлетворяющая условиям

$$K(0) = K'(0) = K''(0) = K'''(0) = 0,$$

то j -я производная по x функции (5.80) может быть представлена следующим образом:

$$\eta^{(j)}(x) = \frac{1}{4\mu^3} \int_0^x \left(f_0(s)u + f_1(s, \tilde{\xi}) \right) K^{(j)}(x-s) ds + C_1 \eta_1^{(j)}(x) + C_2 \eta_2^{(j)}(x) \quad (5.82)$$

при $j = \overline{0, 3}$. Для любых $\tilde{\xi} \in X$ и $\lambda > 0$ функции $f_0(\cdot)$ и $f_1(\cdot, \tilde{\xi})$ лежат в $L_2(0, l)$, поэтому из представлений (5.82) и уравнения (5.75) следует, что решение $\eta(x)$, определяемое формулой (5.80), лежит в $H^4(0, l)$ при любых значениях C_1, C_2, u .

Для исключения параметров C_1, C_2, u из решения $\eta(x)$ подставим выражения (5.82) в граничные условия (5.78), (5.79) и формулу для управления с обратной связью (5.56). В результате получим систему трех линейных алгебраических уравнений относительно C_1, C_2, u :

$$W \begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_1(\tilde{\xi}) \\ v_2(\tilde{\xi}) \\ v_3(\tilde{\xi}) \end{pmatrix}, \quad (5.83)$$

где компоненты матрицы $W = (w_{ij})$ и столбца свободных членов $v_i(\tilde{\xi})$ задаются следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} w_{11} &= -2\mu^3 (\sin \mu l \operatorname{ch} \mu l - \cos \mu l \operatorname{sh} \mu l) - \frac{4\mu^4 m}{\rho} \sin \mu l \operatorname{sh} \mu l, \\ w_{12} &= -2\mu^3 (e^{\mu l} (\cos \mu l - \sin \mu l) + \cos \mu l \operatorname{ch} \mu l + \sin \mu l \operatorname{sh} \mu l) - \\ &\quad - \frac{4\mu^4 m}{\rho} (\cos \mu l \operatorname{sh} \mu l - e^{\mu l} \sin \mu l), \\ w_{13} &= \int_0^l f_0(s) \cos \mu (s-l) \operatorname{ch} \mu (s-l) ds - g_{10} - \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\mu m}{\rho} \int_0^l f_0(s) (\cos \mu (s-l) \operatorname{sh} \mu (s-l) - \sin \mu (s-l) \operatorname{ch} \mu (s-l)) ds, \\
w_{21} &= 2\mu^2 \cos \mu l \operatorname{ch} \mu l + \frac{4\mu^5 J}{\rho} (\cos \mu l \operatorname{sh} \mu l + \sin \mu l \operatorname{ch} \mu l), \\
w_{22} &= -2\mu^2 (\sin \mu l \operatorname{ch} \mu l + e^{\mu l} \cos \mu l) - \\
& -\frac{4\mu^5 J}{\rho} (e^{\mu l} (\sin \mu l + \cos \mu l) + \sin \mu l \operatorname{sh} \mu l - \cos \mu l \operatorname{ch} \mu l), \\
w_{23} &= -\frac{1}{2\mu} \int_0^l f_0(s) (\cos \mu (s-l) \operatorname{sh} \mu (s-l) + \sin \mu (s-l) \operatorname{ch} \mu (s-l)) ds + \\
& + \frac{2\mu^2 J}{\rho} \int_0^l f_0(s) \sin \mu (s-l) \operatorname{sh} \mu (s-l) ds - g_{20}, \\
w_{31} &= 2\mu^2 c \left(\int_0^l \psi''(x) \cos \mu x \operatorname{ch} \mu x dx + \psi'(0) \right) - \gamma m \sin \mu l \operatorname{sh} \mu l + \\
& + \frac{\gamma \rho}{4\mu} (e^{\mu l} (\cos \mu l - \sin \mu l) - e^{-\mu l} (\cos \mu l + \sin \mu l)), \\
w_{32} &= 4\mu^3 c \psi(0) - 2\mu^2 c \left(\int_0^l (\sin \mu x \operatorname{ch} \mu x + e^{\mu x} \cos \mu x) \psi''(x) dx + \psi'(0) \right) + \\
& + \gamma m (e^{\mu l} \sin \mu l - \cos \mu l \operatorname{sh} \mu l) - \\
& - \frac{\gamma \rho}{4\mu} (e^{\mu l} (3 \cos \mu l - \sin \mu l) + e^{-\mu l} (\cos \mu l - \sin \mu l) - 4), \\
w_{33} &= \beta + \frac{c}{2\mu} \int_0^l \int_0^x f_0(s) (\cos \mu (x-s) \operatorname{sh} \mu (x-s) + \sin \mu (x-s) \operatorname{ch} \mu (x-s)) \psi''(x) ds dx + \\
& + \frac{k}{2\mu^2} \sqrt{\frac{\rho}{c}} + \frac{\gamma \rho}{4\mu^3} \int_0^l \int_0^x f_0(s) (\cos \mu (x-s) \operatorname{sh} \mu (x-s) - \sin \mu (x-s) \operatorname{ch} \mu (x-s)) ds dx + \\
& + \frac{\gamma m}{4\mu^3} \int_0^l f_0(s) (\sin \mu (s-l) \operatorname{ch} \mu (s-l) - \cos \mu (s-l) \operatorname{sh} \mu (s-l)) ds + \frac{\alpha^* \rho}{\mu^4 c}, \\
v_1(\tilde{\xi}) &= - \int_0^l f_1(s, \tilde{\xi}) \cos \mu (s-l) \operatorname{ch} \mu (s-l) ds + \\
& + \frac{\mu m}{\rho} \int_0^l f_1(s, \tilde{\xi}) (\cos \mu (s-l) \operatorname{sh} \mu (s-l) - \sin \mu (s-l) \operatorname{ch} \mu (s-l)) ds + g_{11}(\tilde{\xi}), \\
v_2(\tilde{\xi}) &= \frac{1}{2\mu} \int_0^l f_1(s, \tilde{\xi}) (\cos \mu (s-l) \operatorname{sh} \mu (s-l) + \sin \mu (s-l) \operatorname{ch} \mu (s-l)) ds - \\
& - \frac{2\mu^2 J}{\rho} \int_0^l f_1(s, \tilde{\xi}) \sin \mu (s-l) \operatorname{sh} \mu (s-l) ds + g_{21}(\tilde{\xi}),
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
v_3(\tilde{\xi}) = & -\frac{c}{2\mu} \int_0^l \int_0^x f_1(s, \tilde{\xi}) (\cos \mu(x-s) \operatorname{sh} \mu(x-s) + \sin \mu(x-s) \operatorname{ch} \mu(x-s)) \psi''(x) ds dx + \\
& + \frac{\gamma \rho}{4\mu^3} \int_0^l \int_0^x f_1(s, \tilde{\xi}) (\sin \mu(x-s) \operatorname{ch} \mu(x-s) - \cos \mu(x-s) \operatorname{sh} \mu(x-s)) ds dx + \\
& + \frac{\gamma m}{4\mu^3} \int_0^l f_1(s, \tilde{\xi}) (\cos \mu(s-l) \operatorname{sh} \mu(s-l) - \sin \mu(s-l) \operatorname{ch} \mu(s-l)) ds + \\
& + \frac{\alpha^* \tilde{\phi} + k\tilde{\omega}}{2\mu^2} \sqrt{\frac{\rho}{c}} + \frac{\alpha^* \rho \tilde{\omega}}{4\mu^4 c},
\end{aligned} \tag{5.84}$$

$$\alpha^* = \alpha - \gamma \left(\rho \int_0^l \psi(x) dx + m\psi(l) \right) > 0.$$

В приведенных формулах параметр λ выражен через μ посредством соотношения (5.81), величины $f_0(s)$, $f_1(s, \tilde{\xi})$, g_{10} , $g_{11}(\tilde{\xi})$, g_{20} , $g_{21}(\tilde{\xi})$ определены выше.

При заданных константах $c > 0$, $m > 0$, $J > 0$, $\rho > 0$, γ и функции $\psi \in C^2[0, l]$, компоненты матрицы W зависят только от параметра μ . Разложим определитель W по степеням μ :

$$\det(W) = \frac{2\rho\alpha^*}{c} \mu + o(\mu) \tag{5.85}$$

при $\mu \rightarrow 0$. (Вспомогательные выкладки были проведены с помощью компьютерной программы Maple.)

Выберем такое достаточно малое число $\mu > 0$, чтобы выполнялось условие $\det(W) \neq 0$, исходя из представления (5.85). Далее будем считать, что число $\lambda > 0$ фиксировано и соответствует выбранному μ по формуле (5.81), кроме того, параметр u связан с ξ посредством линейного функционала (5.56). Из условия $\det(W) \neq 0$ следует, что для всякого $\tilde{\xi} \in X$ существует единственный элемент $\xi \in D(A)$, который удовлетворяет уравнению (5.69) при условии (5.56). Это означает, что $\xi = (\tilde{A} - \lambda I)^{-1} \tilde{\xi}$, т.е. существует резольвента $(\tilde{A} - \lambda I)^{-1} : X \rightarrow X$ оператора \tilde{A} при выбранном $\lambda > 0$. Запишем резольвенту в покомпонентном виде:

$$(\tilde{A} - \lambda I)^{-1} \tilde{\xi} = \left(R_\eta(\tilde{\xi}), R_\zeta(\tilde{\xi}), R_\phi(\tilde{\xi}), R_\omega(\tilde{\xi}), R_p(\tilde{\xi}), R_q(\tilde{\xi}) \right)^T, \tag{5.86}$$

где линейные операторы

$$R_\eta : X \rightarrow \{\eta \in H^2(0, l) : \eta(0) = \eta'(0) = 0\},$$

$$R_\zeta : X \rightarrow \{\zeta \in L_2(0, l)\}$$

и функционалы

$$R_\phi : X \rightarrow \{\phi \in \mathbb{R}\}, \quad R_\omega : X \rightarrow \{\omega \in \mathbb{R}\},$$

$$R_p : X \rightarrow \{p \in \mathbb{R}\}, \quad R_q : X \rightarrow \{q \in \mathbb{R}\}$$

задаются формулами (5.73), (5.74), (5.77), (5.80), (5.83).

При сделанных предположениях для любых $v_1(\tilde{\xi})$, $v_2(\tilde{\xi})$, $v_3(\tilde{\xi})$ справедлива оценка решения C_1 , C_2 , u системы (5.83):

$$|C_1| + |C_2| + |u| \leq M_1(|v_1(\tilde{\xi})| + |v_2(\tilde{\xi})| + |v_3(\tilde{\xi})|), \quad (5.87)$$

где положительная константа M_1 определяется нормой матрицы W^{-1} . Из формул (5.84) на основании неравенств Коши – Буняковского и Виртингера – Фридрихса (5.47)-(5.48) следует, что $v_j : X \rightarrow \mathbb{R}$ – линейные ограниченные функционалы ($j = 1, 2, 3$). Поэтому оценка (5.87) обеспечивает ограниченность линейного отображения $\tilde{\xi} \mapsto (C_1, C_2, u)$, определенного системой (5.83):

$$|C_1| + |C_2| + |u| \leq M_2 \|\tilde{\xi}\|_X, \quad \forall \tilde{\xi} \in X, \quad (5.88)$$

с некоторой константой $M_2 \geq 0$. Следовательно, функционалы $R_\phi : \tilde{\xi} \mapsto \phi$, $R_\omega : \tilde{\xi} \mapsto \omega$, определенные в (5.73), являются линейными ограниченными функционалами из X в \mathbb{R} . Путем применения неравенства Коши-Буняковского в (5.82) получим оценку:

$$\begin{aligned} \|\eta^{(j)}\|_{L_2(0, l)} &\leq \frac{1}{4\mu^3} \left(\int_0^l \left(\int_0^x (f_0(s)u + f_1(s, \tilde{\xi})) K^{(j)}(x-s) ds \right)^2 dx \right)^{1/2} + \\ &+ |C_1| \cdot \|\eta_1^{(j)}\|_{L_2(0, l)} + |C_2| \cdot \|\eta_2^{(j)}\|_{L_2(0, l)} \leq \\ &\leq \frac{\sqrt{l}}{4\mu^3} \|f_0(\cdot)u + f_1(\cdot, \tilde{\xi})\|_{L_2} + |C_1| \cdot \|\eta_1^{(j)}\|_{L_2} + |C_2| \cdot \|\eta_2^{(j)}\|_{L_2}. \end{aligned}$$

Отсюда с помощью оценки (5.88) следует существование константы $M_3 \geq 0$:

$$\|\eta\|_{H^3(0,l)} = \left(\sum_{j=0}^3 \|\eta^{(j)}\|_{L_2(0,l)}^2 \right)^{1/2} \leq M_3 \|\tilde{\xi}\|_X. \quad (5.89)$$

По теореме вложения (см. напр. [46, с. 83]) пространство $H^3(0, l)$ компактно вложено в $H^2(0, l)$, т.е. линейный оператор $R_\eta : \tilde{\xi} \mapsto \eta$, определенный с помощью (5.80), (5.83), переводит ограниченные подмножества X в предкомпактные подмножества $H^2(0, l)$ вследствие оценки (5.89).

Формулы (5.74) и (5.89) обеспечивают выполнение оценки

$$\|\zeta\|_{H^2(0,l)} \leq \|\tilde{\eta}\|_{H^2(0,l)} + \lambda \|\eta\|_{H^2(0,l)} \leq \|\tilde{\eta}\|_{H^2(0,l)} + \lambda M_3 \|\tilde{\xi}\|_X \leq M_4 \|\tilde{\xi}\|_X$$

с некоторой положительной константой M_4 . Следовательно, линейный оператор $R_\zeta : \tilde{\xi} \mapsto \zeta$, действующий из X в $L_2(0, l)$ по формулам (5.74), (5.80), (5.83), является компактным.

Оценим теперь компоненты p и q вектора ξ в представлении (5.77), учитывая граничные условия $\eta(0) = \eta'(0) = \tilde{\eta}(0) = \tilde{\eta}'(0) = 0$:

$$\begin{aligned} |p| &\leq |\tilde{\eta}(l)| + \lambda |\eta(l)| = \left| \int_0^l \tilde{\eta}'(x) dx \right| + \lambda \left| \int_0^l \eta'(x) dx \right| \leq \\ &\leq \|1\|_{L_2(0,l)} \cdot (\|\tilde{\eta}'\|_{L_2(0,l)} + \lambda \|\eta'\|_{L_2(0,l)}), \end{aligned}$$

$$|q| \leq |\tilde{\eta}'(l)| + \lambda |\eta'(l)| \leq \|1\|_{L_2(0,l)} \cdot (\|\tilde{\eta}''\|_{L_2(0,l)} + \lambda \|\eta''\|_{L_2(0,l)}).$$

Правая часть каждого из этих неравенств не превосходит $M_5 \|\tilde{\xi}\|_X$ при некоторой константе $M_5 > 0$ вследствие оценки (5.89) и неравенства Виртингера – Фридрихса вида (5.47)-(5.48). Приведенные оценки доказывают ограниченность линейных функционалов R_p и R_q . Итак, показано, что в обозначениях (5.86): R_η , R_ζ – компактные операторы, R_ϕ , R_ω , R_p , R_q – ограниченные функционалы, следовательно, оператор $(\tilde{A} - \lambda I)^{-1} : X \rightarrow X$ компактен.

При введении в пространстве X эквивалентной нормы $\|\cdot\|_V$ выполнены следующие свойства: полугруппа $\{e^{t\tilde{A}}\}_{t \geq 0}$ является сжимающей; оператор \tilde{A} – диссипативен ($-A$ – аккретивен). Кроме того, поскольку $\overline{D(\tilde{A})} = X$,

$\tilde{A}(0) = 0$ и $(\tilde{A} - \lambda I)^{-1}$ – компактный оператор при выбранном $\lambda > 0$, то каждая полутраектория $\{\xi(t)\}_{t \geq 0} = \{e^{t\tilde{A}}\xi(0)\}_{t \geq 0}$ уравнения (5.54), (5.56) предкомпактна по теореме 1.10, что и требовалось доказать.

Для положительной полутраектории $\{\xi(t)\}_{t \geq 0} = \{e^{t\tilde{A}}\xi_0\}_{t \geq 0}$ обозначим через $\Omega(\xi_0)$ ее ω -предельное множество. Как отмечено выше, значения $V(\xi(t)) \geq 0$ не возрастают при $t \geq 0$, и $\dot{V}(\xi) = 0$ только при $\omega = 0$. Поэтому из доказанной теоремы и принципа инвариантности (лемма 2.2) вытекает

Следствие. Пусть α и β – достаточно большие константы, $k > 0$. Тогда для всякой полутраектории $\{\xi(t)\}_{t \geq 0}$ уравнения (5.54) с управлением $u = h(\xi)$ вида (5.56), множество $\Omega(\xi_0)$ является компактным инвариантным относительно полугруппы $\{e^{t\tilde{A}}\}_{t \geq 0}$ подмножеством множества

$$S_c = \{\xi \in X : \omega = 0, V(\xi) = c\},$$

при некоторой константе $c \geq 0$. Здесь функционал V определен формулой (5.57).

Доказанный результат сводит анализ предельных множеств траекторий уравнения (5.54) с управлением в виде обратной связи (5.56) к исследованию инвариантных подмножеств S_c . В частности, представляет дальнейший интерес проверка условий типа Барбашина – Красовского (теорема 2.2) с целью получения достаточных условий сильной или частичной асимптотической устойчивости решения $\xi = 0$. Для достижения этой цели проведем исследование вспомогательной задачи Штурма – Лиувилля.

5.6.2 Анализ спектра задачи Штурма – Лиувилля

Рассмотрим гильбертово пространство

$$H = \left\{ \theta = \begin{pmatrix} \eta \\ y \\ z \end{pmatrix} : \eta \in L_2(0, l), y, z \in \mathbb{C} \right\}$$

со скалярным произведением

$$\langle \theta_1, \theta_2 \rangle = \int_0^l \rho \eta_1 \bar{\eta}_2 dx + m y_1 \bar{y}_2 + J z_1 \bar{z}_2.$$

Пусть в пространстве H определен линейный неограниченный оператор $F : D(F) \rightarrow H$,

$$\theta = \begin{pmatrix} \eta \\ y \\ z \end{pmatrix} \mapsto F\theta = \begin{pmatrix} \frac{1}{\rho}(c\eta'')'' \\ -\frac{1}{m}(c\eta'')'(l) \\ \frac{c}{J}\eta''(l) \end{pmatrix}, \quad (5.90)$$

где область определения оператора F задана в виде

$$D(F) = \{ \theta : \eta \in H^4(0, l), \eta(0) = \eta'(0) = 0, \eta(l) = y, \eta'(l) = z \}.$$

Докажем необходимые утверждения о свойствах оператора F .

Лемма 5.1. [23] *Оператор $F : D(F) \rightarrow H$ является симметрическим и положительным.*

Доказательство. Докажем сначала симметричность F [181, с. 135], т.е. для любых элементов

$$\theta_1 = \begin{pmatrix} \eta_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \in D(F), \quad \theta_2 = \begin{pmatrix} \eta_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \in D(F)$$

установим равенство

$$\langle F\theta_1, \theta_2 \rangle = \langle \theta_1, F\theta_2 \rangle.$$

Выполняя интегрирование по частям с учетом граничных условий на $\eta_1(x)$ и $\eta_2(x)$ при $\theta_1, \theta_2 \in D(F)$, получим

$$\begin{aligned} \langle F\theta_1, \theta_2 \rangle &= \int_0^l (c\eta_1'')'' \bar{\eta}_2 dx - (c\eta_1'')' \bar{\eta}_2 \Big|_{x=l} + c\eta_1'' \bar{\eta}_2 \Big|_{x=l} = \\ &= \left((c_1\eta_1'')' \bar{\eta}_2 - c\eta_1'' \bar{\eta}_2' \right) \Big|_{x=0}^l - (c\eta_1'')' \bar{\eta}_2 \Big|_{x=l} + c\eta_1'' \bar{\eta}_2 \Big|_{x=l} = \int_0^l c\eta_1'' \bar{\eta}_2'' dx. \end{aligned} \quad (5.91)$$

Аналогично,

$$\langle \theta_1, F\theta_2 \rangle = \int_0^l c\eta_1''\bar{\eta}_2'' dx,$$

откуда следует

$$\langle F\theta_1, \theta_2 \rangle = \langle \theta_1, F\theta_2 \rangle, \quad \forall \theta_1, \theta_2 \in D(F).$$

Применяя представление (5.91) при $\theta_1 = \theta_2 = \theta \in D(F)$, получим

$$\langle F\theta, \theta \rangle = \int_0^l c|\eta''|^2 dx \geq 0,$$

что доказывает положительность F .

Предположим в дальнейшем, что $\rho = \text{const}$, $c = \text{const}$.

Лемма 5.2. [23] *Оператор $F^{-1} : H \rightarrow H$ является самосопряженным вполне непрерывным оператором.*

Доказательство. Для произвольного элемента $\theta_2 \in H$ докажем разрешимость линейного уравнения

$$F\theta_1 = \theta_2$$

относительно $\theta_1 \in D(F)$. Запишем это уравнение по компонентам векторов θ_1 и θ_2 :

$$\eta_1''''(x) = \frac{\rho}{c}\eta_2(x), \quad x \in (0, l), \quad (5.92)$$

$$\eta_1'''(l) = -\frac{m}{c}y_2, \quad (5.93)$$

$$\eta_1''(l) = \frac{J}{c}z_2, \quad (5.94)$$

К уравнениям (5.92)-(5.94) добавим граничные условия из $\theta_1 \in D(F)$:

$$\eta_1(0) = \eta_1'(0), \quad (5.95)$$

$$y_1 = \eta_1(l), \quad z_1 = \eta_1'(l). \quad (5.96)$$

Используя метод вариации постоянных, запишем общее решение уравнения (5.92) с граничными условиями (5.95):

$$\eta_1(x) = \frac{a_2}{2}x^2 + \frac{a_3}{6}x^3 + \frac{\rho}{6c} \int_0^x (x-s)^3 \eta_2(s) ds, \quad x \in [0, l], \quad (5.97)$$

где a_2, a_3 – произвольные константы. Отметим, что формула (5.97) определяет функцию $\eta_1 \in H^4(0, l)$ для любой $\eta_2 \in L_2(0, l)$, поскольку производные η_1 допускают следующее представление:

$$\eta_1'(x) = a_2x + \frac{a_3}{2}x^2 + \frac{\rho}{2c} \int_0^x (x-s)^2 \eta_2(s) ds,$$

$$\eta_1''(x) = a_2 + a_3x + \frac{\rho}{c} \int_0^x (x-s) \eta_2(s) ds,$$

$$\eta_1'''(x) = a_3 + \frac{\rho}{c} \int_0^x \eta_2(s) ds.$$

Определим константы a_2 и a_3 из граничных условий (5.93) и (5.94):

$$a_3 = -\frac{\rho}{c} \int_0^l \eta_2(s) ds - \frac{m}{c} y_2, \quad (5.98)$$

$$a_2 = -la_3 - \frac{\rho}{c} \int_0^l (l-s) \eta_2(s) ds + \frac{J}{c} z_2. \quad (5.99)$$

Таким образом, всякому элементу $\theta_2 \in H$ по формулам (5.98), (5.99) соответствуют числа a_2 и a_3 , с помощью которых определяется функция $\eta_1 \in H^4(0, l)$ по формуле (5.97) и числа y_1, z_1 по формулам (5.96). Эти соотношения задают оператор

$$F^{-1} : \theta_2 \in H \mapsto \theta_1 \in D(F) \subset H.$$

Из теоремы Рисса вытекает, что определяемые формулами (5.98), (5.99) линейные функционалы $\theta_2 \mapsto a_2$ и $\theta_2 \mapsto a_3$ являются ограниченными. Отсюда, с учетом представления (5.97), следует ограниченность компонент оператора F^{-1} : ограниченность отображения $\theta_2 \in H \mapsto \eta_1 \in H^4(0, l)$, а также функционалов $\theta_2 \in H \mapsto y_1$ и $\theta_2 \in H \mapsto z_1$ в (5.96). Поскольку пространство Соболева $H^4(0, l)$ компактно вложено в $L_2(0, l)$ [46, с. 83], то приведенные рассуждения доказывают компактность оператора $F^{-1} : H \rightarrow H$. Из симметричности F и определенности F^{-1} на всем пространстве H следует [181, с. 136], что F^{-1} – самосопряженный оператор. Лемма доказана.

По теореме о спектре вполне непрерывного самосопряженного оператора [181, с. 189], [46, с. 191], в пространстве H существует ортонормальный

базис

$$\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n, \dots,$$

состоящий из собственных элементов оператора F^{-1} , которые соответствуют собственным значениям

$$\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_n \geq \dots$$

оператора F^{-1} . Поскольку оператор F^{-1} обратим, то $\lambda = 0$ не является собственным значением оператора F^{-1} , и все λ_n положительны вследствие положительности F . Из определения обратного оператора следует, что θ_n является собственным элементом оператора F :

$$F\theta_n = \mu_n\theta_n, \quad \theta_n \in D(F), \quad (5.100)$$

где $\mu_n = 1/\lambda_n > 0$. Запишем соотношение (5.100) с помощью обозначения

$$\theta_n = \begin{pmatrix} \eta \\ \eta(l) \\ \eta'(l) \end{pmatrix} \in D(F),$$

где $\eta \in H^4(0, l)$. В результате получим задачу Штурма – Лиувилля с параметром $\mu = \mu_n$:

$$\eta''''(x) = \frac{\mu\rho}{c}\eta(x), \quad x \in (0, l), \quad (5.101)$$

$$\eta(0) = \eta'(0) = 0, \quad (5.102)$$

$$\eta'''(l) = -\frac{\mu m}{c}\eta(l), \quad (5.103)$$

$$\eta''(l) = \frac{\mu J}{c}\eta'(l). \quad (5.104)$$

Поскольку все собственные значения μ_n оператора F вещественны и положительны, то будем рассматривать задачу (5.101)–(5.104) с вещественными функциями $\eta(x)$.

Лемма 5.3. [23] *Каждому собственному значению $\mu = \mu_n > 0$ задачи Штурма – Лиувилля (5.101)–(5.104) соответствует единственная (с точностью до постоянного множителя) собственная функция $\eta(x)$, $0 \leq x \leq l$. При этом $\eta''(0) \neq 0$.*

Доказательство. Для произвольного $\mu > 0$ обозначим

$$\tilde{\beta} = l \left(\frac{\mu \rho}{c} \right)^{1/4} > 0. \quad (5.105)$$

Тогда общее решение дифференциального уравнения (5.101) запишется следующим образом:

$$\eta(x) = C_1 \cos \left(\frac{\tilde{\beta} x}{l} \right) + C_2 \sin \left(\frac{\tilde{\beta} x}{l} \right) + C_3 \operatorname{ch} \left(\frac{\tilde{\beta} x}{l} \right) + C_4 \operatorname{sh} \left(\frac{\tilde{\beta} x}{l} \right),$$

где C_1, C_2, C_3, C_4 – произвольные константы. Подставляя это решение в (5.102), получим соотношения $C_3 = -C_1$ и $C_4 = -C_2$. Таким образом, всякое решение уравнения (5.101) с граничными условиями (5.102) представимо в виде

$$\eta(x) = C_1 \left\{ \cos \left(\frac{\tilde{\beta} x}{l} \right) - \operatorname{ch} \left(\frac{\tilde{\beta} x}{l} \right) \right\} + C_2 \left\{ \sin \left(\frac{\tilde{\beta} x}{l} \right) - \operatorname{sh} \left(\frac{\tilde{\beta} x}{l} \right) \right\}. \quad (5.106)$$

Дифференцируя функцию $\eta(x)$, получим

$$\begin{aligned} \frac{l\eta'(x)}{\tilde{\beta}} &= -C_1 \left\{ \sin \left(\frac{\tilde{\beta} x}{l} \right) + \operatorname{sh} \left(\frac{\tilde{\beta} x}{l} \right) \right\} + C_2 \left\{ \cos \left(\frac{\tilde{\beta} x}{l} \right) - \operatorname{ch} \left(\frac{\tilde{\beta} x}{l} \right) \right\}, \\ \frac{l^2\eta''(x)}{\tilde{\beta}^2} &= -C_1 \left\{ \cos \left(\frac{\tilde{\beta} x}{l} \right) + \operatorname{ch} \left(\frac{\tilde{\beta} x}{l} \right) \right\} - C_2 \left\{ \sin \left(\frac{\tilde{\beta} x}{l} \right) + \operatorname{sh} \left(\frac{\tilde{\beta} x}{l} \right) \right\}, \\ \frac{l^3\eta'''(x)}{\tilde{\beta}^3} &= C_1 \left\{ \sin \left(\frac{\tilde{\beta} x}{l} \right) - \operatorname{sh} \left(\frac{\tilde{\beta} x}{l} \right) \right\} - C_2 \left\{ \cos \left(\frac{\tilde{\beta} x}{l} \right) + \operatorname{ch} \left(\frac{\tilde{\beta} x}{l} \right) \right\}. \end{aligned} \quad (5.107)$$

С учетом этих формул граничные условия (5.103) и (5.104) примут вид

$$C_1 \left\{ \frac{m\tilde{\beta}}{\rho l} (\cos \tilde{\beta} - \operatorname{ch} \tilde{\beta}) + \sin \tilde{\beta} - \operatorname{sh} \tilde{\beta} \right\} + C_2 \left\{ \frac{m\tilde{\beta}}{\rho l} (\sin \tilde{\beta} - \operatorname{sh} \tilde{\beta}) - \cos \tilde{\beta} - \operatorname{ch} \tilde{\beta} \right\} = 0 \quad (5.108)$$

и

$$C_1 \left\{ -\frac{J\tilde{\beta}^3}{\rho l^3} (\sin \tilde{\beta} + \operatorname{sh} \tilde{\beta}) + \cos \tilde{\beta} + \operatorname{ch} \tilde{\beta} \right\} + C_2 \left\{ \frac{J\tilde{\beta}^3}{\rho l^3} (\cos \tilde{\beta} - \operatorname{ch} \tilde{\beta}) + \sin \tilde{\beta} + \operatorname{sh} \tilde{\beta} \right\} = 0, \quad (5.109)$$

соответственно. Мы получили систему двух линейных однородных уравнений (5.108), (5.109) относительно C_1, C_2 . Вычисляя определитель Δ мат-

рицы этой системы и приравнивая его нулю, получим следующее соотношение:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta}{2} = \tilde{m}\tilde{J}\tilde{\beta}^4(1 - \operatorname{ch} \tilde{\beta} \cos \tilde{\beta}) - \tilde{J}\tilde{\beta}^3(\operatorname{sh} \tilde{\beta} \cos \tilde{\beta} + \operatorname{ch} \tilde{\beta} \sin \tilde{\beta}) + \\ + \tilde{m}\tilde{\beta}(\operatorname{sh} \tilde{\beta} \cos \tilde{\beta} - \operatorname{ch} \tilde{\beta} \sin \tilde{\beta}) + \operatorname{ch} \tilde{\beta} \cos \tilde{\beta} + 1 = 0, \end{aligned} \quad (5.110)$$

где

$$\tilde{m} = \frac{m}{\rho l}, \quad \tilde{J} = \frac{J}{\rho l^3}.$$

Нетривиальные решения $\eta(x)$ задачи (5.101)-(5.104) существуют только для значений $\tilde{\beta}$, удовлетворяющих характеристическому уравнению (5.110). Если $\mu > 0$ – собственное значение задачи (5.101)-(5.104), то соответствующее ему по формуле (5.105) число $\tilde{\beta}$ является корнем уравнения (5.110). При этом любая собственная функция $\eta(x)$, соответствующая μ , представима в виде (5.106), где C_1 и C_2 удовлетворяют алгебраической системе (5.108), (5.109). Заметим, что в уравнении (5.108) коэффициент при C_2 отличен от нуля при всех $\tilde{\beta} > 0$. Действительно, указанный коэффициент равен нулю только при выполнении условия

$$\frac{\sin \tilde{\beta} - \operatorname{sh} \tilde{\beta}}{\cos \tilde{\beta} + \operatorname{ch} \tilde{\beta}} = \frac{\rho l}{m\tilde{\beta}}. \quad (5.111)$$

При $\tilde{\beta} > 0$ имеет место неравенство $\operatorname{sh} \tilde{\beta} > \sin \tilde{\beta}$, поэтому левая часть соотношения (5.111) отрицательна, что противоречит положительности правой части. Итак, уравнение (5.108) можно однозначно разрешить относительно C_2 при любом $\tilde{\beta} > 0$:

$$C_2 = C_1 \frac{m\tilde{\beta}(\cos \tilde{\beta} - \operatorname{ch} \tilde{\beta}) + \rho l(\sin \tilde{\beta} - \operatorname{sh} \tilde{\beta})}{m\tilde{\beta}(\operatorname{sh} \tilde{\beta} - \sin \tilde{\beta}) + \rho l(\cos \tilde{\beta} + \operatorname{ch} \tilde{\beta})}. \quad (5.112)$$

Таким образом, выражения (5.106), (5.112) определяют собственную функцию $\eta(x)$ задачи Штурма – Лиувилля с точностью до константы $C_1 \neq 0$ (если $\tilde{\beta}$ является корнем характеристического уравнения). Отсюда следует, что всякому собственному значению $\mu > 0$ соответствует одномерное инвариантное подпространство решений задачи (5.101)-(5.104).

Остается доказать свойство $\eta''(0) \neq 0$. Предположим, что $\eta''(0) = 0$ для собственной функции $\eta(x)$. Тогда из формулы (5.107) следует, что

$$C_1 = -\frac{l^2 \eta''(0)}{2\tilde{\beta}^2} = 0.$$

Тогда из соотношения (5.112) следует $C_2 = 0$, а значит, $\eta(x) \equiv 0$, что противоречит определению собственной функции. Итак, $\eta''(0) = 0$ для каждой собственной функции задачи Штурма – Лиувилля (5.101)-(5.104). Лемма доказана.

5.6.3 Доказательство асимптотической устойчивости

В теореме 5.1 для достаточно больших значений констант α и β построен определенно - положительный функционал Ляпунова $V : X \rightarrow \mathbb{R}$, производная которого в силу уравнения (5.68) имеет вид:

$$\dot{V}(\xi) = -k\omega^2 \leq 0. \quad (5.113)$$

Поскольку все полутраектории $\{e^{t\tilde{A}}\xi_0 : t \geq 0\}$ предкомпактны в X по теореме 5.2, то согласно принципу инвариантности (лемма 2.2), для доказательства асимптотической устойчивости решения $\xi = 0$ уравнения (5.68) достаточно установить, что единственным инвариантным относительно полугруппы $\{e^{t\tilde{A}}\}_{t \geq 0}$ подмножеством множества

$$Z_0 = \{\xi : \dot{V}(\xi) = 0\}$$

является $\{0\}$. Пусть $\xi(t)$ – решение уравнения (5.68) и $\xi(t) \in Z_0$ при всех $t \geq 0$. Тогда из формулы (5.113) следует, что соответствующая компонента решения $\omega(t) \equiv 0$, а значит, $\phi(t) \equiv \text{const}$. Далее, из уравнения (5.56) получаем $u = \frac{d\omega(t)}{dt} \equiv 0$, следовательно, $h(\xi(t)) = 0$. Поставим в соответствие элементу $\xi \in X$ элемент $\theta \in H$ по формуле

$$\theta = \begin{pmatrix} \eta \\ \eta(l) \\ \eta'(l) \end{pmatrix}.$$

Нетрудно проверить, что если $\xi(t)$ – решение уравнения (5.54) с $\phi(t) = \text{const}$, $u = 0$, то соответствующая функция $\theta(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению в пространстве H :

$$\frac{d^2}{dt^2}\theta(t) = -F\theta(t) + b\phi, \quad (5.114)$$

где оператор $F : D(F) \rightarrow H$ задан формулой (5.90), $b = (\gamma, \gamma, 0)^T \in H$.

Пусть $\theta(t)$ – решение дифференциального уравнения (5.114) для $t \geq 0$. Поскольку собственные элементы $\{\theta_j\}$ оператора F образуют ортонормальный базис в H , то $\theta(t)$ единственным образом разлагается в ряд

$$\theta(t) = \sum_{j=1}^{\infty} q_j(t)\theta_j, \quad (5.115)$$

где коэффициенты Фурье $q_j(t)$ играют роль обобщенных координат, соответствующих моде колебаний с номером j ,

$$\theta_j = \begin{pmatrix} \eta_j \\ \eta_j(l) \\ \eta'_j(l) \end{pmatrix}, \quad \|\theta_j\|_H = 1,$$

а $\eta_j \in H^4(0, l)$ – собственная функция задачи Штурма – Лиувилля (5.101)–(5.104). Умножая обе части уравнения (5.114) на θ_n скалярно и подставляя $\theta(t)$ из формулы (5.115), приходим к системе дифференциальных уравнений относительно $\theta_n(t)$:

$$\frac{d^2}{dt^2}q_n(t) = -\mu_n q_n(t) + \phi b_n, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (5.116)$$

где $b_n = \langle b, \theta_n \rangle$, $\sum_{n=1}^{\infty} b_n^2 = \|b\|_H^2 < \infty$ согласно равенству Парсеваля [46, с. 184]. Решив эти уравнения, получим, что

$$q_n(t) = A_n \cos(\sqrt{\mu_n}t) + B_n \sin(\sqrt{\mu_n}t) + \frac{\phi b_n}{\mu_n} \quad (5.117)$$

с некоторыми константами A_n, B_n . Если предположить, что соответствующая решению $\theta(t)$ функция $\xi(t)$ удовлетворяет условию $h(\xi(t)) \equiv 0$ при всех $t \geq 0$, то из представления (5.117) можно получить, что

$$\left(\alpha - \gamma \left(\int_0^l \rho \psi dx + m\psi(l) \right) \right) \phi +$$

$$+ \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) \left\{ \int_0^l c\eta_n'' \psi'' dx + (c\eta_n'' \psi' - (c\eta_n'')' \psi) \Big|_{x=0} - \gamma \left(\int_0^l \rho \eta_n dx + m\eta_n(l) \right) \right\} \equiv 0.$$

Это выражение примет следующий вид при $\psi(x) = -x$:

$$\left(\alpha - \gamma \left(\int_0^l \rho \psi dx + m\psi(l) \right) \right) \phi - \sum_{n=1}^{\infty} q_n(t) \left\{ c\eta_n''(0) + \gamma \left(\int_0^l \rho \eta_n dx + m\eta_n(l) \right) \right\} \equiv 0. \quad (5.118)$$

Из представления (5.117) вытекает, что левая часть тождества (5.118) является линейной комбинацией функций

$$1, \cos(\sqrt{\mu_1}t), \sin(\sqrt{\mu_1}t), \cos(\sqrt{\mu_2}t), \sin(\sqrt{\mu_2}t), \dots \quad (5.119)$$

По лемме 5.3 среди собственных значений μ_j нет кратных, следовательно, функции (5.119) линейно-независимы при $t \in [0, +\infty)$ (см. напр. [160, теорема 1.2.17]). Это означает, что все коэффициенты $A_n = B_n = 0$ в представлении (5.117), а также $\phi = 0$ (если $\alpha > 0$ – достаточно большая константа). Мы получили, что $\theta(t) \equiv 0$, $\phi(t) \equiv 0$, а значит, максимальное инвариантное подмножество множества Z_0 содержит единственную точку $\xi = 0$.

Приведенные рассуждения доказывают следующий результат [23].

Теорема 5.3. *Предположим, что α, β – достаточно большие константы, $\psi(x) = -x$. Тогда решение $\xi = 0$ уравнения (5.68) сильно асимптотически устойчиво по Ляпунову.*

5.7 Стабилизация многозвенника с упругими шарнирами

В данном подразделе исследуется модель манипулятора, которая учитывает дополнительную податливость конструкции в точках сопряжения соседних звеньев.

5.7.1 Уравнения движения

На рис. 5.2 изображен гибкий манипулятор, совершающий движение в плоскости под действием управляющего момента M .

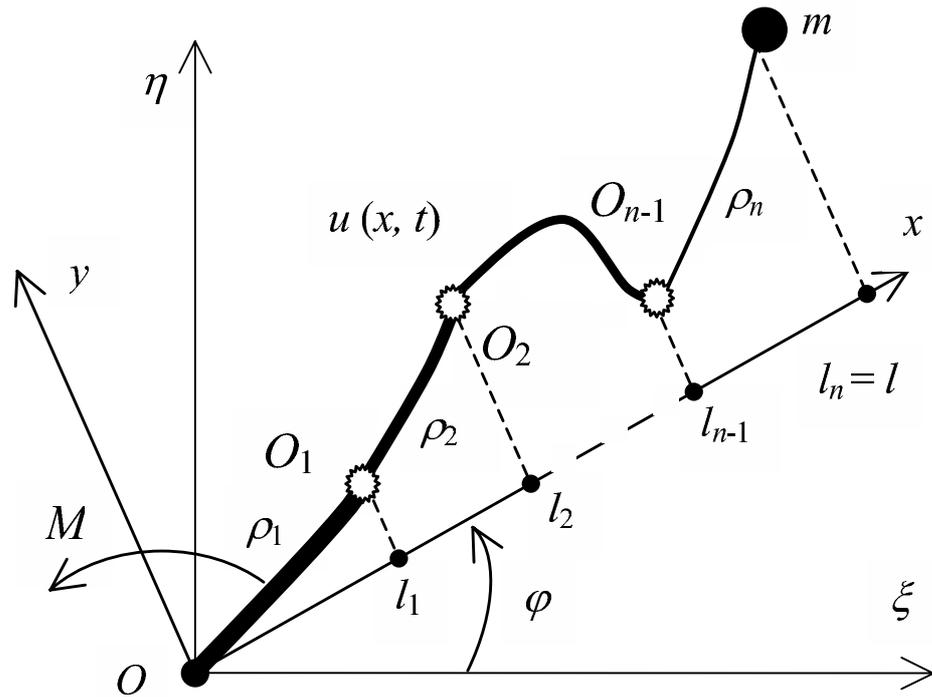


Рис. 5.2. Многозвенный манипулятор с упругими шарнирами.

Рассматриваемая система состоит из n гибких звеньев, соединенных между собой упругими шарнирами в точках O_1, \dots, O_{n-1} . В подразделе 5.1 предполагалось, что звенья манипулятора могут телескопически раздвигаться. Однако при быстрых маневрах телескопический сдвиг не используется, а нежесткую заделку соседних звеньев будем далее моделировать упругими цилиндрическими шарнирами. Вращение системы происходит вокруг неподвижной точки O , к подвижному концу манипулятора прикреплена нагрузка – твердое тело массы m . Сделаем предположение, что длина манипулятора l значительно превосходит диаметр сечения каждого звена, и что применима модель балки Эйлера – Бернулли.

Будем обозначать через $\varphi(t)$ угол поворота подвижной системы координат Oxy относительно неподвижной $O\xi\eta$. Обозначим далее через $u(x, t)$ отклонение центральной линии балки от оси Ox в точке $x \in [0, l]$.

Для заданного разбиения $0 = l_0 < l_1 < \dots < l_n = l$ отрезка $[0, l]$ смещение $u(\cdot, t)$ принадлежит классу $C^0[0, l] \cap C^4((0, l) \setminus \{l_1, \dots, l_{n-1}\})$ для всех $t \geq 0$. Функция $u(x, t)$ удовлетворяет геометрическим граничным условиям

в точке O :

$$u|_{x=0} = \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0.$$

Пренебрегая эффектами сдвиговой деформации и вращательной динамикой сечений звеньев, запишем кинетическую энергию рассматриваемой системы:

$$2T = \int_0^l \left((u\dot{\varphi})^2 + \left(x\dot{\varphi} + \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \right) \rho(x) dx + \\ + \left\{ m \left((u\dot{\varphi})^2 + \left(l\dot{\varphi} + \frac{\partial u}{\partial t} \right)^2 \right) + J \left(\dot{\varphi} + \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \right) \right)^2 \right\}_{x=l},$$

где $\rho(x)$ – масса на единичную длину звена в точке с абсциссой x , J – момент инерции тела-нагрузки относительно точки закрепления.

Потенциальная энергия U рассматриваемой механической системы имеет вид

$$2U = \int_0^l \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)^2 c^2(x) \rho(x) dx + \sum_{j=1}^{n-1} \kappa_j^2 \left(\frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l_j+0} - \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l_j-0} \right)^2,$$

где $c^2(x) = E(x)I(x)/\rho(x)$, $E(x)$ – модуль Юнга, $I(x)$ – момент инерции сечения звена, κ_j^2 – коэффициент жесткости торсионной пружины в точке O_j . В дальнейшем будем предполагать $\rho(x)$ и $c(x)$ кусочно-постоянными функциями, то есть $\rho(x) = \rho_j$, $c(x) = c_j$ при $x \in [l_{j-1}, l_j]$, $j = 1, 2, \dots, n$.

Пусть $\varphi(t)$, $u(x, t)$ определяют движение системы на заданном отрезке времени $t \in [t_1, t_2]$ под действием управляющего момента $M(t)$. Используя принцип Гамильтона – Остроградского, получаем

$$\delta \left(\int_{t_1}^{t_2} L dt \right) + \int_{t_1}^{t_2} M(t) \delta \varphi(t) dt = 0 \quad (5.120)$$

для всех вариаций $\delta \varphi(t)$, $\delta u(x, t)$, удовлетворяющих условиям

$$\delta u \in C^2 \left(((0, l) \setminus \{l_1, \dots, l_{n-1}\}) \times [t_1, t_2] \right),$$

$$\delta u(x, t_1) = \delta u(x, t_2) = 0, \quad \forall x \in [0, l],$$

$$\delta \varphi \in C^2[t_1, t_2], \quad \delta \varphi(t_1) = \delta \varphi(t_2) = 0,$$

$$\delta u|_{x=0} = \frac{\partial \delta u}{\partial x} \Big|_{x=0} = 0, \quad \delta u(\cdot, t) \in C^0[0, l], \quad \forall t \in [t_1, t_2], \quad (5.121)$$

где $L = T - U$ – лагранжиан системы.

Вариация интеграла $\int_{t_1}^{t_2} L dt$ в (5.120) вычисляется с помощью интегрирования по частям:

$$\begin{aligned} -\delta \left(\int_{t_1}^{t_2} L dt \right) - \int_{t_1}^{t_2} M \delta \varphi dt &= \int_{t_1}^{t_2} \left[\frac{d}{dt} \left(m(u^2 + l^2) \dot{\varphi} + ml \frac{\partial u}{\partial t} + J \dot{\varphi} + J \frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x} \right) \right]_{x=l} + \\ &+ \frac{d}{dt} \int_0^l \left((u^2 + x^2) \dot{\varphi} + x \frac{\partial u}{\partial t} \right) \rho dx - M \delta \varphi dt + \int_{t_1}^{t_2} \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}, u, \delta u, \ddot{\varphi}, \dot{\varphi} \right) dt = 0, \end{aligned} \quad (5.122)$$

где

$$\begin{aligned} \mu &= \int_0^l \left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + c^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} + x \ddot{\varphi} - \dot{\varphi}^2 u \right) \delta u \rho dx + m \left[\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \frac{c^2 \rho}{m} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} + l \ddot{\varphi} - \dot{\varphi}^2 u \right) \delta u \right]_{x=l} + \\ &+ J \left[\left(\frac{\partial^3 u}{\partial t^2 \partial x} + \frac{c^2 \rho}{J} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \ddot{\varphi} \right) \frac{\partial \delta u}{\partial x} \right]_{x=l} + \sum_{j=1}^{n-1} \left\{ \left[\left(c^2 \rho \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)_{x=l_j+0} - \left(c^2 \rho \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right)_{x=l_j-0} \right] \delta u|_{x=l_j} + \right. \\ &+ \left[\left(\frac{c^2 \rho}{\varkappa_j^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial u}{\partial x} \right)_{x=l_j-0} - \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l_j+0} \right] \varkappa_j^2 \frac{\partial \delta u}{\partial x} \Big|_{x=l_j-0} + \\ &+ \left. \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{c^2 \rho}{\varkappa_j^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{x=l_j+0} - \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{x=l_j-0} \right] \varkappa_j^2 \frac{\partial \delta u}{\partial x} \Big|_{x=l_j+0} \right\}. \end{aligned}$$

Для упрощения уравнений движения (5.122), введем новое управление v посредством преобразования с обратной связью:

$$\begin{aligned} v &= \left(m (u|_{x=l})^2 + \int_0^l (2x^2 + u^2) \rho dx \right)^{-1} \times \\ &\times \left(M + \left(c^2 \rho \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)_{x=0} - m \dot{\varphi} \left(2u \frac{\partial u}{\partial t} + l \dot{\varphi} u \right)_{x=l} + \dot{\varphi} \int_0^l \left(\dot{\varphi} x - 2 \frac{\partial u}{\partial t} \right) u \rho dx \right). \end{aligned} \quad (5.123)$$

Поскольку вариационная форма (5.122) должна обнуляться при всех вариациях $(\delta \varphi, \delta u)$, удовлетворяющих (5.121), то получим следующую граничную задачу:

$$\ddot{\varphi} = v, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} + c^2 \frac{\partial^4 u}{\partial x^4} = \dot{\varphi}^2 u - xv, \quad v \in \mathbb{R}, \quad x \in (0, l) \setminus \{l_1, \dots, l_{n-1}\}, \quad (5.124)$$

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} - \dot{\varphi}^2 u + lv - \frac{c_n^2 \rho_n}{m} \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right) \Big|_{x=l} = 0, \quad \left(\frac{\partial^3 u}{\partial t^2 \partial x} + v + \frac{c_n^2 \rho_n}{J} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right) \Big|_{x=l} = 0,$$

$$\begin{aligned}
u|_{x=0} = \frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=0} = 0, \quad u|_{x=l_j-0} = u|_{x=l_j+0}, \quad j = \overline{1, n-1}, \\
c_j^2 \rho_j \frac{\partial^k u}{\partial x^k}\Big|_{x=l_j-0} = c_{j+1}^2 \rho_{j+1} \frac{\partial^k u}{\partial x^k}\Big|_{x=l_j+0}, \quad k = 2, 3, \\
\frac{\partial u}{\partial x}\Big|_{x=l_j+0} = \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{c_j^2 \rho_j}{\kappa_j^2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right)\Big|_{x=l_j-0}. \tag{5.125}
\end{aligned}$$

Для случая модели манипулятора без твердого тела – нагрузки, аналогичная система уравнений динамики последовательно связанных балок рассматривалась в работе [96].

Нашей целью является построение управления с обратной связью

$$v = \gamma \left(\varphi, \dot{\varphi}, u, \frac{\partial u}{\partial t} \right),$$

которое обеспечивало бы асимптотическую устойчивость положения равновесия $\varphi = 0$, $\dot{\varphi} = 0$, $u = \frac{\partial u}{\partial t} = 0$ для аппроксимации граничной задачи (5.124)-(5.125) с произвольным числом мод упругих колебаний.

5.7.2 Собственные функции однородной задачи

Для получения приближенных уравнений движения, проведем разделение переменных, то есть подставим функции

$$u(x, t) = \psi(x)q(t), \quad \varphi(t) = \text{const}, \quad v(t) = 0 \tag{5.126}$$

в граничную задачу (5.124)-(5.125). В результате получим

$$q(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t),$$

$$\psi(x) = C_{j1} \sin(\eta_j x) + C_{j2} \cos(\eta_j x) + C_{j3} \sinh(\eta_j x) + C_{j4} \cosh(\eta_j x), \tag{5.127}$$

$$x \in [l_{j-1}, l_j), \quad \eta_j^2 c_j = \omega, \quad j = \overline{1, n},$$

где константы интегрирования C_{ji} определяются из граничных условий (5.125), что приводит к следующей системе линейных однородных уравнений:

$$M(\omega, P) (C_{11}, \dots, C_{14}, \dots, C_{n1}, \dots, C_{n4})^T = 0. \tag{5.128}$$

Здесь $M(\omega, P)$ – матрица размера $4n \times 4n$ с коэффициентами, зависящими от параметров ω и $P = (m, J, n, l_j, \rho_j, c_j, \varkappa_j)$.

Для фиксированного P система (5.128) допускает нетривиальное решение только в том случае, если ω удовлетворяет характеристическому уравнению $\det M(\omega, P) = 0$. В этом случае будем называть значение ω собственной частотой системы. Если ω – собственная частота и коэффициенты $(C_{ji}) \neq 0$ удовлетворяют линейному однородному уравнению (5.128), то функцию $\psi(x)$ в (5.127) будем называть формой, соответствующей ω .

Лемма 5.4. [5] Пусть ψ_1 и ψ_2 – собственные формы, соответствующие значениям $\omega_1 \neq \omega_2$. Тогда ψ_1 и ψ_2 ортогональны по отношению к следующей билинейной форме

$$\langle \psi_1, \psi_2 \rangle_X = \int_0^l \psi_1 \psi_2 \rho dx + m \psi_1(l) \psi_2(l) + J \psi_1'(l) \psi_2'(l).$$

Доказательство. Справедливость леммы проверяется интегрированием по частям выражения $\int_0^l \psi_1 \psi_2 \rho dx$ с учетом граничных условий в точках $x = l_j$.

Чтобы проиллюстрировать вид собственных форм колебаний (5.127), вычислим несколько решений ω_k характеристического уравнения с помощью компьютерной программы Maple для следующих значений параметров:

$$n = 2, l_1 = \frac{l_2}{2} = c_1 = c_2 = \rho_1 = \rho_2 = \frac{\varkappa_1^2}{2} = m = J = 1. \quad (5.129)$$

Имеем:

$$\omega_1 = 0.3875771806, \omega_2 = 1.455554174, \omega_3 = 5.629214811, \omega_4 = 16.22789077.$$

Соответствующие формы ψ показаны на рис. 5.3. Формы нормализованы так, чтобы выполнялось условие $\langle \psi_i, \psi_k \rangle_X = \delta_{ik}$ при всех $1 \leq i \leq j \leq 4$.

Замечание. Легко видеть, что производные $\psi'_k(x)$ терпят разрыв в точке $x = l_1$. Таким образом, формы ψ_k не являются элементами пространства Соболева $H^2(0, l)$, в отличие от случая одиночной балки Эйлера–Бернулли с непрерывной плотностью.

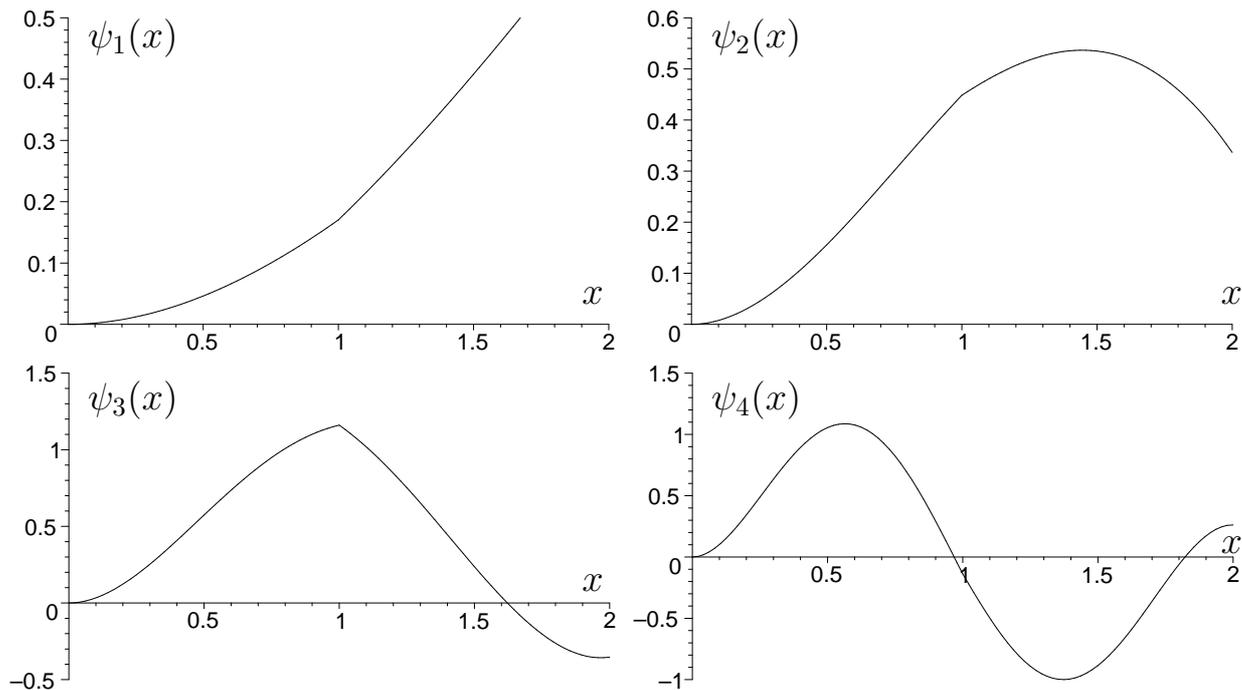


Рис. 5.3. Формы $\psi_k(x)$ при $k \leq 4$.

5.7.3 Приближенная модель

Пусть $(\psi_1(\cdot), \dots, \psi_N(\cdot))$ – формы, соответствующие собственным частотам

$$\omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_N.$$

С целью построения приближенной по Галеркину системы обыкновенных дифференциальных уравнений для граничной задачи (5.124)-(5.125) заменим функции $u(\cdot, t)$ и $\delta u(\cdot, t)$ элементами конечномерного пространства

$$\mathcal{S}_N = \text{span}\{\psi_1(\cdot), \dots, \psi_N(\cdot)\}.$$

в вариационной форме (5.122).

Следуя общей схеме метода Галеркина (см. [182]), нужно определить $\varphi(t)$ и $u_N(\cdot, t) \in \mathcal{S}_N$, которые удовлетворяют равенству (5.122) при всех $\delta\varphi(t)$ и $\delta u_N(\cdot, t) \in \mathcal{S}_N$. Пусть $(q_1(t), \dots, q_N(t))$ – координаты элемента $u_N(\cdot, t)$ в базисе $(\psi_1(\cdot), \dots, \psi_N(\cdot))$, т.е.

$$u_N(x, t) = \sum_{k=1}^N \psi_k(x) q_k(t). \quad (5.130)$$

Заметим, что функции $(\psi_1(\cdot), \dots, \psi_N(\cdot))$ образуют базис в \mathcal{S}_N вследствие леммы 5.4 и предположения $\omega_i \neq \omega_k$ при $i \neq k$. Подставляя u_N в (5.122) и используя лемму 5.4, получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \ddot{\varphi} &= v, \quad v \in \mathbb{R}, \\ \ddot{q}_k &= -\omega_k^2 q_k + \left(q_k - \sum_{p=1}^N a_{kp} q_p \right) \dot{\varphi}^2 - b_k v, \quad k = 1, 2, \dots, N, \end{aligned} \quad (5.131)$$

где $(\varphi, \dot{\varphi}, q_1, \dot{q}_1, \dots, q_N, \dot{q}_N)$ – фазовый вектор, v – управление,

$$a_{kp} = \frac{J\psi'_k(l)\psi'_p(l)}{\|\psi_k\|_X^2}, \quad b_k = \frac{\langle x, \psi_k \rangle_X}{\|\psi_k\|_X^2}, \quad \|\psi_k\|_X^2 = \langle \psi_k, \psi_k \rangle_X.$$

Если для системы приближения по Галеркину (5.131) построен закон управления $v(t)$, то исходный управляющий момент $M(t)$ может быть приближенно вычислен с помощью подстановки $u = u_N(x, t)$ в преобразование (6.12). Вопрос о точности и сходимости решений приближенной системы (5.131) не исследуется в диссертационной работе.

5.7.4 Стабилизация положения равновесия

Теорема 5.4. [5] Пусть (ψ_1, \dots, ψ_N) – формы, соответствующие собственным частотам $\omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_N$, и пусть $\omega_1 > 0$. Тогда существует гладкое управление с обратной связью вида $v = \gamma(\varphi, \dot{\varphi}, q_1, \dot{q}_1, \dots, q_N, \dot{q}_N)$, которое обеспечивает глобальную асимптотическую устойчивость положенная равновесия системы (5.131).

Доказательство. Рассмотрим функцию типа Ляпунова для (5.131):

$$\begin{aligned} 2V_N(\varphi, \dot{\varphi}, \dots, q_N, \dot{q}_N) &= k_1 \varphi^2 + k_2 \dot{\varphi}^2 + \sum_{j=1}^N \omega_j^2 \|\psi_j\|_X^2 q_j^2 + \sum_{j=1}^N \|\psi_j\|_X^2 \dot{q}_j^2 + \\ &\quad + 2\dot{\varphi} \sum_{j=1}^N \langle x, \psi_j \rangle_X \dot{q}_j + \\ &\quad + \left(\|x\|_X^2 + \sum_{j=1}^N \|\psi_j\|_X^2 q_j^2 - J \left(\sum_{j=1}^N \psi'_j(l) q_j \right)^2 \right) \dot{\varphi}^2, \quad (k_1 > 0, k_2 > 0). \end{aligned}$$

Для доказательства положительной определенности V_N , запишем ее квадратичную часть Q_N следующим образом:

$$2Q_N = k_1\varphi^2 + k_2\dot{\varphi}^2 + \left\| \frac{\partial u_N}{\partial t} + \dot{\varphi}x \right\|_X^2 + \sum_{j=1}^N \omega_j^2 \|\psi_j\|_X^2 q_j^2, \quad (5.132)$$

где u_N задается выражением (5.130). Имеем

$$V_N = Q_N + \frac{\dot{\varphi}^2}{2} \left[\int_0^l \left(\sum_{j=1}^N \psi_j(x) q_j \right)^2 \rho dx + m \left(\sum_{j=1}^N \psi_j(l) q_j \right)^2 \right]. \quad (5.133)$$

Из формулы (5.132) следует, что $Q_N \geq 0$, при этом Q_N обращается в нуль только при выполнении условий

$$\varphi = \dot{\varphi} = q_1 = \dots = q_N = 0, \quad \left\| \sum_{j=1}^N \psi_j \dot{q}_j \right\|_X = 0.$$

Из приведенных условий следует $\dot{q}_1 = \dots = \dot{q}_N = 0$, ибо функции (ψ_1, \dots, ψ_N) линейно-независимы на $[0, l]$. Следовательно, квадратичная форма Q_N определена положительно. Отсюда с учетом (5.133) следует положительная определенность V_N и компактность множеств

$$L_c = \{(\varphi, \dot{\varphi}, q_1, \dot{q}_1, \dots, q_N, \dot{q}_N) \in \mathbb{R}^{2N+2} \mid V_N \leq c\}$$

при всех константах $c > 0$. Производная V_N в силу (5.131) имеет вид

$$\dot{V}_N = (\alpha_N + \beta_N v) \dot{\varphi},$$

где

$$\begin{aligned} \alpha_N &= k_1\varphi + \sum_{j=1}^N (2\|\psi_j\|_X^2 \dot{\varphi} \dot{q}_j + \langle x, \psi_j \rangle_X (\dot{\varphi}^2 - \omega_j^2)) q_j - \\ &\quad - J \dot{\varphi} \left(\sum_{j=1}^N \psi'_j(l) q_j \right) \left(\sum_{j=1}^N \psi'_j(l) \left(2\dot{q}_j + \frac{\langle x, \psi_j \rangle_X}{\|\psi_j\|_X^2} \dot{\varphi} \right) \right), \\ \beta_N &= k_2 + \|x\|_X^2 - J \left(\sum_{j=1}^N \psi'_j(l) q_j \right)^2 + \sum_{j=1}^N \left(\|\psi_j\|_X^2 q_j^2 - \frac{\langle x, \psi_j \rangle_X^2}{\|\psi_j\|_X^2} \right) > 0. \end{aligned}$$

Определим управление с обратной связью $v = \gamma(\varphi, \dot{\varphi}, \dots, q_N, \dot{q}_N)$ посредством выражения

$$\gamma(\varphi, \dot{\varphi}, q_1, \dot{q}_1, \dots, q_N, \dot{q}_N) = -\frac{\alpha_N + h\dot{\varphi}}{\beta_N}, \quad (5.134)$$

где $h > 0$ – константа. Отсюда следует $\dot{V}_N = -h\dot{\varphi}^2 \leq 0$ в силу замкнутой системы (5.131), (5.134).

Нетрудно видеть, что всякая целая полутраектория замкнутой системы на множестве

$$Z_0 = \{(\varphi, \dot{\varphi}, q_1, \dot{q}_1, \dots, q_N, \dot{q}_N) \in \mathbb{R}^{2N+2} \mid \dot{V}_N = 0\}$$

удовлетворяет следующим соотношениям:

$$\varphi(t) = \varphi_0 = \text{const},$$

$$q_k(t) = A_k \cos(\omega_k t) + B_k \sin(\omega_k t), \quad k = 1, 2, \dots, N,$$

$$k_1 \varphi_0 = \sum_{j=1}^N \langle x, \psi_j \rangle \omega_j^2 q_j(t), \quad \forall t \geq 0.$$

Из приведенных выше соотношений следует $\varphi_0 = A_1 = B_1 = \dots = B_N = 0$ в силу линейной независимости функций $(\cos(\omega_1 t), \dots, \sin(\omega_N t))$ на \mathbb{R}^+ , а также $\langle x, \psi_j \rangle_X \omega_j \neq 0$ при сделанных предположениях. Следовательно, единственной полутраекторией замкнутой системы на множестве Z_0 является начало координат. Поэтому замкнутая система (5.131), (5.134) глобально асимптотически устойчива на основании теоремы Барбашина – Красовского [136], что и требовалось доказать.

5.7.5 Задача наблюдаемости

Для реализации обратной связи (5.134) на практике необходимо решить задачу наблюдения полного вектора состояния системы (5.131) по имеющейся информации измерений. Будем предполагать, что доступны показания датчика, который измеряет значения $\left. \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \right|_{x=\Delta}$ в определенной точке балки с координатой $x = \Delta$ ($0 \leq \Delta \leq l_1$). Такой датчик может быть реализован с

помощью пьезоэлектрической пленки, присоединенной к балке вблизи точки с координатой $x = \Delta$ (см. [101, 102]). При этом заряд, возникающий в пьезоэлементе вследствие деформации балки, приближенно пропорционален $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \Big|_{x=\Delta}$. Поэтому в дальнейшем будем предполагать, что измеряется следующий выход системы (5.131):

$$y_1(t) = \frac{\partial^2 u_N(x, t)}{\partial x^2} \Big|_{x=\Delta} = \sum_{k=1}^N \psi_k''(\Delta) q_k(t), \quad y_2(t) = \varphi(t). \quad (5.135)$$

Для случая $\Delta = 0$ стабилизируемость однородной балки без нагрузки по отношению к выходу (5.135) доказана в работе [102]. Ниже доказаны условия наблюдаемости системы с нагрузкой (5.131) относительно выхода (5.135) без предположения $\Delta = 0$.

Лемма 5.5. [5] *Предположим, что $\psi_k''(\Delta) \neq 0$ при всех $k = \overline{1, N}$, и что*

$$\omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_N.$$

Тогда система линейного приближения, построенная для (5.131) в окрестности нуля, наблюдаема по отношению к выходу (5.135).

Доказательство. При выполнении условий $\psi_1''(\Delta) \neq 0, \dots, \psi_N''(\Delta) \neq 0$, $\omega_1 < \omega_2 < \dots < \omega_N$, матрица наблюдаемости для линеаризованной системы (5.131) с выходом (5.135) имеет полный ранг, откуда следует утверждение леммы на основании рангового условия наблюдаемости Калмана [175, с. 122], [147, с. 88].

5.7.6 Численное моделирование

Ниже приведены результаты численного интегрирования системы (5.131) с законом управления (5.134) в случае $N = 2$.

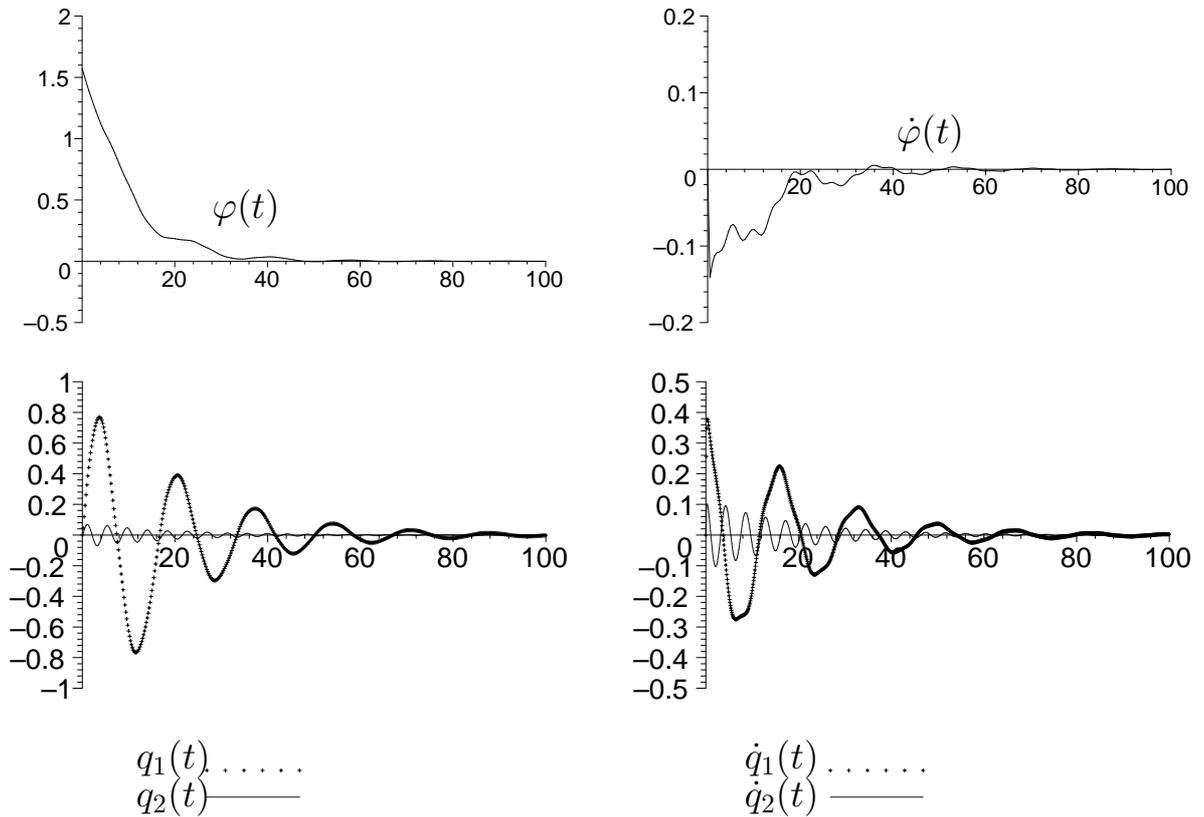


Рис. 5.4. Решение системы (5.131), (5.134).

Рис. 5.4 иллюстрирует решение задачи Коши с начальными условиями

$$\varphi(0) = \frac{\pi}{2}, \quad \dot{\varphi}(0) = q_1(0) = q_2(0) = \dot{q}_1(0) = \dot{q}_2(0) = 0.$$

При этом механические параметры заданы соотношениями (5.129), а константы управления выбраны такими: $h = 10$, $k_1 = k_2 = 1$.

Из рис. 5.4 видно, что предложенный закон управления (5.134) обеспечивает сходимость к нулю решения системы (5.131).

5.8 Выводы

С использованием вариационного принципа Гамильтона – Остроградского в данном разделе выведены интегро-дифференциальные уравнения (5.17)-(5.28), которые описывают пространственное движение многозвенного робота - манипулятора, состоящего из нескольких упругих звеньев и твердых тел. Получены условия на управляющие воздействия (5.33), (5.34), при которых реализуется положение равновесия (5.29). Исследована задача стабильности.

лизации положения равновесия в бесконечномерной и конечномерной постановках. Выделим основные результаты этого исследования.

1. Для модели манипулятора с одним звеном предложено сведение гибридной системы интегро-дифференциальных уравнений с частными производными (5.35)–(5.43) к системе двух дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве (5.52) и (5.53). Уравнения (5.52) и (5.53) описывают колебания балки в окрестности положения равновесия в горизонтальном и вертикальном направлениях, соответственно.
2. Для каждого из дифференциальных уравнений (5.52) и (5.53) предложено управление с обратной связью, которое обеспечивает устойчивость по Ляпунову невозмущенного движения в гильбертовом пространстве (теорема 5.1). С использованием серии технических оценок доказана предкомпактность полутраекторий таких систем, что сводит анализ предельных множеств к исследованию инвариантных подмножеств на поверхностях уровня функционала Ляпунова (теорема 5.2 и следствие из нее). Доказана асимптотическая устойчивость невозмущенного решения системы, которая описывает вертикальные колебания манипулятора с управлением в виде обратной связи (теорема 5.3).
3. В подразделе 5.7 рассмотрена модель манипулятора, у которого соседние звенья соединены упругими шарнирами. Для уравнений движения, полученных с помощью принципа Гамильтона – Остроградского, построена приближенная по Галеркину система нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений (5.131), которая соответствует произвольному выбранному числу N мод упругих колебаний. Решена задача стабилизации положения равновесия приближенной по Галеркину системы с помощью обратной связи по состоянию (5.134) (теорема 5.4).
4. Доказана лемма 5.5, которая обосновывает возможность применения управления с обратной связью (5.134) для стабилизации в линейном

случае. Действительно, при выполнении предположений леммы 5.5 существует система-наблюдатель для линейного приближения уравнений (5.131) (см. [147, с. 96]). Вопросы построения системы-наблюдателя рассмотрены в следующем разделе для модели балки Тимошенко.

5. Приведены результаты численного интегрирования приближенной по Галеркину системы (5.131) с двумя модами колебаний при использовании обратной связи по состоянию (5.134). Данные вычислений подтверждают, что предложенный способ управления обеспечивает достаточно быстрое затухание решений уравнений возмущенного движения.

Основные результаты раздела содержатся в статьях [5, 6, 22, 23, 24] и дополнительно отражены в публикациях [29, 41].

6 Управление моделью манипулятора в виде балки Тимошенко

Вопросам динамики и управления роботами-манипуляторами со звеньями в виде упругих балок посвящены монографии [83, 85, 86] и многочисленные статьи.

В частности, задачи управления моделью балки Тимошенко исследовались в статьях [62, 65, 111, 112, 113, 183]. Однако, во всех этих работах были рассмотрены балки со свободным концом без влияния силы тяжести. В данном разделе в рамках балочной теории Тимошенко исследуется более сложная модель манипуляционного робота с учетом движения нагрузки как твердого тела в поле силы тяжести.

6.1 Описание модели

На рис. 6.1 изображена схема манипулятора, который состоит из твердого тела Ω_0 (ступицы), упругой балки длины l и твердого тела Ω_1 (несомой нагрузки).

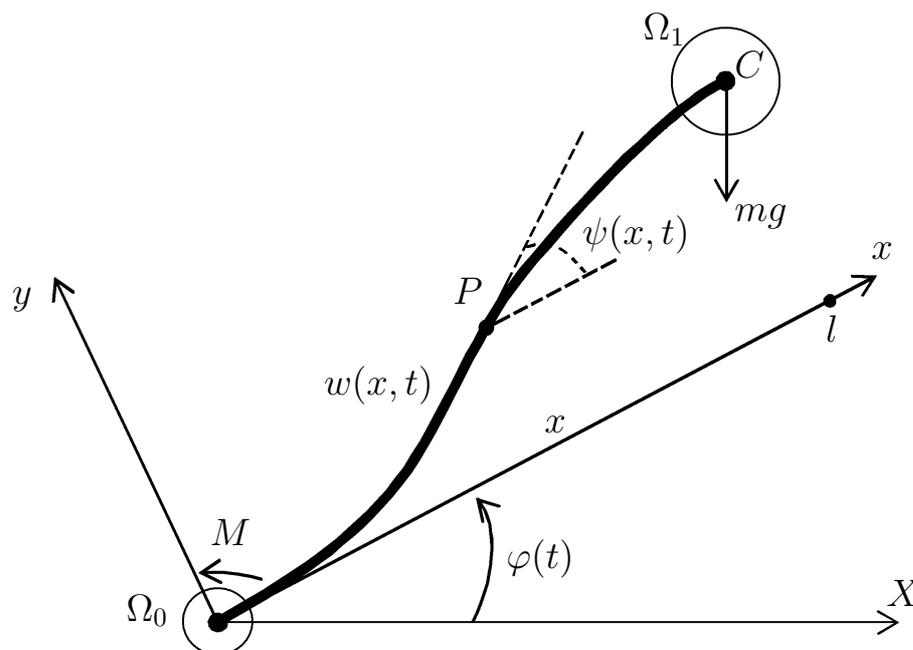


Рис. 6.1. Манипулятор в виде балки Тимошенко.

Рассматриваемая механическая система совершает вращение в вертикальной плоскости вокруг неподвижной точки O под действием управляющего момента M , приложенного к телу Ω_0 . С твердым телом Ω_0 связана декартова система координат Oxy . Ориентация тела Ω_0 в момент времени t определяется углом $\varphi(t)$ между неподвижной горизонтальной осью OX и подвижной осью Ox . Будем предполагать, что балка одним из своих концов жестко заделана в точке O тела Ω_0 , а другой конец балки жестко заделан в центре масс C тела Ω_1 . Предположим, что в недеформированном состоянии линия прогибов балки совпадает с отрезком $[0, l]$ на оси Ox . Рассмотрим точку P балки с лагранжевой координатой x , $0 \leq x \leq l$. Таким образом, координаты точки P в системе координат Oxy для момента времени t можно записать в виде $(x + s(x, t), w(x, t))$, где функции $w(x, t)$ и $s(x, t)$ описывают, соответственно, поперечные и продольные компоненты перемещения балки. Следуя теории С.П. Тимошенко [2, с. 56], введем угол $\psi(x, t)$ для описания поворота элемента балки относительно направления оси Ox . Таким образом, конфигурация модели в момент времени $t \geq 0$ определяется функциями $\varphi(t)$, $w(x, t)$, $\psi(x, t)$, $0 \leq x \leq l$.

Запишем выражение для кинетической энергии рассматриваемой механической системы [19]:

$$\begin{aligned}
 2T = & \int_0^l \left\{ \rho(x) [(\dot{w} + x\dot{\varphi})^2 + (w\dot{\varphi})^2 + \dot{s}^2 + 2\dot{\varphi}(\dot{w}s - \dot{s}w) + (\dot{\varphi})^2(s + 2x)s] + I_\rho(x)(\dot{\varphi} + \dot{\psi})^2 \right\} dx + \\
 & + J_0(\dot{\varphi})^2 + m \left\{ (\dot{w} + x\dot{\varphi})^2 + (w\dot{\varphi})^2 + \dot{s}^2 + 2\dot{\varphi}(\dot{w}s - \dot{s}w) + (\dot{\varphi})^2(s + 2x)s \right\} \Big|_{x=l} + \\
 & + J_c \left\{ \dot{\varphi} + \dot{\psi} \right\}^2 \Big|_{x=l}, \tag{6.1}
 \end{aligned}$$

где $\rho(x)$ — линейная плотность (масса на единицу длины) балки, $I_\rho(x)$ — массовый момент инерции поперечного сечения балки, J_0 — момент инерции твердого тела Ω_0 (ступицы) относительно точки O , m — масса твердого тела Ω_1 (нагрузки), J_c — момент инерции тела Ω_1 относительно его центра масс C . Здесь и далее точкой обозначена операция дифференцирования по

времени t , а штрихом — операция дифференцирования по пространственной координате x .

Будем предполагать, что балка является нерастяжимой, тогда при малых деформациях выполнено соотношение (см. напр. [105]):

$$s' = -\frac{1}{2}w'^2 + o(w'^2).$$

Интегрирование этого соотношения, с точностью до членов более высокого порядка малости, приводит к следующей формуле:

$$s(x, t) = -\frac{1}{2} \int_0^x w'^2(\xi, t) d\xi. \quad (6.2)$$

Будем предполагать малость деформаций балки и отбросим члены порядка малости 2 и выше по отношению к w при выводе уравнений движения.

Следуя модели С.П. Тимошенко [2, с. 56], [105, с. 1142], с использованием формулы (6.1) и (6.2) получим выражение для лагранжиана рассматриваемой механической системы [19]:

$$\begin{aligned} 2L = & \int_0^l \left\{ \rho(x) ((\dot{w} + x\dot{\varphi})^2 + \dot{\varphi}^2 w^2) - \rho_2(x) \dot{\varphi}^2 w'^2 + \right. \\ & \left. + I_\rho (\dot{\varphi} + \dot{\psi})^2 - K(\psi - w')^2 - EI(\psi')^2 \right\} dx + \\ & + m \left\{ \dot{\varphi}^2 w^2(l, t) + (l\dot{\varphi} + \dot{w}(l, t))^2 \right\} + J_c \left\{ \dot{\varphi} + \dot{\psi}(l, t) \right\}^2 + J_0 \dot{\varphi}^2 - \\ & - g \int_0^l \left\{ (2\rho x - \rho_1 w'^2) \sin \varphi + 2\rho w \cos \varphi \right\} dx - 2mg \left\{ l \sin \varphi + w(l, t) \cos \varphi \right\}, \end{aligned} \quad (6.3)$$

где

$$\rho_1(x) = \int_x^l \rho(\xi) d\xi + m, \quad \rho_2(x) = \int_x^l \xi \rho(\xi) d\xi + ml.$$

Здесь величины E и I обозначают модуль Юнга и момент инерции поперечного сечения балки, соответственно, g — ускорение свободного падения. Коэффициент K равен γGA , где G — модуль упругости на изгиб, A — площадь сечения балки, γ — константа, характеризующая геометрию сечения балки. Будем предполагать, что ρ , I_ρ , EI , K суть положительные дифференцируемые функции пространственной переменной x .

Если при воздействии управляющего момента $M(t)$ движение рассматриваемой механической системы на отрезке $t \in [t_1, t_2]$ определяется C^2 -функциями $(\varphi(t), w(x, t), \psi(x, t))$, то согласно принципу Гамильтона – Остроградского [60, с. 44] выполнено равенство

$$\delta \left(\int_{t_1}^{t_2} L dt \right) + \int_{t_1}^{t_2} M(t) \delta \varphi(t) dt = 0, \quad (6.4)$$

для всех допустимых вариаций $(\delta \varphi(t), \delta w(x, t), \delta \psi(x, t))$, удовлетворяющих граничным условиям

$$\begin{aligned} \delta \varphi|_{t=t_1} = \delta \varphi|_{t=t_2} = 0, \quad \delta w|_{t=t_1} = \delta w|_{t=t_2} = 0, \quad \delta \psi|_{t=t_1} = \delta \psi|_{t=t_2} = 0, \\ \delta w|_{x=0} = 0, \quad \delta \psi|_{x=0} = 0. \end{aligned} \quad (6.5)$$

Вычисляя первую вариацию функционала в формуле (6.4) и выполняя интегрирование по частям, получим

$$\int_{t_1}^{t_2} \left\{ \left(M + \frac{\partial L}{\partial \varphi} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} \right) \delta \varphi(t) - \mu(\delta w(\cdot, t), \delta \psi(\cdot, t); \varphi, w, \psi) \right\} dt = 0, \quad (6.6)$$

где μ – линейный функционал относительно δw и $\delta \psi$:

$$\begin{aligned} \mu(\delta w(\cdot, t), \delta \psi(\cdot, t); \varphi, w, \psi) = \\ = \int_0^l \delta w(x, t) \{ (\ddot{w} + x\ddot{\varphi} - (\dot{\varphi})^2 w + g \cos \varphi) \rho + \\ + (K(\psi - w') + (g\rho_1 \sin \varphi - (\dot{\varphi})^2 \rho_2) w')' \} dx + \\ + \int_0^l \delta \psi(x, t) \{ I_\rho(\ddot{\psi} + \ddot{\varphi}) + K(\psi - w') - (EI\psi')' \} dx + \\ + \delta \psi(l, t) \{ J_c(\ddot{\varphi} + \ddot{\psi}) + EI\psi' \} \Big|_{x=l} + \\ + \delta w(l, t) \{ K(w' - \psi) + m(\ddot{w} + l\ddot{\varphi} - (\dot{\varphi})^2 w + g \cos \varphi) + \\ + m(l(\dot{\varphi})^2 - g \sin \varphi) w' \} \Big|_{x=l}. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Поскольку выражение (6.6) равно нулю при всех допустимых вариациях, удовлетворяющих условиям (6.5), то из (6.6) получаем следующую систему уравнений движения манипулятора [19]:

$$\begin{aligned}
\ddot{w} + \frac{1}{\rho} (K(\psi - w'))' &= -g \cos \varphi - x\ddot{\varphi} + \dot{\varphi}^2 w + \frac{1}{\rho} ((\rho_2 \dot{\varphi}^2 - g\rho_1 \sin \varphi)w')'; \\
\ddot{\psi} + \frac{K}{I_\rho}(\psi - w') - \frac{1}{I_\rho}(EI\psi')' &= -\ddot{\varphi}, \quad x \in (0, l); \\
w|_{x=0} = \psi|_{x=0} &= 0; \\
K(\psi - w')|_{x=l} &= m \{ \ddot{w} + l\ddot{\varphi} - \dot{\varphi}^2 w + g \cos \varphi + (l\dot{\varphi}^2 - g \sin \varphi)w' \}|_{x=l}; \\
-EI\psi'|_{x=l} &= J_c(\ddot{\varphi} + \ddot{\psi}|_{x=l}), \\
M(t) &= \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} = \\
&= \left\{ J_c + J_0 + m[l^2 + w^2(l, t)] + \int_0^l [I_\rho + (x^2 + w^2)\rho - \rho_2 w'^2] dx \right\} \ddot{\varphi} + \\
&+ \int_0^l (\rho x \ddot{w} + I_\rho \ddot{\psi} + 2\rho w \dot{\varphi} \dot{w} - 2\rho_2 w' \dot{\varphi} \dot{w}') dx + m(l\ddot{w} + 2w\dot{\varphi} \dot{w})|_{x=l} + J_c \ddot{\psi}|_{x=l} + \\
&+ g \left\{ \int_0^l \left(\rho x - \frac{1}{2} \rho_1 w'^2 \right) dx + ml \right\} \cos \varphi - g \left\{ \int_0^l \rho w dx + m w(l, t) \right\} \sin \varphi.
\end{aligned} \tag{6.8}$$

Отметим, что дифференциальные уравнения поперечных колебаний балки Тимошенко использованы в работе [7] для моделирования движения манипулятора в частном случае $J_0 = 0$ (без учета влияния твердого тела Ω_0). В статье [7] рассмотрены также граничные условия, соответствующие закреплению конца балки в произвольной точке тела Ω_1 .

Непосредственной подстановкой убеждаемся, что краевая задача (6.8) имеет частное решение

$$\varphi(t) = \varphi_0, \quad w(x, t) = w_0(x), \quad \psi(x, t) = \psi_0(x), \quad M(t) = M_0 \tag{6.9}$$

при выполнении условий

$$(K(w'_0(x) - \psi_0(x)))' = g \left\{ \rho \cos \varphi_0 + (\rho_1 w'_0)' \sin \varphi_0 \right\};$$

$$(EI\psi_0'(x))' + K(w_0'(x) - \psi_0(x)) = 0, \quad x \in (0, l);$$

$$w_0(0) = \psi_0(0) = 0; \quad \psi_0'(l) = 0; \quad K(\psi_0(l) - w_0'(l)) = mg(\cos \varphi_0 - w_0'(l) \sin \varphi_0);$$

$$\frac{M_0}{g} = \left(\int_0^l \left(\rho x - \frac{1}{2} \rho_1 w_0'^2 \right) dx + ml \right) \cos \varphi_0 - \left(\int_0^l \rho w_0 dx + m w_0(l) \right) \sin \varphi_0. \quad (6.10)$$

Приведенное решение (6.9) соответствует положению равновесия рассматриваемого манипулятора. Цель дальнейших исследований раздела 6 состоит в построении конечномерной редуцированной системы для краевой задачи (6.8) в окрестности положения равновесия (6.9) и решении задач управляемости и стабилизации.

6.2 Уравнения возмущенного движения

Пусть (φ_0, w_0, ψ_0) – решение системы (6.10) с некоторым моментом M_0 . Подставляя

$$\varphi = \varphi_0 + \tilde{\varphi}, \quad w = w_0 + \tilde{w}, \quad \psi = \psi_0 + \tilde{\psi}, \quad M = M_0 + \tilde{M}$$

в динамические уравнения (6.8), получим следующую краевую задачу:

$$\ddot{\tilde{\varphi}} = v;$$

$$\ddot{\tilde{w}} + \frac{1}{\rho} \left(K(\tilde{\psi} - \tilde{w}') \right)' = -xv + g\tilde{\varphi} \sin \varphi_0 - \frac{g}{\rho} \left((\tilde{w}' \sin \varphi_0 + \tilde{\varphi} w_0' \cos \varphi_0) \rho_1 \right)' + \dots;$$

$$I_\rho \ddot{\tilde{\psi}} + K(\tilde{\psi} - \tilde{w}') - (EI\tilde{\psi}')' = -I_\rho v;$$

$$\tilde{w}|_{x=0} = \tilde{\psi}|_{x=0} = 0;$$

$$\left(\frac{K}{m} (\tilde{w}' - \tilde{\psi}) + \ddot{\tilde{w}} - g(\sin \varphi_0 + w_0' \cos \varphi_0) \tilde{\varphi} - g\tilde{w}' \sin \varphi_0 + \dots \right) \Big|_{x=l} = -lv;$$

$$(EI\tilde{\psi}' + J_c \ddot{\tilde{\psi}}) \Big|_{x=l} = -J_c v, \quad (6.11)$$

где

$$v = \left(J_0 + \int_0^l [(w_0)^2 \rho - (w_0')^2 \rho_2] dx + m w_0^2(l) \right)^{-1} \times$$

$$\begin{aligned}
& \times \left\{ \tilde{M} + g \left(\int_0^l [(\rho w_0 - \rho_1 w'_0) \cos \varphi_0 - \frac{1}{2} \rho_1 (w'_0)^2 \sin \varphi_0] dx + m w_0(l) \cos \varphi_0 \right) \tilde{\varphi} + \right. \\
& \left. + g \int_0^l [(w'_0 \cos \varphi_0 - \sin \varphi_0) \rho_1 \tilde{w}' + \rho \tilde{w} \sin \varphi_0] dx + m g \tilde{w}(l, t) - EI \tilde{\psi}'(0, t) \right\} + \dots .
\end{aligned} \tag{6.12}$$

Здесь и далее многоточием обозначены члены порядка малости 2 и выше относительно $\tilde{\varphi}$, \tilde{w} , $\tilde{\psi}$ и их производных.

Поскольку для каждого состояния системы

$$(\tilde{\varphi}(t), \dot{\tilde{\varphi}}(t), \tilde{w}(\cdot, t), \dot{\tilde{w}}(\cdot, t), \tilde{\psi}(\cdot, t), \dot{\tilde{\psi}}(\cdot, t))$$

имеется взаимно-однозначное соответствие между значениями M и v , будем считать v управляющим параметром в (6.11), который может принимать любые вещественные значения.

Разделение переменных. Для построения конечномерных аппроксимаций динамических уравнений, рассмотрим частные решения линеаризованной краевой задачи (6.11) следующего вида:

$$\tilde{\varphi} = 0, \quad v = 0, \quad \tilde{w}(x, t) = \bar{w}(x)q(t), \quad \tilde{\psi}(x, t) = \bar{\psi}(x)q(t).$$

Подстановка таких соотношений в линеаризованные уравнения (6.11) дает соотношение $\ddot{q}(t) = -\lambda q(t)$ вместе со следующей задачей Штурма – Ливилля:

$$\begin{aligned}
& (K(\bar{\psi} - \bar{w}') + g\rho_1 \bar{w}' \sin \varphi_0)' - \lambda \rho \bar{w} = 0, \\
& K(\bar{\psi} - \bar{w}') - (EI \bar{\psi}')' - \lambda I_\rho \bar{\psi} = 0, \quad x \in (0, l), \\
& \bar{w}(0) = 0, \quad \bar{\psi}(0) = 0, \\
& K(\bar{w}'(l) - \bar{\psi}(l)) - mg \bar{w}'(l) \sin \varphi_0 - m \lambda \bar{w}(l) = 0, \\
& EI \bar{\psi}'(l) - \lambda J_c \bar{\psi}(l) = 0,
\end{aligned} \tag{6.13}$$

где λ – скалярный параметр.

Для вывода уравнений движения манипулятора с модальными координатами проведем исследования задачи (6.13).

6.3 Свойства собственных значений задачи Штурма – Лиувилля

В данном подразделе исследуются свойства собственных значений и собственных функций задачи Штурма – Лиувилля (6.13) для описания колебаний рассматриваемой механической системы с упругой балкой Тимошенко.

Определим

$$\mathcal{H} = \left\{ \begin{pmatrix} \bar{w} \\ \bar{\psi} \end{pmatrix} : \bar{w} \in H^1[0, l], \bar{\psi} \in H^1[0, l], \bar{w}(0) = \bar{\psi}(0) = 0 \right\},$$

где $H^1[0, l]$ – пространство Соболева. Рассмотрим следующую симметричную билинейную форму в \mathcal{H} :

$$\left\langle \begin{matrix} w_1 & w_2 \\ \psi_1 & \psi_2 \end{matrix} \right\rangle_{\mathcal{H}} = \int_0^l (\rho w_1 w_2 + I_{\rho} \psi_1 \psi_2) dx + m w_1(l) w_2(l) + J_c \psi_1(l) \psi_2(l). \quad (6.14)$$

Из приведенного определения непосредственно следует

Лемма 6.1. [19] Пусть (λ_1, w_1, ψ_1) и (λ_2, w_2, ψ_2) – нетривиальные решения задачи (6.13). Если $\lambda_1 \neq \lambda_2$ то

$$\left\langle \begin{matrix} w_1 & w_2 \\ \psi_1 & \psi_2 \end{matrix} \right\rangle_{\mathcal{H}} = 0.$$

Кроме того, если $K(x) = \text{const}$ и

$$\frac{2 \left(m + \int_0^l \rho dx \right) g \sin \varphi_0}{K} \leq 1, \quad \frac{K l^2}{EI} \leq 2 \quad (6.15)$$

то все собственные значения задачи (6.13) являются неотрицательными вещественными числами.

Доказательство. Если (λ_1, w_1, ψ_1) – решение задачи (6.13), то

$$\begin{aligned} & \lambda_1 \left\langle \begin{matrix} w_1 & w_2 \\ \psi_1 & \psi_2 \end{matrix} \right\rangle_{\mathcal{H}} = \left\langle \begin{matrix} \lambda_1 w_1 & w_2 \\ \lambda_1 \psi_1 & \psi_2 \end{matrix} \right\rangle_{\mathcal{H}} = \\ & = \int_0^l \left(K(\psi_1 - w_1') + g \rho_1 w_1' \sin \varphi_0 \right)' w_2 dx + \int_0^l \left(K(\psi_1 - w_1') - (EI \psi_1')' \right) \psi_2 dx + \end{aligned}$$

$$+ \left(K(w_1'(l) - \psi_1(l)) - mgw_1'(l) \sin \varphi_0 \right) w_2(l) + EI\psi_1'(l)\psi_2(l).$$

Выполнив интегрирование по частям в приведенном выражении, получим

$$\begin{aligned} & \lambda_1 \left\langle \begin{matrix} w_1 & w_2 \\ \psi_1 & \psi_2 \end{matrix} \right\rangle_{\mathcal{H}} = \\ & = \int_0^l \{ K(w_1'w_2' + \psi_1\psi_2 - w_1'\psi_2 - w_2'\psi_1) + EI\psi_1'\psi_2' - g\rho_1w_1'w_2' \sin \varphi_0 \} dx. \end{aligned} \quad (6.16)$$

Путем перестановки аргументов из (6.16) следует равенство

$$\lambda_2 \left\langle \begin{matrix} w_1 & w_2 \\ \psi_1 & \psi_2 \end{matrix} \right\rangle_{\mathcal{H}} = \lambda_2 \left\langle \begin{matrix} w_2 & w_1 \\ \psi_2 & \psi_1 \end{matrix} \right\rangle_{\mathcal{H}} = \lambda_1 \left\langle \begin{matrix} w_1 & w_2 \\ \psi_1 & \psi_2 \end{matrix} \right\rangle_{\mathcal{H}}.$$

Таким образом, $\left\langle \begin{matrix} w_1 & w_2 \\ \psi_1 & \psi_2 \end{matrix} \right\rangle_{\mathcal{H}} = 0$ если $\lambda_1 \neq \lambda_2$. При $w_2 = w_1$ и $\psi_2 = \psi_1$ из (6.16) вытекает

$$\begin{aligned} & \lambda_1 \left\langle \begin{matrix} w_1 & w_1 \\ \psi_1 & \psi_1 \end{matrix} \right\rangle_{\mathcal{H}} = \int_0^l \left(K(w_1' - \psi_1)^2 + EI\psi_1'^2 - g\rho_1w_1'^2 \sin \varphi_0 \right) dx = \\ & = \int_0^l \left(\frac{K}{2}w_1'^2 + EI\psi_1'^2 - K\psi_1^2 - g\rho_1w_1'^2 \sin \varphi_0 \right) dx + \frac{1}{2} \int_0^l K(w_1' - 2\psi_1)^2 dx \geq \\ & \geq \int_0^l \left(\left(\frac{K}{2} - g\rho_1 \sin \varphi_0 \right) w_1'^2 + EI\psi_1'^2 - K\psi_1^2 \right) dx. \end{aligned} \quad (6.17)$$

Функция $\psi_1(x)$ при выполнении граничного условия $\psi_1(0) = 0$ удовлетворяет неравенству Виртингера – Фридрихса следующего вида (см. [62, с. 440]):

$$\int_0^l \psi_1^2(x) dx \leq \frac{l^2}{2} \int_0^l \psi_1'^2(x) dx.$$

Используя это неравенство в (6.17), приходим к выводу, что

$$\lambda_1 \left\langle \begin{matrix} w_1 & w_1 \\ \psi_1 & \psi_1 \end{matrix} \right\rangle_{\mathcal{H}} \geq \int_0^l \left(\left(\frac{K}{2} - g\rho_1 \sin \varphi_0 \right) w_1'^2 + \left(EI - \frac{Kl^2}{2} \right) \psi_1'^2 \right) dx \geq 0$$

при выполнении условий (6.15). Отсюда следует, что все собственные значения λ неотрицательны. Лемма доказана.

В последующей части данного подраздела будем предполагать, что K , EI , I_ρ , ρ являются константами, и что $\sin \varphi_0 = 0$. Коэффициенты задачи Штурма – Лиувилля постоянны при таком предположении, следовательно, возможно явным образом записать общее решение соответствующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений. Указанное решение необходимо для вычисления коэффициентов приближенной системы в последующем подразделе.

Введем в задаче (6.13) следующие безразмерные функции

$$\zeta(x/l) = \bar{w}(x)/l, \quad \theta(x/l) = \bar{\psi}(x)$$

и параметры

$$p_1 = \frac{\rho l^2}{K}, \quad p_2 = \frac{Kl^2}{EI}, \quad p_3 = \frac{I_\rho l^2}{EI}, \quad p_4 = \frac{ml}{K}, \quad p_5 = \frac{lJ_c}{EI}.$$

Тогда (6.13) сведется к следующей задаче:

$$\frac{d}{d\tau} \begin{pmatrix} \zeta(\tau) \\ \zeta_\tau(\tau) \\ \theta(\tau) \\ \theta_\tau(\tau) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\lambda p_1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -p_2 & p_2 - \lambda p_3 & 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \zeta(\tau) \\ \zeta_\tau(\tau) \\ \theta(\tau) \\ \theta_\tau(\tau) \end{pmatrix}, \quad \tau = \frac{x}{l} \in (0, 1);$$

(6.18)

$$\zeta_\tau(1) - \theta(1) = \lambda p_4 \zeta(1), \quad \theta_\tau(1) = \lambda p_5 \theta(1), \quad \zeta(0) = \theta(0) = 0, \quad (6.19)$$

где $\zeta_\tau(\tau)$ и $\theta_\tau(\tau)$ обозначают производные по τ .

Чтобы найти решения рассматриваемой задачи Штурма – Лиувилля, вычислим собственные значения μ_j и векторы v_j для матрицы, стоящей в правой части (6.18). Имеем:

$$\mu_j = i\sigma_j, \quad v_j = \begin{pmatrix} 4\mu_j(\lambda p_3 - \sigma_j^2) \\ \lambda c_3 + 4\lambda p_1(\sigma_j^2 - \lambda p_3) \\ \lambda c_3 \\ \lambda c_3 \mu_j \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2, 3, 4,$$

где

$$\sigma_1 = -\sigma_2 = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{c_1 \lambda - \sqrt{c_2^2 \lambda^2 + c_3 \lambda}},$$

$$\sigma_3 = -\sigma_4 = \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{c_1 \lambda + \sqrt{c_2^2 \lambda^2 + c_3 \lambda}}, \quad (6.20)$$

$$c_1 = p_1 + p_3, \quad c_2 = p_1 - p_3, \quad c_3 = 4p_1 p_2.$$

Общее решение системы дифференциальных уравнений (6.18) запишется в виде

$$(\zeta, \zeta_\tau, \theta, \theta_\tau)^T(\tau) = C_1 v_1 e^{i\sigma_1 \tau} + C_2 v_2 e^{-i\sigma_1 \tau} + C_3 v_3 e^{i\sigma_3 \tau} + C_4 v_4 e^{-i\sigma_3 \tau}. \quad (6.21)$$

Отметим, что частный случай $p_1 = p_2 = p_3 = 1, p_4 = p_5 = 0$ рассматривался в работе [62]. Подстановка (6.21) в граничные условия (6.19) дает систему линейных алгебраических уравнений относительно C_1, C_2, C_3, C_4 . Такая система имеет нетривиальные решения только если

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} e^{-i\sigma_1} & e^{i\sigma_1} & e^{-i\sigma_3} & e^{i\sigma_3} \\ \sigma_1(\sigma_1^2 - \lambda p_3)e^{-i\sigma_1} & -\sigma_1(\sigma_1^2 - \lambda p_3)e^{i\sigma_1} & \sigma_3(\sigma_3^2 - \lambda p_3)e^{-i\sigma_3} & -\sigma_3(\sigma_3^2 - \lambda p_3)e^{i\sigma_3} \\ (\sigma_1^2 - \lambda p_3)(p_1 + ip_4\sigma_1) & (\sigma_1^2 - \lambda p_3)(p_1 - ip_4\sigma_1) & (\sigma_3^2 - \lambda p_3)(p_1 + ip_4\sigma_3) & (\sigma_3^2 - \lambda p_3)(p_1 - ip_4\sigma_3) \\ i\sigma_1 - \lambda p_5 & i\sigma_1 + \lambda p_5 & i\sigma_3 - \lambda p_5 & i\sigma_3 + \lambda p_5 \end{vmatrix} = 0. \quad (6.22)$$

Корни уравнения $\Delta(\lambda) = 0$ определяют собственные значения λ задачи Штурма – Лиувилля (6.13) с постоянными коэффициентами. Выражение (6.23) задает аналитическую в своей области определения функцию $\Delta(\lambda)$. Тогда по теореме единственности для аналитических функций выполнена одна из двух альтернатив: либо $\Delta(\lambda) \equiv 0$, либо множество собственных значений задачи (6.13) дискретно. Первая из этих альтернатив не выполняется для “типичных” значений параметров (в частности для значений $p_1 = p_2 = p_3 = 1, p_4 = p_5 = 0$, рассмотренных в работе [62]).

В случае $p_4 = 0$ раскрытие определителя в формуле (6.22) приводит к следующему характеристическому уравнению:

$$\begin{aligned} & 2c_2^4 p_5 \{ \sigma_1 \cos(\sigma_1) \sin(\sigma_3) + \sigma_3 \sin(\sigma_1) \cos(\sigma_3) \} \lambda^3 + \\ & + c_2^2 \{ \sigma_1^2 \sin(\sigma_1) \sin(\sigma_3) c_2^2 + 2\sigma_1 c_2 p_5 \cos(\sigma_1) \sin(\sigma_3) - 2c_2 \sigma_3 p_5 \sin(\sigma_1) \cos(\sigma_3) + \\ & + \sigma_3^2 \sin(\sigma_1) \sin(\sigma_3) c_2^2 - 2\sigma_1 \sigma_3 c_2^2 + 4\sigma_1 p_5 \cos(\sigma_1) \sin(\sigma_3) c_3 + \\ & + 4\sigma_3 p_5 \sin(\sigma_1) \cos(\sigma_3) c_3 - 2\sigma_1 \sigma_3 \cos(\sigma_1) \cos(\sigma_3) c_2^2 \} \lambda^2 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& +2 \{ \sigma_1^2 \sin(\sigma_1) \sin(\sigma_3) c_2^2 c_3 - c_2 \sigma_3 p_5 \sin(\sigma_1) \cos(\sigma_3) c_3 - 2 \sigma_1 \sigma_3 \cos(\sigma_1) \cos(\sigma_3) c_2^2 c_3 + \\
& + \sigma_1 p_5 \cos(\sigma_1) \sin(\sigma_3) c_3^2 + \sigma_3 p_5 \sin(\sigma_1) \cos(\sigma_3) c_3^2 + \sigma_1 c_2 p_5 \cos(\sigma_1) \sin(\sigma_3) c_3 + \\
& + \sigma_3^2 \sin(\sigma_1) \sin(\sigma_3) c_2^2 c_3 - 2 \sigma_1 \sigma_3 c_2^2 c_3 \} \lambda - 2 \sigma_1 \sigma_3 \cos(\sigma_1) \cos(\sigma_3) c_3^2 + \\
& + \sigma_1^2 \sin(\sigma_1) \sin(\sigma_3) c_3^2 - \sigma_3^2 c_2^2 \sin(\sigma_1) \sin(\sigma_3) - 2 \sigma_1 \sigma_3 c_2^2 \cos(\sigma_1) \cos(\sigma_3) + \\
& + \sigma_3^2 \sin(\sigma_1) \sin(\sigma_3) c_3^2 - \sigma_1^2 c_2^2 \sin(\sigma_1) \sin(\sigma_3) - 2 \sigma_1 \sigma_3 c_3^2 + 2 \sigma_1 \sigma_3 c_2^2 = 0. \quad (6.23)
\end{aligned}$$

Рассмотрим частный случай движения без нагрузки: $p_4 = p_5 = 0$ (т.е. $m = 0$ и $J_c = 0$). Тогда характеристическое уравнение (6.23) сводится к

$$\left(1 - \kappa + \frac{c_3}{\lambda c_2^2} \right) \cos(\sigma_1 + \sigma_3) + \left(1 - \kappa - \frac{c_3 \kappa}{\lambda c_2^2} \right) \cos(\sigma_3 - \sigma_1) = \frac{c_3 (\kappa - 1)}{\lambda c_2^2}, \quad (6.24)$$

где

$$\kappa = \left(\frac{\sigma_1 - \sigma_3}{\sigma_1 + \sigma_3} \right)^2.$$

Если $c_3 = 0$ то (6.22) эквивалентно уравнению

$$\cos(\sqrt{p_1 \lambda}) \cdot \cos(\sqrt{p_3 \lambda}) = 0. \quad (6.25)$$

Ниже исследуются свойства собственных значений λ задачи (6.18), (6.19) в предположении, что все коэффициенты p_1, p_2, p_3, p_4, p_5 являются положительными константами. Учитывая, что для балки с постоянной объемной плотностью справедливо соотношение $I_\rho = \rho I / A$, получим формулу

$$\frac{p_3}{p_1} = \frac{\gamma G}{E}.$$

Отсюда следует, что на практике выполнено неравенство $p_3 < p_1$, ибо $G/E \approx 0,37$ для используемых в манипуляторах металлов, $\gamma < 1$ (формулы для вычисления коэффициента γ приведены в [184]).

Распределение собственных значений. Рассмотрим гильбертово пространство

$$X = \{ (\zeta, \theta, y, z) : \zeta, \theta \in L^2[0, 1], y, z \in \mathbb{C} \}$$

над полем комплексных чисел. Определим скалярное произведение элементов

$\xi_1 = (\zeta_1, \theta_1, y_1, z_1) \in X$ и $\xi_2 = (\zeta_2, \theta_2, y_2, z_2) \in X$ следующим образом:

$$\langle \xi_1, \xi_2 \rangle = \int_0^1 (p_1 p_2 \zeta_1(\tau) \bar{\zeta}_2(\tau) + p_3 \theta_1(\tau) \bar{\theta}_2(\tau)) d\tau + p_2 p_4 y_1 \bar{y}_2 + p_5 z_1 \bar{z}_2. \quad (6.26)$$

Зададим линейный оператор A с областью определения $D(A) \subset X$ и значениями в X :

$$D(A) = \{(\zeta, \theta, y, z) : \zeta, \theta \in H^2(0, 1), \zeta(0) = \theta(0) = 0, y = \zeta(1), z = \theta(1)\},$$

$$A(\zeta, \theta, y, z) = \left(\frac{\theta' - \zeta''}{p_1}, \frac{p_2(\theta - \zeta') - \theta''}{p_3}, \frac{\zeta'(1) - \theta(1)}{p_4}, \frac{\theta'(1)}{p_5} \right),$$

где $H^2(0, 1)$ – пространство Соболева.

Нетрудно видеть, что число λ является собственным значением задачи Штурма – Лиувилля (6.18), (6.19) только в том случае, если существует элемент $\xi \in X$, удовлетворяющий условиям

$$A\xi = \lambda\xi, \quad \xi \neq 0, \quad \xi \in D(A). \quad (6.27)$$

Если λ и $\xi = (\zeta, \theta, y, z)$ удовлетворяют (6.27), то функции $\zeta(\tau)$, $\theta(\tau)$, $\tau \in [0, 1]$, определяют собственную форму колебаний балки, соответствующую собственному значению λ .

Установим важное свойство оператора A . Пусть $\xi_1, \xi_2 \in D(A)$. Интегрируя по частям с учетом граничных условий из $D(A)$, получим:

$$\begin{aligned} \langle A\xi_1, \xi_2 \rangle &= \int_0^1 (p_2(\theta_1' - \zeta_1'') \bar{\zeta}_2 + (p_2(\theta_1 - \zeta_1') - \theta_1'') \bar{\theta}_2) d\tau + p_2(\zeta_1'(1) - \theta_1(1)) \bar{\zeta}_2(1) + \theta_1'(1) \bar{\theta}_2(1) = \\ &= \int_0^1 (p_2 \theta_1 \bar{\theta}_2 + p_2(\zeta_1' - \theta_1) \bar{\zeta}_2' + (p_2 \zeta_1 + \theta_1') \bar{\theta}_2') d\tau + (p_2(\theta_1 - \zeta_1') \bar{\zeta}_2 - (p_2 \zeta_1 + \theta_1') \bar{\theta}_2) \Big|_{\tau=0}^1 + \\ &\quad + p_2(\zeta_1'(1) - \theta_1(1)) \bar{\zeta}_2(1) + \theta_1'(1) \bar{\theta}_2(1) = \\ &= \int_0^1 (p_2(\theta_1 \bar{\theta}_2 - \theta_1 \bar{\zeta}_2' + \zeta_1 \bar{\theta}_2' - \zeta_1 \bar{\zeta}_2'') - \theta_1 \bar{\theta}_2'') d\tau + (p_2 \zeta_1 \bar{\zeta}_2' + \theta_1 \bar{\theta}_2') \Big|_{\tau=0}^1 - p_2 \zeta_1(1) \bar{\theta}_2(1) = \\ &= \int_0^1 (p_2 \zeta_1 (\bar{\theta}_2' - \bar{\zeta}_2'') + \theta_1 (p_2 (\bar{\theta}_2 - \bar{\zeta}_2') - \bar{\theta}_2'')) d\tau + p_2 \zeta_1(1) (\bar{\zeta}_2'(1) - \bar{\theta}_2(1)) + \theta_1(1) \bar{\theta}_2'(1) = \\ &= \langle \xi_1, A\xi_2 \rangle. \end{aligned}$$

Таким образом, A обладает свойствами самосопряженного оператора [135, с. 330]:

1. все собственные значения λ вещественны;
2. собственные векторы $\xi_1, \xi_2 \in D(A)$, отвечающие различным собственным значениям λ_1, λ_2 , ортогональны в X .

Ввиду вещественности собственных значений λ , собственные функции $\zeta(\tau)$ и $\theta(\tau)$ задачи (6.18), (6.19) также могут быть выбраны вещественными. Поэтому в дальнейшем будем рассматривать только элементы пространства X с вещественными компонентами и опускать знак комплексного сопряжения в скалярном произведении (6.26). Имеет место лемма о расположении собственных значений.

Лемма 6.2. [14] Пусть $p_2 < 2$, тогда все собственные значения λ задачи (6.18), (6.19) принадлежат полуинтервалу $[\lambda_0, +\infty)$, где

$$\lambda_0 = \min \left\{ \frac{1}{p_1 + 2p_4}, \frac{2 - p_2}{p_3 + 2p_5} \right\} > 0. \quad (6.28)$$

Доказательство. Пусть $\xi \in D(A)$. Вычислим $\langle A\xi, \xi \rangle$, используя прием интегрирования по частям:

$$\begin{aligned} \langle A\xi, \xi \rangle &= \int_0^1 (p_2\zeta(\theta' - \zeta'') + p_2\theta(\theta - \zeta') - \theta\theta'')d\tau + p_2(\zeta'(1) - \theta(1))\zeta(1) + \theta(1)\theta'(1) = \\ &= \int_0^1 (p_2(\zeta'^2 + \theta^2) + \theta'^2 - 2p_2\theta\zeta')d\tau = \int_0^1 (p_2(\zeta' - \theta)^2 + \theta'^2)d\tau = \\ &= \int_0^1 \left(\frac{p_2}{2}\zeta'^2 + \theta'^2 - p_2\theta^2 \right) d\tau + \frac{p_2}{2} \int_0^1 (\zeta' - 2\theta)^2 d\tau \geq \int_0^1 \left(\frac{p_2}{2}\zeta'^2 + \theta'^2 - p_2\theta^2 \right) d\tau. \end{aligned} \quad (6.29)$$

Поскольку $\zeta(0) = 0$ и $\theta(0) = 0$, то функции $\zeta(\tau)$ и $\theta(\tau)$ удовлетворяют неравенствам Виртингера – Фридрихса следующего вида [180, С. 219–221], [62, с. 440]:

$$\int_0^1 \zeta'^2(\tau)d\tau \geq 2 \int_0^1 \zeta^2(\tau)d\tau, \quad \int_0^1 \theta'^2(\tau)d\tau \geq 2 \int_0^1 \theta^2(\tau)d\tau. \quad (6.30)$$

Кроме того,

$$\zeta^2(1) = \left(\int_0^1 1 \cdot \zeta'(\tau)d\tau \right)^2 \leq \int_0^1 d\tau \cdot \int_0^1 \zeta'^2(\tau)d\tau = \int_0^1 \zeta'^2(\tau)d\tau, \quad \theta^2(1) \leq$$

$$\leq \int_0^1 \theta'^2(\tau) d\tau \quad (6.31)$$

на основании неравенства Коши–Буняковского.

Пусть λ_0 – положительное число. Принимая во внимание неравенства (6.29) и (6.31), получим

$$\begin{aligned} & \langle A\xi, \xi \rangle - \lambda_0 \langle \xi, \xi \rangle \geq \\ & \geq \int_0^1 \left(\frac{p_2}{2} \zeta'^2 + \theta'^2 - p_2 \theta^2 - \lambda_0 (p_1 p_2 \zeta^2 + p_3 \theta^2) \right) d\tau - \lambda_0 (p_2 p_4 \zeta^2(1) + p_5 \theta^2(1)) \geq \\ & \geq \int_0^1 \left(p_2 \left(\frac{1}{2} - \lambda_0 p_4 \right) \zeta'^2 + (1 - \lambda_0 p_5) \theta'^2 - (p_2 + \lambda_0 p_3) \theta^2 - \lambda_0 p_1 p_2 \zeta^2 \right) d\tau. \end{aligned} \quad (6.32)$$

Полагая, что

$$\frac{1}{2} - \lambda_0 p_4 \geq 0, \quad 1 - \lambda_0 p_5 \geq 0,$$

продолжим оценку выражения (6.32) с помощью неравенств (6.30). Имеем

$$\begin{aligned} & \langle A\xi, \xi \rangle - \lambda_0 \langle \xi, \xi \rangle \geq \\ & \geq \int_0^1 \left(p_2 (1 - \lambda_0 (p_1 + 2p_4)) \zeta^2(\tau) + (2 - p_2 - \lambda_0 (p_3 + 2p_5)) \theta^2(\tau) \right) d\tau. \end{aligned}$$

Отсюда заключаем, что

$$\langle A\xi, \xi \rangle \geq \lambda_0 \langle \xi, \xi \rangle \quad (6.33)$$

для всех $\xi \in D(A)$, если λ_0 определяется выражением (6.28) и $p_2 < 2$.

Теперь легко видеть, что всякое собственное значение λ оператора A удовлетворяет неравенству $\lambda \geq \lambda_0$. Действительно, если $A\xi = \lambda\xi$ для некоторого $\xi \in D(A)$, $\xi \neq 0$, то $\langle A\xi, \xi \rangle = \lambda \langle \xi, \xi \rangle$. С учетом неравенства (6.33) получим

$$(\lambda - \lambda_0) \langle \xi, \xi \rangle \geq 0,$$

откуда следует $\lambda - \lambda_0 \geq 0$ при $\xi \neq 0$. Лемма доказана.

Поскольку выражение (6.22) определяет не равную тождественно нулю аналитическую функцию $\Delta(\lambda)$, то у задачи (6.18), (6.19) существует не более чем счетное множество собственных значений, которое при этом

не имеет конечной предельной точки и кратность каждого собственного значения конечна (см. [185, с. 22]). Кроме того, справедливо следующее утверждение.

Лемма 6.3. [14] *Если $p_1 \neq p_3$, то множество корней характеристического уравнения (6.22) не ограничено сверху.*

Доказательство. Раскрывая определитель в формуле (6.22), получим асимптотическое представление для $\Delta(\lambda)$:

$$\frac{\Delta(\lambda)}{\lambda^4} = -4p_1p_4p_5(p_1 - p_3)^2 (\cos \sigma_1 \sin \sigma_3 + R(\lambda)), \quad (6.34)$$

где

$$R(\lambda) = \left(\frac{\sqrt{p_1}}{p_4} \cos \sigma_1 \cos \sigma_3 - \frac{\sqrt{p_3}}{p_5} \sin \sigma_1 \sin \sigma_3 \right) \frac{1}{\sqrt{\lambda}} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \quad \text{при } \lambda \rightarrow +\infty.$$

При выводе формулы (6.34) вспомогательные выкладки проверены с помощью компьютерной программы Maple.

Покажем, что функция $\phi(\lambda) = \cos \sigma_1 \sin \sigma_3$ имеет счетное множество нулей в любом полуинтервале вида $\lambda \geq M$ (величины $\sigma_1 = \sigma_1(\lambda)$ и $\sigma_3 = \sigma_3(\lambda)$ зависят от λ согласно формулам (6.20)). Легко проверить, что все решения уравнения $\phi(\lambda) = 0$ можно задать в виде $\lambda = \lambda_k^*$ (k – целочисленный индекс), где λ_k^* определяется из условий

$$\sigma_1(\lambda_k^*) = \frac{\pi k}{2} \quad \text{при нечетном } k, \quad (6.35)$$

$$\sigma_3(\lambda_k^*) = \frac{\pi k}{2} \quad \text{при четном } k. \quad (6.36)$$

Отсюда можно найти λ_k^* явным образом, разрешив формулы (6.20) относительно λ :

$$\lambda = \frac{p_1p_2 + (p_1 + p_3)\sigma_1^2 + \sqrt{((p_1 - p_3)\sigma_1^2 + p_1p_2)^2 + 4p_1p_2p_3\sigma_1^2}}{2p_1p_3}, \quad (6.37)$$

$$\lambda = \frac{p_1p_2 + (p_1 + p_3)\sigma_3^2 - \sqrt{((p_1 - p_3)\sigma_3^2 + p_1p_2)^2 + 4p_1p_2p_3\sigma_3^2}}{2p_1p_3}. \quad (6.38)$$

Раскладывая формулы (6.37) и (6.38) в ряд Маклорена по степеням $1/\sigma_1$, $1/\sigma_3$, получим следующие асимптотические представления:

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{p_1 p_2}{(p_1 - p_3) p_3} + \frac{\sigma_1^2}{p_3} + O(\sigma_1^{-2}) \quad \text{при } \sigma_1 \rightarrow \infty, \\ \lambda &= \frac{p_2}{p_3 - p_1} + \frac{\sigma_3^2}{p_1} + O(\sigma_3^{-2}) \quad \text{при } \sigma_3 \rightarrow \infty.\end{aligned}\tag{6.39}$$

Подставив в эти формулы выражения (6.35), (6.36), получим асимптотическое представление корней уравнения $\phi(\lambda) = 0$ при больших значениях k :

$$\lambda_k^* = \begin{cases} \frac{p_1 p_2}{(p_1 - p_3) p_3} + \frac{\pi^2 k^2}{4 p_3} + O(1/k^2) & \text{при нечетном } k, \\ \frac{p_2}{p_3 - p_1} + \frac{\pi^2 k^2}{4 p_1} + O(1/k^2) & \text{при четном } k.\end{cases}\tag{6.40}$$

Таким образом, $\lambda_k^* \rightarrow +\infty$ при $k \rightarrow \infty$. Покажем теперь, что возмущенное уравнение $\phi(\lambda) + R(\lambda) = 0$ также имеет неограниченное сверху множество решений. Действительно, этот факт вытекает из непрерывности функций $\phi(\lambda)$, $R(\lambda)$ и свойств

$$\overline{\lim}_{\lambda \rightarrow +\infty} \phi(\lambda) > 0, \quad \underline{\lim}_{\lambda \rightarrow +\infty} \phi(\lambda) < 0.$$

Отсюда на основании формулы (6.34) заключаем, что характеристическое уравнения $\Delta(\lambda) = 0$ имеет корни в любом полуинтервале вида $\lambda \geq M$. Лемма доказана.

Итак, множество собственных значений задачи (6.18), (6.19) счетно при $p_1 \neq p_3$. Расположим эти значения в неубывающем порядке с учетом их кратности:

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \dots, \quad \lambda_n \rightarrow +\infty \text{ при } n \rightarrow \infty.$$

Из леммы 6.2 следует, что $\lambda_1 \geq \lambda_0 > 0$ при выполнении условия $p_2 < 2$. Учитывая представление (6.34), естественно предположить, что значения λ_n при больших n будут “близки” к соответствующим числам λ_k^* , определяемым формулой (6.40). Для обоснования такого предположения докажем

утверждение об асимптотическом распределении собственных частот при дополнительных условиях на механические параметры.

Утверждение 6.1. [14] Пусть $\sqrt{p_3/p_1} = r/q$, где $r < q$ – натуральные числа, q – нечетно. Тогда для всякого собственного значения λ_n задачи (6.18), (6.19) найдутся числа $k = k(n)$ и

$$\omega_k^* = \begin{cases} \frac{\pi k}{2p_3} & \text{при нечетном } k, \\ \frac{\pi k}{2p_1} & \text{при четном } k, \end{cases} \quad (6.41)$$

обладающие свойствами $\sqrt{\lambda_n} = \omega_k^* + O(\frac{1}{k})$, $k \rightarrow \infty$ при $n \rightarrow \infty$.

Доказательство. В характеристическом уравнении $\Delta(\lambda) = 0$ выразим λ и σ_1 через σ_3 по формулам (6.20), (6.39). В результате с учетом (6.34) получим следующее уравнение относительно σ_3 :

$$\begin{aligned} & \cos \left(\sqrt{\frac{p_3}{p_1}} \sigma_3 - \frac{\sqrt{p_1 p_2} (p_1 + p_3)}{2\sqrt{p_3} (p_1 - p_3) \sigma_3} \right) \left(\sin \sigma_3 + \frac{\sqrt{p_1 p_3}}{p_4 \sigma_3} \cos \sigma_3 \right) = \\ & = \frac{p_3}{p_5 \sigma_3} \sin \left(\sqrt{\frac{p_3}{p_1}} \sigma_3 - \frac{\sqrt{p_1 p_2} (p_1 + p_3)}{2\sqrt{p_3} (p_1 - p_3) \sigma_3} \right) \sin \sigma_3 + O \left(\frac{1}{\sigma_3^2} \right). \end{aligned} \quad (6.42)$$

Отбросив члены более высокого порядка малости, перепишем уравнение (6.42) в виде

$$\cos(\alpha\sigma) \sin \sigma = \varepsilon(\sigma), \quad (\alpha = \sqrt{p_3/p_1}, \sigma = \sigma_3), \quad (6.43)$$

где $\varepsilon(\sigma) = O(1/\sigma)$ при $\sigma \rightarrow \infty$. Это означает, что $\varepsilon(\sigma)$ допускает оценку

$$|\varepsilon(\sigma)| \leq \frac{M_1}{\sigma} \quad \text{при } \sigma \geq \tilde{\sigma} \quad (6.44)$$

с некоторыми положительными константами $\tilde{\sigma}$, M_1 . Функция

$$f(\sigma) = \sin \sigma \cos(\alpha\sigma)$$

обращается в нуль при $\sigma = \sigma_k^*$, где

$$\sigma_k^* = \begin{cases} \frac{\pi k}{2} & \text{при четном } k, \\ \frac{\pi k}{2\alpha} & \text{при нечетном } k. \end{cases} \quad (6.45)$$

Для локализации решений уравнения (6.43) применим формулу Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа к функции f :

$$f(\sigma_k^* + d) = f'(\sigma_k^*)d + \frac{f''(\eta)}{2}d^2, \quad |\eta - \sigma_k^*| \leq |d|, \quad (6.46)$$

$$f'(\sigma_k^*) = \begin{cases} (-1)^{k/2} \cos\left(\frac{\pi k \alpha}{2}\right) & \text{при четном } k, \\ (-1)^{(k+1)/2} \alpha \sin\left(\frac{\pi k}{2\alpha}\right) & \text{при нечетном } k, \end{cases} \quad (6.47)$$

$$f''(\eta) = -(1 + \alpha^2) \sin \eta \cos(\alpha \eta) - 2\alpha \cos \eta \sin(\alpha \eta).$$

Из условия $\alpha = r/q$ (q – нечетное число) следует периодичность $f(\sigma)$ и свойство $f'(\sigma_k^*) \neq 0$ при всех целых k . Для доказательства этого свойства воспользуемся рассуждением от противного. Если $f'(\sigma_k^*) = 0$ при некотором k , то согласно формулам (6.47) выполнена одна из двух альтернатив:

- 1) k – четно, kr/q – нечетное целое число;
- 2) k – нечетно, kq/r – четное целое число.

Ни одна из этих альтернатив невозможна при нечетном q . Таким образом, при выполнении условий доказываемого утверждения значения $|f'(\sigma_k^*)|$ отделены от нуля¹:

$$M_2 = \inf_{k \in \mathbb{Z}} |f'(\sigma_k^*)| > 0.$$

Обозначим

$$h = \frac{M_2}{2(\alpha + 1)^2} > 0$$

и покажем, что функция $f(\sigma)$ строго монотонна на каждом из интервалов вида

$I_k = (\sigma_k^* - h, \sigma_k^* + h)$. Действительно, производная $f'(\sigma)$ непрерывна и не обращается в нуль при $\sigma \in I_k$:

$$|f'(\sigma)| = |f'(\sigma_k^*) + f''(\eta)(\sigma - \sigma_k^*)| \geq |f'(\sigma_k^*)| - h \sup_{\eta \in \mathbb{R}} |f''(\eta)| \geq$$

¹Нетрудно проверить, что в случае $\alpha = r/q$, $(r, q) = 1$, q – четно, а также в случае иррационального α , нижняя граница значений $|f'(\sigma_k^*)|$ равна нулю.

$$\geq M_2 - h(1 + \alpha)^2 = \frac{M_2}{2} > 0.$$

Поскольку σ_k^* расположены в интервалах I_k , а функция $f(\sigma)$ непрерывна и периодична, то значения $f(\sigma)$ отделены от нуля на множестве $S = \mathbb{R} \setminus \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} I_k$:

$$M_3 = \inf_{\sigma \in S} |f(\sigma)| > 0.$$

Зададимся числом

$$\sigma_{min} = \max \left\{ \tilde{\sigma}, \frac{M_1}{M_3}, \sqrt{\frac{2M_1}{M_2}} \right\}. \quad (6.48)$$

При таком выборе σ_{min} уравнение (6.43) не имеет решений в интервале $\sigma \in (\sigma_{min}, +\infty)$, удовлетворяющих условию $\sigma \in S$. Действительно,

$$|f(\sigma)| \geq M_3 \geq \frac{M_1}{\sigma_{min}} > \frac{M_1}{\sigma} \geq |\varepsilon(\sigma)| \quad \text{при } \sigma \in S, \sigma > \sigma_{min}.$$

Таким образом, каждое решение уравнения (6.43) из интервала $\sigma > \sigma_{min}$ находится в некотором I_k . И наоборот, при достаточно больших k каждый интервал $I_k \subset (\sigma_{min}, +\infty)$ содержит решение уравнения (6.43). Для доказательства этого факта рассмотрим произвольное значение σ_k^* , удовлетворяющее неравенству $\sigma_k^* > \sigma_{min} + d$. Построим такой отрезок $[\sigma_k^* - d, \sigma_k^* + d]$, чтобы на его концах функция $f(\sigma) - \varepsilon(\sigma)$ принимала значения разных знаков, либо обращалась в нуль. Для этого достаточно выбрать число d из условий

$$|f(\sigma_k^* - d)| \geq |\varepsilon(\sigma_k^* - d)|, \quad |f(\sigma_k^* + d)| \geq |\varepsilon(\sigma_k^* + d)|, \quad 0 < d < h, \quad (6.49)$$

поскольку $f(\sigma)$ меняет знак при переходе через σ_k^* . С учетом формулы (6.46), условия (6.49) будут выполнены, если

$$|f(\sigma_k^* \pm d)| \geq |f'(\sigma_k^*)|d - \frac{d^2}{2} \sup_{\eta \in R} |f''(\eta)| \geq M_2 d - \frac{(\alpha + 1)^2}{2} d^2 \geq \frac{M_1}{\sigma_k^* - d}. \quad (6.50)$$

Из формулы конечных приращений вытекает неравенство

$$\frac{1}{\sigma_k^* - d} < \frac{1}{\sigma_k^*} + \frac{d}{\sigma_{min}^2}, \quad (0 < d < \sigma_k^* - \sigma_{min}). \quad (6.51)$$

Поэтому условие (6.50) выполнено при

$$d^2 - 2bd + c \leq 0, \quad 0 < d < h, \quad (6.52)$$

где

$$b = \frac{M_2 - M_1/\sigma_{min}^2}{(\alpha + 1)^2}, \quad c = \frac{2M_1}{(\alpha + 1)^2\sigma_k^*} > 0.$$

Отметим, что $b > 0$ вследствие неравенства $\sigma_{min}^2 \geq 2M_1/M_2$, которое следует из формулы (6.48). Решив неравенство (6.52), приходим к выводу, что отрезок $[\sigma_k^* - d, \sigma_k^* - d]$ содержит решение уравнения (6.43), если $d = d_k^*$:

$$d_k^* = b - \sqrt{b^2 - c} = \frac{M_1}{(M_2 - M_1/\sigma_{min}^2)\sigma_k^*} + O\left(\frac{1}{(\sigma_k^*)^2}\right), \quad \sigma_k^* > \frac{2M_1}{b^2(\alpha + 1)^2}. \quad (6.53)$$

Остается показать, что при таком $d = d_k^*$ множество $I_k \setminus [\sigma_k^* - d, \sigma_k^* - d]$ не содержит решений уравнения (6.43). Для этого достаточно установить, принимая во внимание оценку (6.44), что

$$|f(\sigma_k^* \pm \delta)| > \frac{M_1}{\sigma_k^* - \delta} \quad (6.54)$$

при всех $\delta \in (d_k^*, h]$. Вследствие формул (6.46), (6.51), неравенство (6.54) выполняется в случае $P(\delta) = \delta^2 - 2b\delta + c < 0$. Поскольку корнями квадратного многочлена $P(\delta)$ являются числа $\delta = d_k^*$ и $\delta = b + \sqrt{b^2 - c} > b \geq h$, то $P(\delta)$ сохраняет (отрицательный) знак при всех $\delta \in (d_k^*, h]$.

Таким образом, каждое достаточно большое σ , удовлетворяющее уравнению (6.43), расположено в замкнутой окрестности некоторого числа σ_k^* с радиусом d_k^* . Из формулы (6.53) вытекает оценка $\sigma = \sigma_k^* + O(1/k)$ для решений уравнения (6.43) при $k \rightarrow \infty$. Подставляя эту оценку в формулу (6.38) и извлекая корень, получим оценку вида $\sqrt{\lambda_n} = \omega_k^* + O(1/k)$, что и требовалось доказать.

6.4 Аппроксимация по Галеркину

Для построения приближенной по Галеркину системы воспользуемся вариационной формулировкой уравнений возмущенного движения следующим

образом (см. [182]): если $(\tilde{\varphi}(t), \tilde{w}(x, t), \tilde{\psi}(x, t))$ ($0 \leq x \leq l$) – решение краевой задачи (6.11) с управлением $M(t)$ на промежутке времени $t \in \mathcal{I} \subset \mathbb{R}$, тогда

$$\begin{aligned} \ddot{\tilde{\varphi}}(t) - v &= 0, \\ \tilde{\mu} &= \int_0^l \delta\tilde{w}(x, t) \left\{ (\ddot{\tilde{w}} + xv - g\tilde{\varphi} \sin \varphi_0)\rho + \left(K(\tilde{\psi} - \tilde{w}') + \rho_1 g(\tilde{w}' \sin \varphi_0 + \tilde{\varphi} w'_0 \cos \varphi_0) \right)' + \dots \right\} dx + \\ &+ \int_0^l \delta\tilde{\psi}(x, t) \left\{ I_\rho \ddot{\tilde{\psi}} + K(\tilde{\psi} - \tilde{w}') - (EI\tilde{\psi}')' + I_\rho v \right\} dx + \delta\tilde{\psi}(l, t) \left\{ J_c \ddot{\tilde{\psi}} + EI\tilde{\psi}' + J_c v \right\} \Big|_{x=l} + \\ &+ \delta\tilde{w}(l, t) \left\{ K(\tilde{w}' - \tilde{\psi}) + m(\ddot{\tilde{w}} + lv - g(\tilde{\varphi} + \tilde{w}') \sin \varphi_0 - g\tilde{\varphi} w'_0 \cos \varphi_0) + \dots \right\} \Big|_{x=l} = 0, \quad \forall t \in \mathcal{I}, \end{aligned} \quad (6.55)$$

для любых допустимых вариаций $(\delta\tilde{w}(x, t), \delta\tilde{\psi}(x, t))$, удовлетворяющих граничным условиям $\delta\tilde{w}(0, t) = 0$ и $\delta\tilde{\psi}(0, t) = 0$. Выражение (6.55) получено из (6.7) путем разложения в ряд Маклорена и отбрасывания слагаемых более высокого порядка малости. Величины v и M связаны с помощью выражения (6.12).

Зафиксируем целое число $N \geq 1$ и рассмотрим нетривиальные решения (λ_j, w_j, ψ_j) задачи (6.13) для $j = 1, 2, \dots, N$. Предположим, что все λ_j различны и подставим конечные суммы

$$\tilde{w}(x, t) = \sum_{j=1}^N q_j(t) w_j(x), \quad \tilde{\psi}(x, t) = \sum_{j=1}^N q_j(t) \psi_j(x) \quad (6.56)$$

в выражение (6.55). Предположим также, что вариационная форма (6.55) обнуляется при всех вариациях $\delta\tilde{w}$ и $\delta\tilde{\psi}$ из конечномерных подпространств

$$\delta\tilde{w}(\cdot, t) \in \text{span}\{w_1(\cdot), \dots, w_N(\cdot)\}, \quad \delta\tilde{\psi}(\cdot, t) \in \text{span}\{\psi_1(\cdot), \dots, \psi_N(\cdot)\}.$$

Полагая $\delta\tilde{w}(x, t) = w_i(x)$ и $\delta\tilde{\psi}(x, t) = \psi_i(x)$ в формуле (6.55) для $i = 1, \dots, N$, с учетом леммы 6.1 получим следующую систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно $\tilde{\varphi}, q_1, q_2, \dots, q_N$ [7]:

$$\ddot{\tilde{\varphi}} = v, \quad \ddot{q}_j = -\lambda_j q_j + a_j \tilde{\varphi} - b_j v + \dots, \quad j = 1, 2, \dots, N, \quad (6.57)$$

где

$$a_j = g \frac{\left(\int_0^l \rho w_j dx + m w_j(l) \right) \sin \varphi_0 + \int_0^l \rho_1 w'_0 w'_j dx \cos \varphi_0}{\int_0^l (\rho w_j^2 + I_\rho \psi_j^2) dx + m w_j^2(l) + J_c \psi_j^2(l)},$$

$$b_j = \frac{\int_0^l (\rho x w_j + I_\rho \psi_j) dx + m l w_j(l) + J_c \psi_j(l)}{\int_0^l (\rho w_j^2 + I_\rho \psi_j^2) dx + m w_j^2(l) + J_c \psi_j^2(l)}, \quad (6.58)$$

многоточием обозначены нелинейные слагаемые относительно фазовых переменных системы (6.57).

При исследовании задач наблюдения и стабилизации рассматриваемой модели необходимо учитывать связь между параметром v и возмущенным управляющим моментом $\tilde{M} = M - M_0$, которая задается формулой (6.12). Подставив выражения (6.56) в формулу (6.12), получим приближенную связь между v и \tilde{M} для системы с конечным числом степеней свободы:

$$v = u + d_0 \tilde{\varphi} + \sum_{j=1}^N d_j q_j + \dots, \quad (6.59)$$

где

$$u = \frac{\tilde{M}}{J_0 + \int_0^l (w_0^2 \rho - w_0'^2 \rho_2) dx + m w_0^2(l)},$$

$$d_0 = \frac{\int_0^l [(\rho w_0 - \rho_1 w_0') \cos \varphi_0 - \frac{1}{2} (w_0')^2 \rho_1 \sin \varphi_0] dx + m w_0(l) \cos \varphi_0}{J_0 + \int_0^l (w_0^2 \rho - w_0'^2 \rho_2) dx + m w_0^2(l)} g,$$

$$d_j = \frac{g \int_0^l [(w_0' \cos \varphi_0 - \sin \varphi_0) \rho_1 w_j' + \rho w_j \sin \varphi_0] dx + m g w_j(l) \sin \varphi_0 + E I \psi_j'(0)}{J_0 + \int_0^l (w_0^2 \rho - w_0'^2 \rho_2) dx + m w_0^2(l)},$$

многоточием обозначены нелинейные слагаемые относительно переменных системы.

С использованием соотношения (6.59) система (6.57) может быть записана в матричном виде следующим образом [19]:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= A_{11} z_1 + A_{12} z_2 + B_1 u + R_1(z, u), \\ \dot{z}_2 &= A_{21} z_1 + A_{22} z_2 + B_2 u + R_2(z, u), \quad z = (z_1^T, z_2^T)^T, \end{aligned} \quad (6.60)$$

где z – фазовый вектор, u – управление,

$$z_1 = (\tilde{\varphi}, \dot{\tilde{\varphi}})^T, \quad z_2 = (q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2, \dots, q_N, \dot{q}_N)^T,$$

$$u = \frac{\tilde{M}}{J_0 + \int_0^l (w_0^2 \rho - w_0'^2 \rho_2) dx + m w_0^2(l)}.$$

Как видим, управление u в системе (6.60) пропорционально отклонению момента M от его невозмущенного значения M_0 . Поэтому при постановке задач наблюдения и стабилизации с наблюдателем по измерениям реальной физической системы будем использовать модель (6.60) (вместо упрощенной модели (6.57)). Матрицы коэффициентов системы (6.60) имеют следующий вид:

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ d_0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ d_1 & 0 & d_2 & 0 & \dots & d_N & 0 \end{pmatrix},$$

$$B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad B_2 = (0, -b_1, \dots, 0, -b_N)^T,$$

$$A_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a_1 - b_1 d_0 & 0 \\ 0 & 0 \\ a_2 - b_2 d_0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \\ a_N - b_N d_0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$A_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\lambda_1 - b_1 d_1 & 0 & -b_1 d_2 & 0 & \dots & -b_1 d_N & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ -b_2 d_1 & 0 & -\lambda_2 - b_2 d_2 & 0 & \dots & -b_2 d_N & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -b_N d_1 & 0 & -b_N d_2 & 0 & \dots & -\lambda_N - b_N d_N & 0 \end{pmatrix},$$

нелинейное слагаемое $R(z, u) = (R_1^T, R_2^T)^T$ удовлетворяет оценке

$$\|R(z, u)\| = O(\|z\|^2 + u^2)$$

в окрестности положения равновесия $z = 0, u = 0$.

Система (6.60) является конечномерной аппроксимацией граничной задачи (6.11) относительно упругих мод до N -го порядка включительно.

6.5 Управляемость и стабилизация обратной связью по состоянию

Как известно [108, 138, 147], свойство управляемости является ключевым при качественном изучении моделей систем с управлением. Поскольку значения управляющие параметры v , u систем (6.57), (6.60) связаны обратимым преобразованием (6.59), то исследование свойств локальной управляемости и стабилизируемости системы (6.60) сводится к анализу системы (6.57).

Запишем линейное приближение системы (6.57) в окрестности нуля в матричном виде:

$$\dot{z} = \bar{A}z + \bar{B}v, \quad (6.61)$$

$$z = \begin{pmatrix} \tilde{\varphi} \\ \dot{\tilde{\varphi}} \\ q_1 \\ \dot{q}_1 \\ \vdots \\ q_N \\ \dot{q}_N \end{pmatrix}, \quad \bar{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ a_1 & 0 & -\lambda_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ a_N & 0 & 0 & 0 & \dots & -\lambda_N & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{B} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -b_1 \\ \vdots \\ 0 \\ -b_N \end{pmatrix}.$$

Имеет место следующий критерий управляемости.

Лемма 6.4. [7] Система (6.61) управляема, если и только если все собственные значения λ_j различны и $a_j + \lambda_j b_j \neq 0$ при всех $j = 1, 2, \dots, N$.

Доказательство. С помощью непосредственных вычислений убеждаемся в том, что

$$\det(\bar{B}, \bar{A}\bar{B}, \dots, \bar{A}^{2N+1}\bar{B}) = (-1)^{N+1} \cdot \prod_{1 \leq j \leq N} (a_j + \lambda_j b_j)^2 \cdot \prod_{1 \leq i < k \leq N} (\lambda_i - \lambda_k)^2.$$

Поэтому линейная система (6.61) полностью управляема по критерию Калмана [147, с. 74], [175, с. 91]. Лемма доказана.

Приведенное утверждение непосредственно переносится на систему с управлением u .

Теорема 6.1. Система (6.60) локально управляема в окрестности нуля, если все собственные значения λ_j различны и $a_j + \lambda_j b_j \neq 0$ при всех $j = 1, 2, \dots, N$.

Доказательство. Система (6.61) полностью управляема по лемме 6.4. Поскольку при каждом значении фазового вектора z имеется взаимно-однозначное соответствие между значениями v , u в формуле (6.59), то линейное приближение системы (6.60) также полностью управляемо. Следовательно, система (6.60) локально управляема в окрестности нуля по теореме об управляемости по линейному приближению [175, с. 399], что и требовалось доказать.

Ниже приведена явная схема построения стабилизирующего управления с обратной связью.

Лемма 6.5. [7] Пусть все собственные значения $(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ положительны и различны. Предположим также, что $a_j + \lambda_j b_j \neq 0$ при всех $j = \overline{1, N}$. Тогда существуют положительные константы k_1, k_2, h_0 , при которых управление с обратной связью

$$v(\tilde{\varphi}, \dot{\tilde{\varphi}}, q_1, \dots, q_N) = \frac{k_1 \tilde{\varphi} + h_0 \dot{\tilde{\varphi}} + \sum_{j=1}^N (a_j b_j \tilde{\varphi} - (a_j + \lambda_j b_j) q_j)}{\sum_{j=1}^N b_j^2 - k_2}, \quad (6.62)$$

обеспечивает асимптотическую устойчивость тривиального положения равновесия системы (6.61).

Доказательство. Рассмотрим квадратичную форму от фазовых переменных системы (6.61) следующего вида

$$2V(z) = k_1 \tilde{\varphi}^2 + k_2 \dot{\tilde{\varphi}}^2 + \sum_{j=1}^N (\lambda_j q_j^2 + \dot{q}_j^2 - 2a_j \tilde{\varphi} q_j + 2b_j \dot{\tilde{\varphi}} \dot{q}_j). \quad (6.63)$$

Покажем, что указанная форма является положительно-определенной при некоторых значениях констант k_1 и k_2 . Применяя неравенство Коши – Буныковского, получим

$$2V \geq G_1 \left(-|\tilde{\varphi}|, \left(\sum_{j=1}^N \lambda_j q_j^2 \right)^{1/2} \right) + G_2 \left(-|\dot{\tilde{\varphi}}|, \left(\sum_{j=1}^N \dot{q}_j^2 \right)^{1/2} \right), \quad (6.64)$$

где

$$G_1(\alpha, \beta) = k_1\alpha^2 + 2 \left(\sum_{j=1}^N \frac{a_j^2}{\lambda_j} \right)^{1/2} \alpha\beta + \beta^2,$$

$$G_2(\alpha, \beta) = k_2\alpha^2 + 2 \left(\sum_{j=1}^N b_j^2 \right)^{1/2} \alpha\beta + \beta^2.$$

Согласно критерию Сильвестра, каждая из квадратичных форм G_1 и G_2 будет положительно-определенной при выполнении условий

$$k_1 > \sum_{j=1}^N \frac{a_j^2}{\lambda_j}, \quad k_2 > \sum_{j=1}^N b_j^2. \quad (6.65)$$

Предположим, что k_1 и k_2 удовлетворяют приведенным выше неравенствам, тогда форма V является положительно-определенной вследствие оценки (6.64).

Производная функции V в силу системы (6.61) равна

$$\dot{V} = \left(k_2 - \sum_{j=1}^N b_j^2 \right) \dot{\varphi}v + \left(k_1\tilde{\varphi} + \sum_{j=1}^N (a_j b_j \tilde{\varphi} - (a_j + \lambda_j b_j) q_j) \right) \dot{\varphi}.$$

Зададимся произвольной положительной константой $h_0 > 0$ и определим управление с обратной связью так, чтобы выполнялось соотношение

$$\dot{V} = -h_0 \dot{\varphi}^2 \quad (6.66)$$

на траекториях замкнутой системы. Отсюда получаем выражение (6.62) для обратной связи.

Для доказательства асимптотической устойчивости тривиального решения замкнутой системы (6.61), (6.62) воспользуемся теоремой Барбашина – Красовского [136]. Рассмотрим множество

$$Z_0 = \{(\tilde{\varphi}, \dot{\varphi}, q_1, \dots, q_N) \in \mathbb{R}^{2N+2} : \dot{V} = 0\}.$$

Каждая положительная полутраектория системы (6.61), (6.62) на Z_0 удовлетворяет соотношениям

$$\ddot{q}_j = -\lambda_j q_j + a_j \tilde{\varphi},$$

$$\sum_{j=1}^N [-a_j b_j \tilde{\varphi} + (a_j + \lambda_j b_j) q_j] = k_1 \tilde{\varphi} = \text{const}, \quad t \geq 0.$$

Отсюда следует

$$\sum_{j=1}^N (a_j + \lambda_j b_j) \left(A_j \cos(\sqrt{\lambda_j} t) + B_j \sin(\sqrt{\lambda_j} t) \right) = \left(k_1 - \sum_{j=1}^N \frac{a_j^2}{\lambda_j} \right) \tilde{\varphi} \quad (6.67)$$

при некоторых константах $A_j, B_j, \tilde{\varphi}$. Учитывая, что функции

$$\left\{ 1, \sin(\sqrt{\lambda_j} t), \cos(\sqrt{\lambda_j} t) \right\}_{j=1}^N$$

образуют линейно-независимую систему на $[0, +\infty)$ [160, теорема 1.2.17], получим что (6.67) выполняется только при $\tilde{\varphi} = 0$ и $A_j = B_j = 0$ для всех $j = 1, 2, \dots, N$. Отсюда следует, что множество Z_0 содержит только тривиальную траекторию $x = 0$ замкнутой системы (6.61), (6.62). А значит, тривиальное решение асимптотически устойчиво по теореме Барбашина – Красовского. Лемма доказана.

Применим доказанный результат для нелинейной системы (6.60).

Теорема 6.2. [19] Пусть все собственные значения $(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ положительны и различны. Предположим также, что $a_j + \lambda_j b_j \neq 0$ при всех $j = \overline{1, N}$. Тогда существует управление с обратной связью вида $u = Kz$, которое обеспечивает асимптотическую устойчивость тривиального решения системы (6.60). Указанное управление задается формулами

$$u = Kz, \quad K = (K_1, K_2), \quad K_1 = \left(-d_0 - \frac{h_1 + \sum_{j=1}^N a_j (b_j + a_j / \lambda_j)}{h_2}, -\frac{h_0}{h_2} \right), \quad (6.68)$$

$$K_2 = \left(-d_1 + \frac{a_1 + \lambda_1 b_1}{h_2}, 0, -d_2 + \frac{a_2 + \lambda_2 b_2}{h_2}, 0, \dots, -d_N + \frac{a_N + \lambda_N b_N}{h_2}, 0 \right),$$

где h_0, h_1, h_2 – произвольные положительные константы.

Доказательство. Для произвольных положительных констант h_1 и h_2 определим

$$k_1 = h_1 + \sum_{j=1}^N \frac{a_j^2}{\lambda_j}, \quad k_2 = h_2 + \sum_{j=1}^N b_j^2.$$

При таком выборе выполнены неравенства (6.65), а значит, функция Ляпунова $V(z)$ из (6.63) является определенно-положительной. Следовательно, для любой константы $h_0 > 0$ управление (6.62) обеспечивает асимптотическую устойчивость тривиального решения системы (6.61) по лемме 6.5. Используя связь (6.59) в формуле (6.62) и отбрасывая нелинейные члены, получим соотношение $u = Kz$ вида (6.68). Таким образом, тривиальное решение системы линейного приближения для (6.60) с $u = Kz$ асимптотически устойчиво по лемме 6.5. Отсюда следует асимптотическая устойчивость нулевого решения рассматриваемой системы (6.60) с $u = Kz$ по теореме об устойчивости по первому приближению [186, с. 72].

6.6 Синтез динамического наблюдателя

В теореме 6.2 построено управление в виде обратной связи по состоянию, обеспечивающее стабилизацию положения равновесия. Для реализации такого управления необходима информация о фазовом векторе системы в каждый момент времени. Поскольку измерение полного фазового вектора недоступно на практике, то необходимо решить задачу наблюдения для оценки недостающих координат по доступным значениям выхода системы. Такая задача решается ниже.

6.6.1 Условия наблюдаемости

Конструкция реального манипулятора не предполагает возможность измерения значений функций $w(x, t)$ и $\psi(x, t)$ в каждой точке $x \in (0, l)$. Следовательно, оценку значений фазового вектора системы (6.60) можно получить только путем решения задачи наблюдения по неполной информации измерений. К таким измерениям на практике относятся показания датчиков напряжений (см. [101, 102]), расположенных в некоторой точке манипулятора с координатой $x = l_0$, $0 \leq l_0 \leq l$. Следуя этому подходу, будем считать, что датчик обеспечивает измерения функции $\psi'(x, t)|_{x=l_0}$ в точке $x = l_0$ при всех $t \geq 0$. Отметим, что в цитируемых работах [101, 102]

рассматривался только случай $l_0 = 0$ для балки Эйлера – Бернулли со свободным концом.

Вычитая из функций $\varphi(t)$, $\psi'(x, t)|_{x=l_0}$ их значения, соответствующие положению равновесия (6.9), зададим выход системы (6.60) следующим образом:

$$y_1(t) = \tilde{\varphi}(t), \quad y_2(t) = \sum_{j=1}^N \psi_j'(l_0) q_j(t). \quad (6.69)$$

Выражения (6.69) перепишем в виде

$$y_1 = C_1 z_1, \quad y_2 = C_2 z_2, \quad C_1 = (1, 0), \quad C_2 = (\chi_1, 0, \chi_2, 0, \dots, \chi_N, 0), \quad (6.70)$$

где $\chi_j = \psi_j'(l_0)$.

Цель данного подраздела состоит в решении задачи наблюдения, т.е. необходимо оценить полный фазовый вектор $z(t)$ системы (6.60) при известной информации о значениях u , y . Сформулируем достаточные условия разрешимости такой задачи.

Теорема 6.3. [10] Система (6.60) с выходом (6.70) локально наблюдаема в точке $z = 0$, если

$$\begin{vmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} & \dots & \pi_{1N} \\ \pi_{21} & \pi_{22} & \dots & \pi_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \pi_{N1} & \pi_{N2} & \dots & \pi_{NN} \end{vmatrix} \neq 0, \quad (6.71)$$

где $\pi_{1,j} = \chi_j$, $\pi_{k,j} = -\lambda_j \pi_{k-1,j} - d_j \sum_{i=1}^N \pi_{k-1,i} b_i$, $j = \overline{1, N}$, $k = \overline{2, N}$.

В частности, при $N = 1$ условие (6.71) эквивалентно неравенству $\chi_1 \neq 1$, а при $N = 2$ следующему:

$$\chi_1 \chi_2 (\lambda_1 - \lambda_2 + b_1 d_1 - b_2 d_2) + b_2 \chi_2^2 d_1 - b_1 \chi_1^2 d_2 \neq 0.$$

Доказательство. Используя выход y_1 , запишем линейную часть системы (6.60), (6.70) следующим образом:

$$\begin{aligned} z_1 &= (y_1, \dot{y}_1)^T, \\ \dot{z}_2 &= A_{22} z_2 + B_2 u + (0, a_1 - b_1 d_0, \dots, 0, a_N - b_N d_0)^T y_1, \\ y_2 &= C_2 z_2. \end{aligned} \quad (6.72)$$

Отсюда следует, что компоненты вектора $z_1(t)$ однозначно определяются через функцию y_1 , а подсистема относительно z_2 наблюдаема, если пара (A_{22}, C_2) удовлетворяет ранговому условию наблюдаемости Калмана [175, с. 122], [147, с. 88]:

$$\text{rank} \begin{pmatrix} C_2 \\ C_2 A_{22} \\ \vdots \\ C_2 A_{22}^{2N-1} \end{pmatrix} = 2N.$$

Непосредственные выкладки показывают, что

$$\det \begin{pmatrix} C_2 \\ C_2 A_{22} \\ \vdots \\ C_2 A_{22}^{2N-1} \end{pmatrix} = \begin{vmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} & \dots & \pi_{1N} \\ \pi_{21} & \pi_{22} & \dots & \pi_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \pi_{N1} & \pi_{N2} & \dots & \pi_{NN} \end{vmatrix}^2.$$

Таким образом, из соотношения (6.71) следует ранговое условие наблюдаемости для линеаризованной системы (6.60), (6.70). Поэтому нелинейная система (6.60), (6.70) локально сильно наблюдаема по теореме из [187], что и требовалось доказать.

6.6.2 Синтез динамического наблюдателя

При выполнении условий теоремы 6.3 возможно построить наблюдатель Луенбергера [147, С. 91–92] явным образом для любого количества N упругих координат. Процедура синтеза наблюдателя описана ниже.

Лемма 6.6. [10] *Предположим, что система (6.60), (6.70) удовлетворяет условию наблюдаемости (6.71), а также $0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_N$, $b_j d_j > 0$ для всех $j = \overline{1, N}$.*

Тогда для любого управления $u(\cdot) \in L^1([0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R})$ и начальных условий $z(0), \bar{z}(0) \in \mathbb{R}^{2N+2}$, соответствующее решение $z(t)$ системы линейного приближения для (6.60) при $t \rightarrow +\infty$ экспоненциально стремится

ся к решению $\bar{z}(t)$ системы:

$$\begin{aligned}\dot{\bar{z}}_1 &= (A_{11} - F_1 C_1)\bar{z}_1 + A_{12}\bar{z}_2 + F_1 y_1 + B_1 u, \\ \dot{\bar{z}}_2 &= (A_{22} - F_{22} C_2)\bar{z}_2 + F_{21} y_1 + F_{22} y_2 + B_2 u,\end{aligned}\tag{6.73}$$

где

$$\begin{aligned}F_1 &= (\phi_1, d_0 + \phi_2)^T, \\ F_{21} &= (0, a_1 - b_1 d_0, 0, a_2 - b_2 d_0, \dots, 0, a_N - b_N d_0)^T, \\ F_{22} &= (f_1, 0, f_2, 0, \dots, f_N, 0)^T, \\ (f_1, f_2, \dots, f_N)^T &= \gamma Q^{-1}(\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_N)^T,\end{aligned}\tag{6.74}$$

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{\lambda_1 d_1}{b_1} + d_1^2 & d_1 d_2 & \dots & d_1 d_N \\ d_2 d_1 & \frac{\lambda_2 d_2}{b_2} + d_2^2 & \dots & d_2 d_N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_N d_1 & d_N d_2 & \dots & \frac{\lambda_N d_N}{b_N} + d_N^2 \end{pmatrix}.$$

Здесь ϕ_1, ϕ_2, γ – произвольные положительные константы.

Доказательство. Введем ошибки наблюдений: $e_1 = z_1 - \bar{z}_1, e_2 = z_2 - \bar{z}_2$. Вычитая уравнения (6.73) из линейного приближения системы (6.60), получим следующую систему:

$$\dot{e}_1 = H_1 e_1 + A_{12} e_2, \quad \dot{e}_2 = H_2 e_2,$$

где $H_1 = A_{11} - F_1 C_1, H_2 = A_{22} - F_{22} C_2$. Все корни полинома

$$\det(H_1 - \mu I) = \begin{vmatrix} -\phi_1 - \mu & 1 \\ -\phi_2 & -\mu \end{vmatrix} = \mu^2 + \phi_1 \mu + \phi_2,$$

очевидно, имеют отрицательные вещественные части при выполнении условий $\phi_1 > 0, \phi_2 > 0$. Покажем, что вещественные части всех собственных

значений матрицы

$$H_2 = \begin{pmatrix} -f_1\chi_1 & 1 & \dots & -f_1\chi_N & 0 \\ -\lambda_1 - b_1d_1 & 0 & \dots & -b_1d_N & 0 \\ -f_2\chi_1 & 0 & \dots & -f_2\chi_N & 0 \\ -b_2d_1 & 0 & \dots & -b_2d_N & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -f_N\chi_1 & 0 & \dots & -f_N\chi_N & 1 \\ -b_Nd_1 & 0 & \dots & -\lambda_N - b_Nd_N & 0 \end{pmatrix}$$

отрицательны при выполнении условий леммы. Обозначим

$$e_2 = (\xi_1, \eta_1, \dots, \xi_N, \eta_N)^T$$

и рассмотрим квадратичную форму:

$$2W(e_2) = \sum_{j=1}^N \frac{d_j\eta_j^2}{b_j} + (\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N)Q(\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_N)^T.$$

Убедимся в том, что форма $2W(e_2)$ определена положительно в случае $\lambda_j > 0$, $b_jd_j > 0$. Действительно, все главные миноры Δ_j матрицы Q положительны:

$$\Delta_j = \frac{(\lambda_1d_1)(\lambda_2d_2)\cdots(\lambda_jd_j)}{b_1b_2\cdots b_j} \left(1 + \sum_{i=1}^j \frac{b_id_i}{\lambda_i} \right) > 0, \quad j = \overline{1, N}.$$

Тогда форма W положительно определена по критерию Сильвестра. Из неравенства $\det(Q) = \Delta_N > 0$ следует также существование Q^{-1} в формуле (6.74). Вычисляя производную W в силу системы $\dot{e}_2 = H_2e_2$, получим

$$\dot{W}(e_2) = -\gamma(C_2e_2)^2 \leq 0.$$

Поскольку \dot{W} обнуляется на множестве $\text{Ker } C_2 = \{e_2 \in \mathbb{R}^{2N} : C_2e_2 = 0\}$, проверим существование нетривиальных полутраекторий системы $\dot{e}_2 = H_2e_2$ на $\text{Ker } C_2$. Пусть $C_2e_2(t) \equiv 0$, $t \geq 0$, тогда

$$\frac{d^k}{dt^k} C_2e_2(t) = C_2(A_{22} - F_{22}C_2)^k e_2(t) = C_2A_{22}^k e_2(t) = 0$$

для $t \geq 0$, $k \geq 0$. Отсюда следует, что для любого $t \geq 0$ вектор $e_2(t)$ является решением следующей системы линейных алгебраических уравнений:

$$C_2 A_{22}^k e_2(t) = 0, \quad k = \overline{0, 2N-1}. \quad (6.75)$$

Система (6.75) допускает только тривиальное решение $e_2(t) = 0$ при выполнении рангового условия (6.71). Следовательно, линейная система $\dot{e}_2 = H_2 e_2$ асимптотически устойчива по теореме Барбашина – Красовского [136].

Итак, матрицы H_1 и H_2 гурвицевы при выполнении условий леммы. Динамика ошибок наблюдения для линейного приближения систем (6.60), (6.73) описывается следующими уравнениями:

$$\begin{pmatrix} \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_1 & A_{12} \\ 0 & H_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \end{pmatrix}. \quad (6.76)$$

Легко видеть, что спектр матрицы системы (6.78) является объединением спектров H_1 и H_2 . Следовательно, тривиальное решение системы (6.78) экспоненциально устойчиво, $\|z(t) - \bar{z}(t)\| \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$. Лемма доказана.

6.7 Стабилизация с наблюдателем в цепи обратной связи

В данном подразделе предлагается использовать наблюдатель типа Луенбергера [147, С. 91–92] для реализации обратной связи по состоянию при неполных измерениях. Докажем основной результат в этом направлении.

Теорема 6.4. [13] *Предположим, что система (6.60), (6.70) удовлетворяет условию наблюдаемости (6.71), все λ_j положительны и различны, $a_j + \lambda_j b_j \neq 0$ и $b_j d_j > 0$ для всех $j = \overline{1, N}$. Тогда тривиальное решение $z = 0$, $\bar{z} = 0$ расширенной системы, состоящей из уравнений (6.60) и уравнений наблюдателя*

$$\begin{aligned} \dot{\bar{z}}_1 &= (A_{11} - F_1 C_1) \bar{z}_1 + A_{12} \bar{z}_2 + F_1 y_1 + B_1 u, \\ \dot{\bar{z}}_2 &= (A_{22} - F_{22} C_2) \bar{z}_2 + F_{21} y_1 + F_{22} y_2 + B_2 u, \end{aligned} \quad (6.77)$$

с управлением $u = K\bar{z}$ асимптотически устойчиво по Ляпунову, где $y_1 = C_1z$, $y_2 = C_2z$. Матрицы K , F_1 , F_{21} , F_{22} имеют следующий вид:

$$K = (K_1, K_2), \quad K_1 = \left(-d_0 - \frac{h_1 + \sum_{j=1}^N a_j(b_j + a_j/\lambda_j)}{h_2}, -\frac{h_0}{h_2} \right),$$

$$K_2 = \left(-d_1 + \frac{a_1 + \lambda_1 b_1}{h_2}, 0, -d_2 + \frac{a_2 + \lambda_2 b_2}{h_2}, 0, \dots, -d_N + \frac{a_N + \lambda_N b_N}{h_2}, 0 \right),$$

$$F_1 = (\phi_1, d_0 + \phi_2)^T, \quad F_{21} = (0, a_1 - b_1 d_0, 0, a_2 - b_2 d_0, \dots, 0, a_N - b_N d_0)^T,$$

$$F_{22} = (f_1, 0, f_2, 0, \dots, f_N, 0)^T, \quad (f_1, f_2, \dots, f_N)^T = \gamma Q^{-1}(\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_N)^T,$$

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{\lambda_1 d_1}{b_1} + d_1^2 & d_1 d_2 & \dots & d_1 d_N \\ d_2 d_1 & \frac{\lambda_2 d_2}{b_2} + d_2^2 & \dots & d_2 d_N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_N d_1 & d_N d_2 & \dots & \frac{\lambda_N d_N}{b_N} + d_N^2 \end{pmatrix}.$$

Здесь $h_0, h_1, h_2, \phi_1, \phi_2, \gamma$ – произвольные положительные константы.

Доказательство. Совершим линейное преобразование $e_1 = z_1 - \bar{z}_1$, $e_2 = z_2 - \bar{z}_2$ и запишем расширенную систему (6.60), (6.77) в переменных z, e_1, e_2 :

$$\begin{pmatrix} \dot{z} \\ \dot{e}_1 \\ \dot{e}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} H_0 & -BK_1 & -BK_2 \\ 0 & H_1 & A_{12} \\ 0 & 0 & H_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z \\ e_1 \\ e_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R(z, K(z - e)) \\ R_1(z, K(z - e)) \\ R_2(z, K(z - e)) \end{pmatrix}, \quad (6.78)$$

где

$$H_0 = \begin{pmatrix} A_{11} + B_1 K_1 & A_{12} + B_1 K_2 \\ A_{21} + B_2 K_1 & A_{22} + B_2 K_2 \end{pmatrix}, \quad H_1 = A_{11} - F_1 C_1, \quad H_2 = A_{22} - F_{22} C_2,$$

$$B = (B_1^T, B_2^T)^T, \quad R = (R_1^T, R_2^T)^T.$$

Как показано при доказательстве леммы 6.6, матрицы H_1 и H_2 являются гурвицевыми, т.е. все их собственные значения имеют отрицательные вещественные части. Покажем, что матрица H_0 – гурвицева. Для этого рассмотрим вспомогательную систему дифференциальных уравнений

$$\dot{z} = H_0 z. \quad (6.79)$$

Система (6.79) соответствует линейному приближению системы (6.60) с обратной связью по состоянию $u = Kz$, которая была рассмотрена при доказательстве теоремы 6.2. Тривиальное решение системы (6.79) асимптотически устойчиво по теореме 6.2, т.е. матрица H_0 – гурвицева.

Поскольку матрица линейной части системы (6.78) имеет блочно - треугольную форму, то ее спектр является объединением спектров гурвицевых матриц H_0, H_1, H_2 , а значит линейное приближение системы (6.78) асимптотически устойчиво. Отсюда следует асимптотическая устойчивость тривиального решения нелинейной системы (6.78) (а также системы (6.60), (6.77) с $y_1 = C_1z, y_2 = C_2z, u = K\bar{z}$) на основании теоремы Ляпунова об устойчивости по линейному приближению [186, с. 72], что и требовалось доказать.

6.8 Результаты вычислений

Определим коэффициенты системы (6.60) и проверим условия наблюдаемости (6.71) для обоснования применимости теоремы 6.4 в схеме стабилизации модели реального гибкого манипулятора. Прототипом такой модели является управляемая пожарная лестница IVECO DLK 23-12 CS GL, описанная в статье [92]. Модель лестницы имеет следующие механические параметры: $l = 25$ м, $\rho = 64$ кг/м, $K = 2.3 \cdot 10^5$ Н, $I_\rho = 2.2 \cdot 10^4$ кг·м, $EI = 5 \cdot 10^9$ Н·м², $m = 100$ кг, $J_0 = 100$ кг·м², $l_0 = 1$ м. Кабина, прикрепленная к верхней части лестницы, имеет небольшие линейные размеры по сравнению с длиной l , поэтому будем считать ее центральный момент инерции пренебрежимо малым, т.е. $J_c = 0$ кг·м². Рассмотрим положение равновесия модели, соответствующее углу наклона лестницы $\varphi_0 = \pi/3$.

В таблице 6.1 приведены собственные значения λ_n ($n = \overline{1,4}$) задачи Штурма – Лиувилля (6.18), (6.19) при указанном выборе механических параметров. В этой таблице также приведены теоретические частоты модальных колебаний $\nu_n = \frac{\sqrt{\lambda_n}}{2\pi}$ и результаты экспериментальных измерений модальных частот ν_n^* для реальной пожарной лестницы. Эксперименталь-

ные измерения модальных частот были проведены авторами статьи [92].

n	λ_n, c^{-2}	Теоретическая частота ν_n, c^{-1}	Измеренная частота ν_n^*, c^{-1}
1	14.1	0.59	0.6
2	126.5	1.79	1.8
3	354.6	2.99	2.9
4	694.7	4.19	4.25

Таблица 6.1. Собственные значения и модальные частоты колебаний.

Из таблицы 6.1 видно, что спектр задачи Штурма – Лиувилля (6.18), (6.19) может быть использован для адекватного описания измеренных модальных частот реального манипулятора.

Зафиксируем число $N = 2$ и вычислим коэффициенты системы (6.60). Для этого вычислим собственные функции $w_j(x)$, $\psi_j(x)$ задачи (6.18), (6.19):

$$a_1 = 31.65, \quad a_2 = -7.08, \quad b_1 = 62.95, \quad b_2 = 15.55,$$

$$d_0 = -89.48, \quad d_1 = 307.19, \quad d_2 = 653.39,$$

$$\chi_1 = \psi_1'(l_0) = 0.001, \quad \chi_2 = \psi_2'(l_0) = 0.0014.$$

Приведенные значения соответствуют нормировке собственных функций из условий

$$\left\langle \begin{array}{c} w_j \\ \psi_j \end{array}, \begin{array}{c} w_j \\ \psi_j \end{array} \right\rangle_{\mathcal{H}} = J_0, \quad j = 1, 2.$$

Нетрудно видеть, что все условия теоремы 6.4 выполнены: $b_1 d_1 > 0$, $b_2 d_2 > 0$,

$$\chi_1 \chi_2 (\lambda_1 - \lambda_2 + b_1 d_1 - b_2 d_2) + b_2 \chi_2^2 d_1 - b_1 \chi_1^2 d_2 = -0.013 \neq 0.$$

Для стабилизации системы (6.60) применим управление вида $u = K \bar{z}$ из теоремы 6.4 со значениями параметров

$$h_0 = \gamma = 10^4, \quad h_1 = 10^3, \quad h_2 = \phi_1 = \phi_2 = 100.$$

На рис. 6.2 показаны результаты численного интегрирования системы (6.60), (6.77) со следующим начальными условиями:

$$\tilde{\varphi}(0) = \pi/18, \dot{\tilde{\varphi}}(0) = 0, q_1(0) = q_2(0) = 0, \dot{q}_1(0) = \dot{q}_2(0) = 0, \bar{z}(0) = 0. \quad (6.80)$$

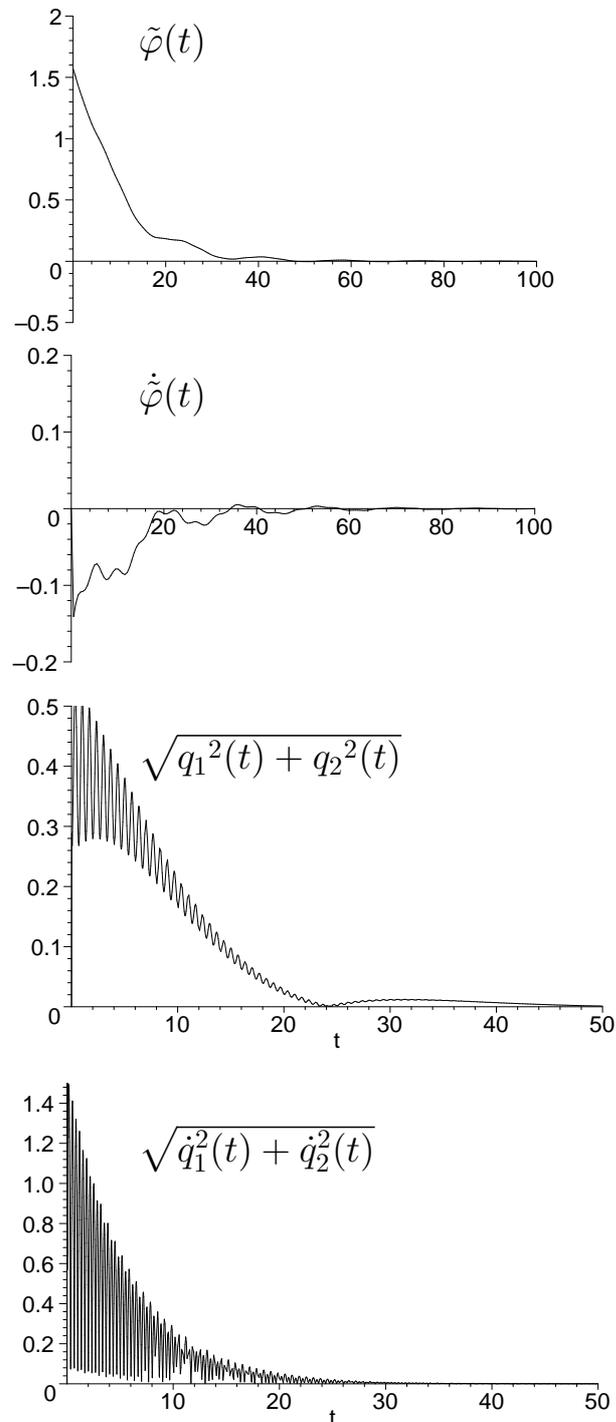


Рис. 6.2. Решение задачи Коши (6.60), (6.77), (6.80) в случае $u = K\bar{z}$.

6.9 Выводы

В данном разделе диссертации построена новая математическая модель гибкого манипуляционного робота в виде упругой балки Тимошенко, которая связана с двумя твердыми телами. Для описания динамики рассмотренной механической системы с помощью принципа Гамильтона – Остроградского выведены дифференциальные уравнения движения с частными производными. Получены аппроксимации уравнений движения с конечным числом степеней свободы и исследованы задачи управляемости, стабилизации, наблюдения. К отличительным особенностям этих исследований по сравнению с известными результатами относятся следующие положения.

1. В краевой задаче с частными производными (6.8) учтены сдвиговые деформации, инерция вращения элементов балки, поперечные и продольные перемещения точек системы под воздействием управляющего момента и силы тяжести. В отличие от известных работ [62, 109, 110, 111] по управлению бесконечномерными моделями балки Тимошенко, в разделе 6 получены результаты для более сложной механической модели с присоединенными твердыми телами и при достаточно общих предположениях на коэффициенты системы.
2. Полученные в подразделе 6.3 результаты (в частности, представление (6.41)) могут иметь возможное практическое применение для оценки механических параметров манипулятора в случае, если известны частоты колебаний. Проведенное исследование задачи Штурма – Ливилля позволило доказать аналитически ряд важных свойств собственных значений (леммы 6.1, 6.2, 6.3 и утверждение 6.1) для задачи колебаний балки с присоединенным твердым телом, что выделяет эти результаты на фоне работ, ориентированных на численные решения (см. [61]).
3. Алгоритм построения приближенной по Галеркину системы обыкно-

- венных дифференциальных уравнений (6.60) может быть реализован для любого числа модальных координат N . Доказанные утверждения об управляемости (теорема 6.1), стабилизации (теорема 6.2) и наблюдаемости (теорема 6.3 и лемма 6.6) также применимы при любой размерности системы (6.60). Предложена явная схема построения наблюдателя и стабилизации положения равновесия модели с помощью обратной связи по состоянию системы-наблюдателя (теорема 6.4).
4. В разделе 6 не ставились задачи оптимального управления либо оценки величин управляющих моментов, соответствующих предложенным законам управления. Возможные рекомендации к выбору констант, входящих в функции управления из теорем 6.2 и 6.4, могут быть получены из представлений для функции Ляпунова (6.63) и ее производной (6.66) в доказательстве леммы 6.5. Из представления $\dot{V} = -h_0\dot{\varphi}^2$ следует, что выбор константы $h_0 > 0$ влияет на скорость убывания значений функции Ляпунова V на решениях системы с обратной связью. С одной стороны, чем больше значение h_0 , тем большая скорость стремления решений к нулю может быть достигнута (для решений с $\dot{\varphi} \neq 0$). С другой стороны, при больших значениях h_0 коэффициент $-\frac{h_0}{h_2}$ в формуле (6.68) может приводить к большим значениям управляющего момента при малых h_2 . Отсюда вытекает рекомендация выбирать наибольшее из возможных значений h_0 и при этом задавать h_2 таким образом, чтобы слагаемое $-\frac{h_0}{h_2}\dot{\varphi}$ в формуле $u = Kz$ не приводило бы к превышению допустимых значений момента M (при типичных значениях угловой скорости $\dot{\varphi}$). Затем выбор константы h_1 осуществляется в соответствии с имеющимися ограничениями на допустимые значения $\tilde{\varphi}$ и $\dot{\tilde{\varphi}}$. Действительно, константы h_1 и h_2 определяют соотношения между полуосями эллипсоида $V(z) = const$, и поэтому с помощью функции Ляпунова $V(z)$ оценка на максимальные отклонения величин $\tilde{\varphi}$ и $\dot{\tilde{\varphi}}$ может быть вычислена в терминах h_1 и h_2 . Сле-

дует отметить, что приведенные рекомендации не являются строгим обоснованием для оптимального выбора управляющих параметров и основаны только на рассмотрении линеаризованной системы.

5. Результаты вычислений, проведенных в подразделе 6.8, подтверждают возможность стабилизации модели манипулятора с помощью функции управления, определяемой в терминах системы-наблюдателя. Отметим также, что предложенная схема стабилизации гарантирует локальную асимптотическую устойчивость в нелинейной постановке. Такой подход позволяет конструктивно строить систему динамического наблюдения и функцию обратной связи явным образом при любом конечном числе упругих координат.

Результаты раздела 6 опубликованы в виде статей [7, 10, 13, 14, 19] и материалов конференций [33, 36].

7 Условия стабилизируемости в терминах критических гамильтонианов и символов

Данный раздел посвящен развитию методов решения задачи стабилизации нелинейных управляемых систем. Известно [149], что вопрос об устойчивости невозмущенного решения класса нелинейных дифференциальных уравнений в банаховом пространстве можно свести к исследованию устойчивости решений уравнения относительно критической переменной. Эта идея, лежащая в основе принципа сведения в теории устойчивости, позволяет свести задачу об устойчивости для дифференциальных уравнения в бесконечномерном пространстве к задаче об устойчивости для редуцированной системы уравнения меньшей размерности, в частности конечномерной. Применение принципа сведения предполагает возможность конструктивного анализа свойств асимптотической устойчивости и неустойчивости решений такой редуцированной системы относительно критических пере-

менных. Поэтому создание новых эффективных подходов к исследованию задач устойчивости и стабилизации решений существенно нелинейных систем дифференциальных уравнений является актуальным.

В данном разделе будем предполагать, что динамика системы с критическими переменными описывается нелинейными дифференциальными уравнениями следующего вида:

$$\dot{x} = f(x, u), \quad x \in X, \quad u \in U, \quad (7.1)$$

где x – фазовый вектор системы, принадлежащий n -мерному многообразию X , u – управление из некоторого ограничивающего множества U . Для исследования свойства стабилизируемости системы (7.1) без ограничения общности будем считать, что X – открытое подмножество пространства \mathbb{R}^n , $0 \in X$, а также $U \subset \mathbb{R}^m$, $f \in C^\infty(X \times U)$, $f(0, u_0) = 0$ для некоторого $u_0 \in U$. Обозначим через TX и T^*X касательное и кокасательное расслоения многообразия X , которые при сделанных предположениях можно отождествить с $X \times \mathbb{R}^n$. Поскольку свойство асимптотической устойчивости особой точки не зависит от выбора фазовых координат, то естественно искать условия стабилизируемости нелинейной системы (7.1) в терминах ее инвариантов относительно преобразований с обратной связью. Полная система инвариантов для нелинейных управляемых систем предложена в работах В. Якубczyk с помощью построения вспомогательных функций (“символов”) на кокасательном расслоении [151]. В соответствии с таким подходом, управляемая система (7.1) заменяется конечным числом функций на кокасательном расслоении, которые не зависят от управления.

7.1 Определение критических гамильтонианов и символов

Для описания свойств системы (7.1) поставим в соответствие каждой точке $x \in X$, элементу p кокасательного пространства T_x^*X и управлению u следующее значение:

$$h(p, x, u) = \langle p, f(x, u) \rangle.$$

Будем называть определенной таким образом функцию $h : T^*X \times U \rightarrow \mathbb{R}$ *гамильтонианом* системы (7.1). Значение $h(p, x, u)$ соответствует скорости системы вдоль направления p в зависимости от управления u .

Рассмотрим h как функцию u при фиксированных x и p . Если множество U открыто, то определим критические точки $u_1(p, x), \dots, u_\mu(p, x)$ как решения $u = u_i(p, x)$ уравнения

$$\frac{\partial h}{\partial u}(p, x, u) = 0.$$

Предположим, что число μ конечно и не зависит от выбора (p, x) из некоторого открытого плотного подмножества кокасательного расслоения T^*X . Тогда определим *критические гамильтонианы* системы (7.1) следующим образом:

$$H_1(p, x) = h(p, x, u_1(p, x)), \dots, H_\mu(p, x) = h(p, x, u_\mu(p, x)).$$

С помощью такого приема мы заменим систему (7.1) на конечный набор гамильтоновых динамических систем в кокасательном расслоении T^*X :

$$\dot{x} = \frac{\partial H_k}{\partial p}(p, x), \quad \dot{p} = -\frac{\partial H_k}{\partial x}(p, x), \quad k = 1, \dots, \mu. \quad (7.2)$$

Из принципа максимума Понтрягина следует, что траектории этой системы определяют экстремальные по времени траектории исходной системы (7.1). Однако, частные производные функций $H_k(p, x)$ в (7.2) могут не существовать даже для сравнительно простых классов систем (7.1). Для устранения этой трудности введем симметрические функции критических гамильтонианов следующим образом:

$$S_k(p, x) = (H_1)^k + \dots + (H_\mu)^k, \quad k = 1, \dots, \mu.$$

Функции $S_k : T^*X \rightarrow \mathbb{R}$ будем называть *символами* системы (7.1). Все S_k являются вещественными аналитическими функциями, если f аналитична [151, лемма 4.1]. В общем случае, для аналитических функций f символы S_k могут быть вычислены с помощью логарифмических вычетов (см. [151]).

В дальнейшем для упрощения рассуждений рассмотрим случай системы (7.1) с двумя символами. Такое допущение выполнено, в частности, если множества скоростей $F(x) = f(x, U)$ выпуклы, компактны и не вырождаются в одну точку при типичных значениях x . В таком случае

$$H_1 = \sup_{u \in U} h(p, x, u), \quad H_2 = \inf_{u \in U} h(p, x, u)$$

и

$$S_1 = H_1 + H_2, \quad S_2 = H_1^2 + H_2^2. \quad (7.3)$$

В частности, рассмотрим аффинную по управлению систему

$$\dot{x} = F(x) + \sum_{k=1}^m g_k(x)u_k, \quad U = \{u \in \mathbb{R}^m : u_1^2 + \dots + u_m^2 \leq 1\}. \quad (7.4)$$

Для такой системы имеются два критических гамильтониана:

$$H_1 = H_{\max}(p, x) = \sup_{u \in U} h(p, x, u) = \langle p, F \rangle + \sqrt{\sum_k \langle p, g_k \rangle^2},$$

$$H_2 = H_{\min}(p, x) = \inf_{u \in U} h(p, x, u) = \langle p, F \rangle - \sqrt{\sum_k \langle p, g_k \rangle^2}.$$

Приведем выражения для символов системы (7.4) (см. [151]):

$$S_1 = H_{\min} + H_{\max} = 2 \langle p, F \rangle,$$

$$S_2 = (H_{\min})^2 + (H_{\max})^2 = 2 \langle p, F \rangle^2 + 2 \sum_{k=1}^m \langle p, g_k \rangle^2. \quad (7.5)$$

7.2 Условия стабилизируемости

В данном подразделе будут исследованы необходимые и достаточные условия стабилизируемости системы (7.1). Для этой цели воспользуемся символами для описания градиента функции Ляпунова как гладкого ковекторного поля, удовлетворяющего дополнительному условию на степень отображения. Доказательство основного результата идейно связано с теоремой М.А. Красносельского об индексе асимптотически устойчивой точки [188,

с. 442, теорема 52.1], которая также может быть использована для вывода известных в теории управления необходимых условий стабилизируемости [189, 190, 191].

Поставим в соответствие каждому элементу $x \in X$ множество

$$K(x) = \{p \in T_x^*X \mid \inf_{u \in U} h(p, x, u) < 0\}.$$

Для любой системы (7.1), имеющей в точности два символа S_1 и S_2 , многозначное отображение $K : x \in X \mapsto K(x)$, $K(x) \subset T_x^*X$, можно определить следующим образом

$$K(x) = \{p \in T_x^*X \mid S_2(p, x) > S_1^2(p, x) \text{ или} \\ (S_1(p, x) < 0, 2S_2(p, x) \geq S_1^2(p, x))\}. \quad (7.6)$$

Эта формула следует из определения символов (7.3) в случае $\mu = 2$. Отметим, что из $p \in K(x)$ следует $p \neq 0$.

Обозначим

$$B_\varepsilon = \{x \in X : \|x\| < \varepsilon\}, \quad S_\varepsilon = \partial B_\varepsilon, \quad \varepsilon > 0.$$

Для непрерывной функции $p(x) \in K(x)$ на S_ε обозначим через $\deg_{S_\varepsilon} p(\cdot)$ степень отображения $\phi(x) = \frac{p(x)}{\|p(x)\|}$, действующего из S_ε в единичную сферу S кокасательного пространства, где множества S_ε и S ориентированы обычным образом как $(n-1)$ -мерные сферы в \mathbb{R}^n . Поскольку $p(x) \in K(x)$, то $p(x) \neq 0$, и указанное выше $\phi(x)$ определено при всех $x \in S_\varepsilon$.

Напомним определение *степени* гладкого отображения $\phi : M \rightarrow N$, действующего между ориентируемыми многообразиями M и N одинаковой размерности [188, с. 18], [191, 192]. Рассмотрим регулярное значение $y \in N$. Регулярность y означает, что либо $\phi^{-1}(y) = \emptyset$, либо полный прообраз $\phi^{-1}(y) \subset M$ состоит из конечного числа элементов $\{x_1, \dots, x_k\}$, и якобиан J_ϕ отображения ϕ невырожден в каждой точке x_j , $j = 1, 2, \dots, k$. По теореме Сарда, множество регулярных значений y имеет полную лебегову меру в N [188, с. 13], [192]. Определим $\deg \phi = 0$ если $\phi^{-1}(y) = \emptyset$,

и

$$\deg \phi = \sum_{j=1}^k \operatorname{sgn} J_{\phi}(x_j)$$

в случае $\phi^{-1}(y) \neq \emptyset$. Можно показать, что такое определение степени ϕ не зависит от выбора регулярной точки y . Если отображение $\phi : M \rightarrow N$ непрерывно, то существует окрестность \mathcal{U} функции ϕ в C^0 -топологии, такая, что все гладкие $\phi^* \in \mathcal{U}$ имеют одинаковую степень, так что для $\phi^* \in \mathcal{U}$ определяем $\deg \phi = \deg \phi^*$. Степень отображения можно также вычислить с помощью известных формул для вращения векторного поля [188, с. 18, 443] или через сигнатуру вспомогательной квадратичной формы [193].

Будем называть систему (7.1) *стабилизируемой*, если существует допустимая функция обратной связи $k : X \rightarrow U$, $k(0) = u_0$, которая обеспечивает асимптотическую устойчивость по Ляпунову решения $x = 0$ замкнутой системы $\dot{x} = f(x, k(x))$. В данном разделе в качестве класса допустимых обратных связей будем рассматривать $k \in C(B_{\varepsilon} \setminus \{0\})$. Докажем основной результат о необходимых и достаточных условиях стабилизируемости.

Теорема 7.1. [9] *Предположим, что система (7.1) имеет в точности два символа S_1 и S_2 при всех $x \in X \setminus \{0\}$. Если система (7.1) стабилизируема, то для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ существует гладкая функция $p(x) = (p_1(x), \dots, p_n(x)) \in K(x)$, определенная при $x \in S_{\varepsilon}$, где $K(x)$ задано формулой (7.6). Указанная функция $p(x)$ удовлетворяет условиям:*

(C1)

$$\deg_{S_{\varepsilon}} p(\cdot) = 1;$$

(C2) *для любой замкнутой C^1 -кривой $\gamma \subset S_{\varepsilon}$ выполнено*

$$\oint_{\gamma} p_1(x) dx_1 + p_2(x) dx_2 + \dots + p_n(x) dx_n = 0;$$

(C3) $p(x)$ допускает гладкое продолжение $\tilde{p}(x)$ на \overline{B}_ε со свойствами

$$\frac{\partial \tilde{p}_i}{\partial x_j} \equiv \frac{\partial \tilde{p}_j}{\partial x_i}, \quad \forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\}; \quad (7.7)$$

(C4) такое продолжение $\tilde{p}(x)$ порождает определенно-положительную функцию $V(x)$ на B_ε :

$$V(x) = \int_0^{x_1} \tilde{p}_1(\lambda, 0, \dots, 0) d\lambda + \int_0^{x_2} \tilde{p}_2(x_1, \lambda, \dots, 0) d\lambda + \dots + \\ + \int_0^{x_n} \tilde{p}_n(x_1, x_2, \dots, \lambda) d\lambda.$$

Обратно, если система (7.1) аффинна по управлению, U – выпукло, существует функция $\tilde{p} \in C^1(\overline{B})$, удовлетворяющая условиям (7.7) и (C4) в некоторой окрестности нуля B , и $\tilde{p}(x) \in K(x)$ для всех $x \in B \setminus \{0\}$, то система (7.1) стабилизируема. При этом сужение $\tilde{p}(x)$ на S_ε удовлетворяет условиям (C1) и (C2) при каждом $\varepsilon: 0 < \varepsilon < \inf_{x \in \partial B} \|x\|$.

Доказательство. Предположим, что система (7.1) стабилизируема. Тогда из теоремы Артстейна [194, теорема 5.1] следует существование управляемой функции Ляпунова V класса $C^\infty(B)$ в некоторой окрестности нуля B . Такая функция $V: B \rightarrow \mathbb{R}$ удовлетворяет условиям $V(0) = 0$, $V(x) > 0$ при $x \neq 0$, а также

$$\inf_{u \in U} h(\nabla V(x), x, u) < 0 \quad \text{при всех } x \in B \setminus \{0\},$$

где ∇V обозначает градиент V . Из определения множества $K(x)$ в (7.6) следует, что $p(x) = \nabla V(x) \in K(x)$ при каждом $x \in S_\varepsilon$ для любого положительного $\varepsilon < \inf_{x \in \partial B} \|x\|$.

Для доказательства свойства (C1), воспользуемся рассуждениями, аналогичными теореме 52.1 из монографии [188, с. 442], но для ковекторного поля $\nabla V(x)$ и сдвига по траекториям в отрицательном времени. Поскольку степень отображения не зависит от выбора координат, рассмотрим отображения $p: (x_1, \dots, x_n) \mapsto (p_1(x), \dots, p_n(x))$ и $Id: (x_1, \dots, x_n) \mapsto (x_1, \dots, x_n)$ в координатах, как действующие из $S_\varepsilon \subset \mathbb{R}^n$ в \mathbb{R}^n . Пусть $\xi: (-\infty, 0] \times S_\varepsilon \rightarrow \mathbb{R}^n$

обозначает решение следующей задачи Коши:

$$\frac{d\xi_k(t; x_0)}{dt} = \frac{\partial V(x_1, \dots, x_n)}{\partial x_k} \Big|_{x=\xi(t; x_0)}, \quad t < 0, \quad k = 1, \dots, n;$$

$$\xi(0; x_0) = x_0.$$

Поскольку V – гладкая функция, то решение $\xi(t; x_0)$ существует (по крайней мере для малых t) и единственно. Существование решения для всех $t \leq 0$ следует из положительной определенности V и неравенства

$$\frac{d}{dt}V(\xi(t; x_0)) = \|\nabla V(\xi(t; x_0))\|^2 > 0 \quad \text{при } x_0 \neq 0.$$

Из этого неравенства следует также, что $\xi(t; x_0) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow -\infty$ для каждого $x_0 \in S_\varepsilon$. Определим функцию $\Phi : S_\varepsilon \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^n$ следующим образом:

$$\Phi(x, \lambda) = \frac{1}{\lambda} \left(x - \xi \left(\frac{\lambda}{\lambda - 1}; x \right) \right), \quad \lambda \in (0, 1);$$

$$\Phi(x, 0) = p(x); \quad \Phi(x, 1) = Id(x).$$

Из непрерывности решения $\xi(t; x_0)$ и свойства $\xi(t; x_0) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow -\infty$ следует, что функция Φ непрерывна и $\Phi(x, \lambda) \neq 0$ при $(x, \lambda) \in S_\varepsilon \times [0, 1]$. Это означает, что $\Phi(x, \lambda)$ устанавливает гомотопию между $p(x)$ and $Id(x)$ на S_ε , поэтому

$$\deg_{S_\varepsilon} p = \deg_{S_\varepsilon} Id = \text{sign det } I = 1,$$

где I – единичная $n \times n$ -матрица. Здесь использована формула для индекса линейного векторного поля [188, с. 27, теорема 6.3].

Для доказательства свойств (C2) – (C4) положим $\tilde{p}(x) = \nabla V(x)$ при $x \in \overline{B}_\varepsilon$. Тогда дифференциальная форма

$$dV = \tilde{p}_1(x)dx_1 + \dots + \tilde{p}_n(x)dx_n$$

является точной (и замкнутой) в \overline{B}_ε , откуда следуют (C2) и (C3). Далее, поскольку интеграл $\int_\gamma dV$ зависит только от концов кривой γ , то

$$\int_0^{x_1} \tilde{p}_1(\lambda, 0, \dots, 0)d\lambda + \int_0^{x_2} \tilde{p}_2(x_1, \lambda, \dots, 0)d\lambda + \dots + \int_0^{x_n} \tilde{p}_n(x_1, x_2, \dots, \lambda)d\lambda =$$

$$(7.8)$$

$$= \int_{(0, \dots, 0)}^{(x_1, \dots, x_n)} dV = V(x_1, \dots, x_n) - V(0) = V(x_1, \dots, x_n),$$

что и доказывает свойство (C4).

Обратно, пусть $\tilde{p}(x) \in K(x)$ при всех $x \in B \setminus \{0\}$, где $\tilde{p} \in C^1(B)$, B – некоторая окрестность точки $x = 0$. Если $\tilde{p}(x)$ удовлетворяет условию (7.7) то дифференциальная форма $\omega = \tilde{p}_1(x)dx_1 + \dots + \tilde{p}_n(x)dx_n$ замкнута, и по лемме Пуанкаре ω является точной (см. [195, гл. 30]). Тогда $\omega = dV$ и $\tilde{p} = \nabla V(x)$, где функция $V \in C^2(B)$ задана формулой (7.8). Из условий (C4) и $\tilde{p}(x) \in K(x)$ следует, что $V(x)$ является управляемой функцией Ляпунова для (7.1) в области B . Таким образом, система (7.1) стабилизируема по теореме Артстейна.

7.3 Стабилизация системы с полиномиальными векторными полями

Применением доказанную теорему для исследования вопроса о стабилизируемости двумерной нелинейной системы с одномерным управлением. Обзор известных результатов по задаче стабилизации такого класса систем содержится в работе [191]. В большинстве цитируемых публикаций рассмотрены аффинные по управлению системы

$$\dot{x} = F(x) + g(x)u, \quad F(0) = 0, \quad x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad u \in \mathbb{R},$$

в предположении $g(0) \neq 0$. В статье [196] доказано, что при таком предположении каждая локально управляемая система с аналитическими $F(x)$ и $g(x)$ локально стабилизируема с помощью непрерывной обратной связи, удовлетворяющей условию Гельдера. Условия стабилизируемости в классе аналитических функций обратной связи $u = k(x_1, x_2)$ получены в работе [197] методом построения функции Ляпунова для случая, если матрица Якоби отображения $F(x) + g(x)k(x)$ не обращается в нуль при $x = 0$.

Задача стабилизации посредством непрерывной обратной связи в гло-

бальной постановке исследована в работе [198] для системы вида

$$\dot{x}_1 = a(x), \quad \dot{x}_2 = u,$$

где $a : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ – однородный полином степени k , т.е.

$$a(\varepsilon^{s_1}x_1, \varepsilon^{s_2}x_2) = \varepsilon^k a(x_1, x_2), \quad \forall \varepsilon > 0,$$

где s_1 и s_2 – целые числа. Были найдены необходимые и достаточные условия стабилизируемости для случая нечетных s_1 или k , а также для случая $s_2 \neq 1$.

Без предположения $g(0) \neq 0$ в работе [199] были выведены необходимые условия глобальной стабилизируемости в классе однородных функций обратной связи для системы следующего вида

$$\begin{aligned} \dot{x}_1 &= \mathcal{P}_1(x_1, x_2) + \mathcal{L}_1(x_1, x_2)u; \\ \dot{x}_2 &= \mathcal{P}_2(x_1, x_2) + \mathcal{L}_2(x_1, x_2)u, \end{aligned} \quad (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2, \quad u \in \mathbb{R},$$

где \mathcal{L}_1 и \mathcal{L}_2 – однородные полиномы степени q без общих линейных делителей, \mathcal{P}_1 и \mathcal{P}_2 – однородные полиномы нечетной степени s . В случае $s = 3$ и $q = 2$ в цитируемой работе получены алгебраически вычислимые необходимые и достаточные условия для глобальной асимптотической стабилизируемости.

Исследуем применимость теоремы 7.1 для получения новых условий стабилизируемости двумерных систем. С этой целью рассмотрим систему с фазовым вектором на комплексной плоскости следующего вида:

$$\dot{z} = f_0 z^s + u g_0 z^q, \quad z \in \mathbb{C}, \quad u \in [-1, 1], \quad (7.9)$$

где $z = x_1 + ix_2$, $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$, $i^2 = -1$, f_0 и g_0 – ненулевые комплексные константы, s и q – положительные целые числа. Обозначим $\varphi_0 = \arg f_0$, $\gamma_0 = \arg g_0$. В развернутом виде уравнения системы (7.9) относительно вещественных координат x_1 и x_2 запишутся следующим образом:

$$\dot{x}_1 = |f_0| \left(\cos \varphi_0 \sum_{j=0}^{\lfloor s/2 \rfloor} (-1)^j C_s^{2j} x_1^{s-2j} x_2^{2j} - \sin \varphi_0 \sum_{j=0}^{\lfloor (s-1)/2 \rfloor} (-1)^j C_s^{2j+1} x_1^{s-2j-1} x_2^{2j+1} \right) +$$

$$\begin{aligned}
& +u|g_0| \left(\cos \gamma_0 \sum_{j=0}^{[q/2]} (-1)^j C_q^{2j} x_1^{q-2j} x_2^{2j} - \sin \gamma_0 \sum_{j=0}^{[(q-1)/2]} (-1)^j C_q^{2j+1} x_1^{q-2j-1} x_2^{2j+1} \right); \\
\dot{x}_2 = & |f_0| \left(\sin \varphi_0 \sum_{j=0}^{[s/2]} (-1)^j C_s^{2j} x_1^{s-2j} x_2^{2j} + \cos \varphi_0 \sum_{j=0}^{[(s-1)/2]} (-1)^j C_s^{2j+1} x_1^{s-2j-1} x_2^{2j+1} \right) + \\
& +u|g_0| \left(\sin \gamma_0 \sum_{j=0}^{[q/2]} (-1)^j C_q^{2j} x_1^{q-2j} x_2^{2j} + \cos \gamma_0 \sum_{j=0}^{[(q-1)/2]} (-1)^j C_q^{2j+1} x_1^{q-2j-1} x_2^{2j+1} \right),
\end{aligned}$$

где $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

Сформулируем основной результат о стабилизируемости этой системы.

Теорема 7.2. [9] Система (7.9) стабилизируема при выполнении любого из условий (S1)-(S5):

$$(S1) \quad q = s = 1, |g_0 \cos \gamma_0| > |f_0| \cos \varphi_0;$$

$$(S2) \quad s > q = 1, \gamma_0 \neq \frac{\pi}{2} \pmod{\pi};$$

$$(S3) \quad q > s = 1, \cos \varphi_0 < 0;$$

$$(S4) \quad q > 1, s \geq 2q - 1, k_0 = \frac{s-1}{q-1} - \text{четное целое}, (-1)^{k_0/2} \cos(\varphi_0 - k_0 \gamma_0) < 0;$$

$$(S5) \quad q = 3, s \geq 7, k_0 = \frac{s-1}{2} - \text{нечетное целое}, \varphi_0 - k_0 \gamma_0 \neq \frac{\pi}{2} \pmod{\pi},$$

$$k_0 > 3 \text{ или } |\sin(\varphi_0 - k_0 \gamma_0)| < \sin \left(\frac{k_0 - 1}{6} \pi \right).$$

Система (7.9) не стабилизируема, если выполнено какое-либо из условий (N1)-(N3):

$$(N1) \quad q = s = 1, |g_0 \cos \gamma_0| < |f_0| \cos \varphi_0;$$

$$(N2) \quad q > s = 1, \cos \varphi_0 > 0;$$

$$(N3) \quad 2q - 1 > s > 1.$$

Доказательство этой теоремы приведено ниже.

Отождествим координаты (p_1, p_2) с комплексным числом $p = p_1 + ip_2$ и воспользуемся формулами (7.5) для вычисления символов аффинной по управлению системы (7.9):

$$S_1(p, z) = 2 \langle p, f_0 z^s \rangle = 2 \operatorname{Re} (\bar{p} f_0 z^s);$$

$$S_2(p, z) = 2 \langle p, f_0 z^s \rangle^2 + 2 \langle p, g_0 z^q \rangle^2 = 2 (\operatorname{Re} (\bar{p} f_0 z^s))^2 + 2 (\operatorname{Re} (\bar{p} g_0 z^q))^2.$$

Перепишем эти выражения следующим образом:

$$\begin{aligned} S_1 &= 2 \operatorname{Re} (|p f_0 z^s| e^{i(s\theta - \psi + \varphi_0)}) = 2|p| \cdot |f_0| \cdot |z|^s \cos(s\theta - \psi + \varphi_0); \\ S_2 &= 2 \left(\operatorname{Re} (|p f_0 z^s| e^{i(s\theta - \psi + \varphi_0)}) \right)^2 + 2 \left(\operatorname{Re} (|p g_0 z^q| e^{i(q\theta - \psi + \gamma_0)}) \right)^2 = \\ &= 2|p|^2 (|f_0|^2 |z|^{2s} \cos^2(s\theta - \psi + \varphi_0) + |g_0|^2 |z|^{2q} \cos^2(q\theta - \psi + \gamma_0)), \end{aligned}$$

где $\theta \in \operatorname{Arg} z$, $\psi \in \operatorname{Arg} p$. Многозначное отображение (7.6) примет вид

$$K(z) = \{p \in \mathbb{C} \setminus \{0\} : \frac{|g_0|}{|f_0|} |z|^{q-s} |\cos(q\theta - \psi + \gamma_0)| > \cos(s\theta - \psi + \varphi_0)\}$$

при $z \neq 0$, и $K(0) = \emptyset$. Предположим, что существует непрерывная функция $p(z) \in K(z)$, определенная на сфере $S_\varepsilon = \{z : |z| = \varepsilon\}$ при некотором $\varepsilon > 0$. Параметризуем S_ε с помощью полярного угла $\theta \in [0, 2\pi)$ и рассмотрим непрерывную ветвь $\psi(\theta)$ многозначной функции $\operatorname{Arg} p(z)$. Тогда условие $p(z) \in K(z)$ на S_ε приводится к виду:

$$\frac{|g_0|}{|f_0|} \varepsilon^{q-s} |\cos(q\theta - \psi(\theta) + \gamma_0)| > \cos(s\theta - \psi(\theta) + \varphi_0), \quad \theta \in [0, 2\pi]. \quad (7.10)$$

Положим

$$\psi(2\pi) = \lim_{\theta \uparrow 2\pi} \psi(\theta).$$

Тогда условие (C1) теоремы 7.1 сведется к следующему (см. [188, с. 17]):

$$\psi(2\pi) - \psi(0) = 2\pi. \quad (7.11)$$

Условие (C2) эквивалентно равенству

$$\int_0^{2\pi} r(\theta) \sin(\psi(\theta) - \theta) d\theta = 0, \quad (7.12)$$

где $r(\theta) = |p(\varepsilon e^{i\theta})| > 0$. Условие (C3) означает существование дифференцируемых функций $\tilde{r}(\rho, \theta)$ и $\tilde{\psi}(\rho, \theta)$ на множестве $[0, \varepsilon] \times [0, 2\pi]$, таких, что

$$\tilde{r}(\varepsilon, \theta) = r(\theta), \quad \tilde{\psi}(\varepsilon, \theta) = \psi(\theta), \quad \theta \in [0, 2\pi]$$

и

$$\rho \left(\cos \theta \frac{\partial}{\partial \rho} (\tilde{r} \sin \tilde{\psi}) - \sin \theta \frac{\partial}{\partial \rho} (\tilde{r} \cos \tilde{\psi}) \right) = \cos \theta \frac{\partial}{\partial \theta} (\tilde{r} \cos \tilde{\psi}) + \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} (\tilde{r} \sin \tilde{\psi}). \quad (7.13)$$

Формула (7.13) получена из (C3) путем замены переменных $x_1 = \rho \cos \theta$, $x_2 = \rho \sin \theta$ и вычисления частных производных.

7.3.1 Стабилизируемость при наличии линейных членов

Для анализа условий стабилизируемости (7.10)-(7.13), рассмотрим сначала случай линейной функции $\psi(\theta)$. Тогда из (7.11) следует $\psi(\theta) = \theta + \psi_0$ при некоторой константе ψ_0 , а условие (7.12) выполнено только при

$$\psi_0 \equiv 0 \pmod{\pi}. \quad (7.14)$$

Условие (7.12) выполнено для любой функции $r(\theta)$ в случае (7.14). Для решения уравнения (7.13) положим $\tilde{\psi}(\rho, \theta) = \theta + \psi_0$. Тогда общее решение уравнения (7.13) относительно \tilde{r} запишется следующим образом

$$\tilde{r}(\rho, \theta) = \frac{1}{\rho} \tilde{\Phi}(\rho^{\cos \psi_0} e^{\theta \sin \psi_0}), \quad \rho > 0,$$

где $\tilde{\Phi}$ – произвольная дифференцируемая функция. Эта формула примет вид $\tilde{r}(\rho, \theta) = \Phi(\rho)$ с учетом равенства (7.14). В частности, можно положить $\tilde{r}(\rho, \theta) = \rho$. Тогда для проверки условия (C4) выразим $p_1 = \tilde{r} \cos \tilde{\psi}$ и $p_2 = \tilde{r} \sin \tilde{\psi}$ через координаты $x_1 = \rho \cos \theta$ и $x_2 = \rho \sin \theta$. Непосредственные вычисления показывают, что

$$p_1 = (-1)^{\psi_0/\pi} x_1, \quad p_2 = (-1)^{\psi_0/\pi} x_2.$$

Интегрируя выражение $p_1 dx_1 + p_2 dx_2$ в формуле (C4), получим следующую функцию:

$$2V(x_1, x_2) = (-1)^{\psi_0/\pi} (x_1^2 + x_2^2). \quad (7.15)$$

Эта функция является определенно-положительной только при

$$\psi_0 \equiv 0 \pmod{2\pi}.$$

Следовательно, при сделанном выборе $\psi(\theta)$ условия (C1)-(C4) теоремы 7.1 выполнены при выполнении неравенства

$$\frac{|g_0|}{|f_0|} \varepsilon^{q-s} |\cos((q-1)\theta + \gamma_0)| > \cos((s-1)\theta + \varphi_0), \quad \theta \in [0, 2\pi]. \quad (7.16)$$

Нетрудно видеть, что неравенство (7.16) выполнено для достаточно малых $\varepsilon > 0$ при выполнении одного из следующих условий:

$$s = q = 1, \quad |g_0 \cos \gamma_0| > |f_0| \cos \varphi_0; \quad (7.17)$$

$$s > q = 1, \quad \cos \gamma_0 \neq 0; \quad (7.18)$$

$$q > s = 1, \quad \cos \varphi_0 < 0. \quad (7.19)$$

Таким образом, каждое из условий (7.17), (7.18), (7.19) является достаточным условием стабилизируемости системы (7.9) согласно теореме 7.1.

С другой стороны, если

$$(s = q = 1, \quad |g_0 \cos \gamma_0| < |f_0| \cos \varphi_0) \quad \text{или} \quad (q > s = 1, \quad \cos \varphi_0 > 0), \quad (7.20)$$

то условие (7.16) нарушается при каждом θ для достаточно малых $\varepsilon > 0$. Это означает, что из условия (7.20) следует

$$H_{\min}(\nabla V(x), x) > 0 \quad \text{при} \quad 0 < \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \leq \varepsilon,$$

где функция V задана формулой (7.15) с $\psi_0 = 0$. Итак, производная функции V в силу системы (7.9) является определенно-отрицательной для любой допустимой обратной связи $u(x_1, x_2)$ в случае (7.20), следовательно, рассматриваемая система нестабилизируема по первой теореме Ляпунова о неустойчивости (см. [156, с. 89]).

7.3.2 Случай $2q - 1 > s > 1$.

Предположим, что система (7.9) стабилизируема и $q > 1$. Покажем, что в этом случае необходимые условия (7.10), (7.11) нарушаются. Рассмотрим непрерывную функцию

$$\alpha(\theta) = q\theta - \psi(\theta) + \gamma_0.$$

Поскольку $\psi(\theta)$ удовлетворяет условию (7.11), то

$$\alpha(2\pi) - \alpha(0) = 2(q-1)\pi.$$

Следовательно,

$$I = [\alpha(0), \alpha(0) + 2(q-1)\pi] = [\alpha(0), \alpha(2\pi)] \subseteq \alpha([0, 2\pi]). \quad (7.21)$$

Уравнение $\cos \alpha = 0$ имеет в точности $2(q-1)$ решений на множестве I . Отсюда с учетом включения в (7.21) следует, что существуют числа $\alpha_k = \alpha(\theta_k)$ для некоторых θ_k : $0 \leq \theta_1 < \dots < \theta_{2(q-1)} < 2\pi$ такие, что

$$\{\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2(q-1)}\} \subset I, \quad \cos \alpha_1 = 0, \quad \alpha_{k+1} - \alpha_k = \pi$$

для всех $k = 1, 2, \dots, 2q-3$. Из неравенства (7.10) следует, что

$$\cos(s\theta_k - \psi(\theta_k) + \varphi_0) < 0.$$

Последнее неравенство можно переписать в виде

$$\cos(\alpha_k + (s-q)\theta_k + \varphi_0 - \gamma_0) < 0.$$

Далее, поскольку $\cos \alpha_k = 0$, то

$$(-1)^k \sin \alpha_1 \sin((s-q)\theta_k + \varphi_0 - \gamma_0) < 0, \quad k = 1, 2, \dots, 2(q-1),$$

где $\sin \alpha_1 = \pm 1$. Из полученного неравенства следует существование монотонной последовательности чисел $\xi_k = (s-q)\theta_k + \varphi_0 - \gamma_0$, которые принадлежат полуинтервалу длины $2|s-q|\pi$, при этом $\sin \xi_k$ — знакопеременная последовательность для $k = 1, 2, \dots, 2(q-1)$. Такое количество точек ξ_k невозможно разместить на полуинтервале длины $2|s-q|\pi$ если $q-1 > |s-q|$. Следовательно, система (7.9) нестабилизируема в случае $2q-1 > s > 1$.

7.3.3 Случай $1 < 2q-1 \leq s$.

Для анализа условий стабилизируемости запишем неравенство (7.10) следующим образом

$$\kappa(\varepsilon) |\cos \alpha(\theta)| > \cos(k_0 \alpha(\theta) + \delta(\theta)), \quad \theta \in [0, 2\pi], \quad (7.22)$$

где $k_0 = \frac{s-1}{q-1} \geq 2$, $\delta(\theta) = \varphi_0 - k_0\gamma_0 + (k_0 - 1)(\psi(\theta) - \theta)$, и

$$\kappa(\varepsilon) = \frac{|g_0|}{|f_0|} \varepsilon^{q-s} \rightarrow +\infty \text{ при } \varepsilon \rightarrow +0.$$

Для дальнейшего исследования докажем вспомогательную лемму.

Лемма 7.1. Пусть $y, z : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^1$ – непрерывные функции, и пусть $y(\theta) \geq 0$ для всех $\theta \in [a, b]$. Тогда неравенство

$$\kappa y(\theta) > z(\theta), \quad \theta \in [a, b] \quad (7.23)$$

выполнено для всех достаточно больших $\kappa > 0$ если и только если

$$z(\theta) < 0 \text{ на множестве } S_0 = \{\theta \in [a, b] \mid y(\theta) = 0\}. \quad (7.24)$$

Доказательство. Часть утверждения леммы, относящаяся к “только если”, очевидна. Поскольку S_0 – компакт, то из (7.24) следует неравенство

$$\sup_{\theta \in S_0} z(\theta) < 0.$$

Это означает, что существует такая окрестность $B \subseteq [a, b]$ множества S_0 , что $z(\theta) < 0$ на B , и, кроме того, либо $B = [a, b]$ либо

$$\inf_{\theta \in [a, b] \setminus B} y(\theta) = y_* > 0.$$

Из приведенной формулы следует неравенство (7.23) при выполнении условия

$$\kappa > \frac{1}{y_*} \sup_{\theta \in [a, b] \setminus B} z(\theta).$$

Лемма доказана.

Воспользуемся леммой 7.1 с $y(\theta) = |\cos \alpha(\theta)|$ и $z(\theta) = \cos(k_0\alpha(\theta) + \delta(\theta))$. Из леммы 7.1 следует, что при достаточно малых $\varepsilon > 0$ неравенство (7.22) эквивалентно следующей импликации:

$$\theta \in [0, 2\pi], \cos \alpha(\theta) = 0 \quad \Rightarrow \quad \cos(k_0\alpha(\theta) + \delta(\theta)) < 0. \quad (7.25)$$

Предположим, что k_0 – целое число. Для упрощения правой части выражения (7.25) воспользуемся следующими формулами при $\cos \alpha = 0$:

$$\sin(k_0\alpha) = \begin{cases} \sin^{k_0} \alpha, & k_0 \equiv 1 \pmod{4}; \\ -\sin^{k_0} \alpha, & k_0 \equiv 3 \pmod{4}; \\ 0, & k_0 \text{ – четно,} \end{cases}$$

$$\cos(k_0\alpha) = \begin{cases} \sin^{k_0} \alpha, & k_0 \equiv 0 \pmod{4}; \\ -\sin^{k_0} \alpha, & k_0 \equiv 2 \pmod{4}; \\ 0, & k_0 \text{ – нечетно.} \end{cases}$$

В результате (7.22) сведется к следующим условиям:

$$\begin{aligned} \text{случай } k_0 \equiv 0 \pmod{4} : & \cos \delta(\theta) < 0 \text{ если } \cos \alpha(\theta) = 0; \\ \text{случай } k_0 \equiv 1 \pmod{4} : & \sin^{k_0} \alpha(\theta) \sin \delta(\theta) > 0 \text{ если } \cos \alpha(\theta) = 0; \\ \text{случай } k_0 \equiv 2 \pmod{4} : & \cos \delta(\theta) > 0 \text{ если } \cos \alpha(\theta) = 0; \\ \text{случай } k_0 \equiv 3 \pmod{4} : & \sin^{k_0} \alpha(\theta) \sin \delta(\theta) < 0 \text{ если } \cos \alpha(\theta) = 0. \end{aligned} \quad (7.26)$$

Проверим, возможно ли удовлетворить условиям (7.26) с помощью линейной функции $\psi(\theta) = \theta + \psi(0)$; тогда $\delta(\theta) = \varphi_0 - k_0\gamma_0 + (k_0 - 1)\psi(0)$ – константа. Как и в предыдущем подразделе, рассмотрим функцию Ляпунова вида (7.15) если $\psi(0) = 0$. Тогда если условие (7.26) выполнено с $\delta(\theta) = \varphi_0 - k_0\gamma_0$ для четного k_0 , то система (7.9) стабилизируема по теореме 7.1.

В случае нечетного k_0 условия (7.26) не могут быть выполнены при постоянном δ , ибо $\sin^{k_0} \alpha$ принимает значения ± 1 если

$$\cos \alpha = 0, \quad \alpha \in [\gamma_0 - \psi_0, 2(q-1)\pi + \gamma_0 - \psi_0].$$

Это означает, что для дальнейшего анализа необходимо привлекать нелинейные решения $\psi(\theta)$ неравенства (7.10). С этой целью определим функцию $\psi_k : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ следующим образом:

$$\psi_k(\theta) = \arctan(k \tan \theta), \quad \text{for } \theta \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right), \quad k > 0.$$

$$\psi_k\left(\frac{\pi n}{2}\right) = \frac{\pi n}{2}, \quad \text{for all } n \in \mathbb{Z},$$

$$\psi_k(\theta + \pi) = \pi + \psi_k(\theta). \quad (7.27)$$

В частности, $\psi_k(\theta) = \theta$ при $k = 1$. График функции $\psi_k(\theta)$ показан на рис. 7.1.

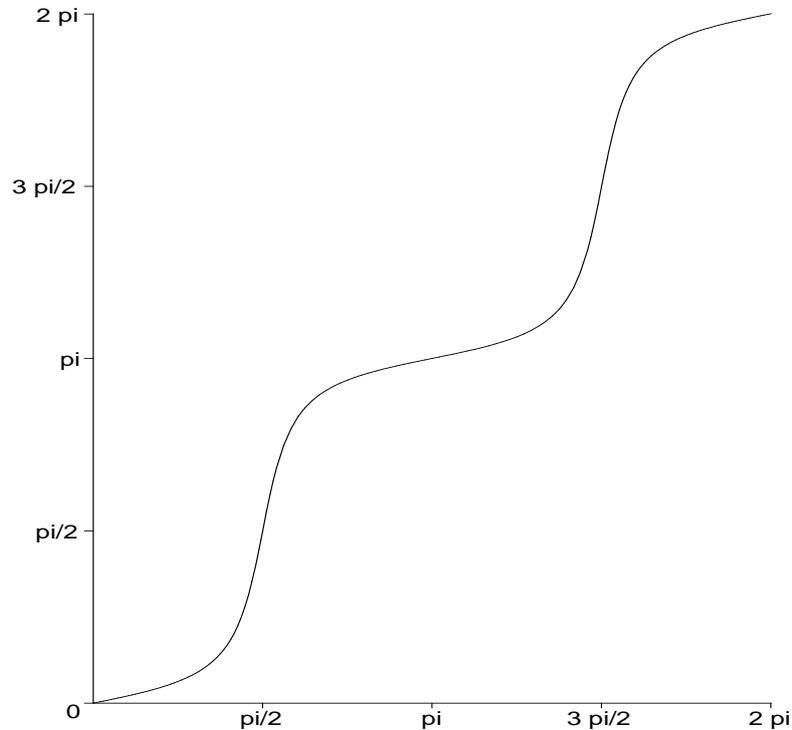


Рис. 7.1. График функции $\psi_k(\theta)$, $k < 1$.

Легко видеть, что $\psi_k(\cdot)$ – гладкая нечетная функция с областью определения \mathbb{R} , и обратная к ней представима в виде

$$\psi_k^{-1}(y) = \psi_{1/k}(y) = \psi_k\left(y + \frac{\pi}{2}\right) - \frac{\pi}{2}.$$

Из свойства (7.27) вытекает, что функция

$$\psi(\theta) = \psi_k(\theta - \theta_0) + \theta_0 \quad (7.28)$$

удовлетворяет условию (7.11) для любых $\theta_0 \in \mathbb{R}$ и $k > 0$. Для решения неравенства (7.22) на отрезке $[0, 2\pi]$ изучим сначала поведение функции (7.28) на всей числовой оси \mathbb{R} . Очевидно, что $\nu(\theta) = \psi(\theta) - \theta \in (-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ обращается в нуль при

$$\theta_n = \theta_0 + \frac{\pi n}{2}, \quad n \in \mathbb{Z}. \quad (7.29)$$

Кроме того, $\nu(\theta)$ – π -периодична, а $\nu(\theta - \theta_n)$ – нечетна при любом n . В нашем случае

$$\alpha(\theta) = (q - 1)\theta - \nu(\theta) + \gamma_0.$$

Следовательно, $\sin \alpha(\theta_n) = 0$ при выполнении следующих условий: q – нечетно и $(q - 1)\theta_0 = -\gamma_0$.

Сформулируем и докажем вспомогательную лемму.

Лемма 7.2. Пусть $\psi(\theta)$ – функция вида (7.28), и пусть $k \neq 1$, $q = 3$, $2\theta_0 = -\gamma_0$. Тогда в каждом интервале (θ_n, θ_{n+1}) существует такое число $\bar{\theta}_n \in (\theta_n, \theta_{n+1})$, что $|\sin \alpha(\bar{\theta}_n)| = 1$. Указанное $\bar{\theta}_n$ определяется единственным образом и удовлетворяет неравенству

$$(k - 1)\nu(\bar{\theta}_n) \sin \alpha(\bar{\theta}_n) > 0. \quad (7.30)$$

Кроме того, $h(k) := |\nu(\bar{\theta}_n)|$ не зависит от n ,

$$\lim_{k \rightarrow 1} h(k) = 0, \quad \lim_{k \rightarrow +0} h(k) = \lim_{k \rightarrow +\infty} h(k) = \frac{\pi}{6}. \quad (7.31)$$

Доказательство. С помощью непосредственных вычислений получаем $\alpha(\theta_n) = \pi n$, $\alpha(\theta_{n+1}) = \pi(n + 1)$,

$$\left(n - \frac{1}{2}\right)\pi < \alpha(\theta) < \left(n + \frac{3}{2}\right)\pi \quad \text{при } \theta \in [\theta_n, \theta_{n+1}]. \quad (7.32)$$

Отсюда следует, что

$$\max_{\theta \in [\theta_n, \theta_{n+1}]} |\sin \alpha(\theta)| = 1,$$

при этом максимум достигается в некоторой точке $\bar{\theta}_n \in (\theta_n, \theta_{n+1})$. Из оценки (7.32) вытекает, что $\alpha(\bar{\theta}_n) = (n + \frac{1}{2})\pi$, поэтому

$$\sin \alpha(\bar{\theta}_n) = (-1)^n. \quad (7.33)$$

Покажем, что такое $\bar{\theta}_n$ определено единственным образом. С этой целью вычислим вторую производную функции $\alpha(\theta)$:

$$\alpha''(\theta) = -\nu''(\theta) = -\psi''(\theta) = \frac{k(k^2 - 1) \sin 2(\theta - \theta_0)}{(\cos^2(\theta - \theta_0) + k^2 \sin^2(\theta - \theta_0))^2}. \quad (7.34)$$

С учетом формулы (7.29) приходим к выводу, что $\alpha''(\theta)$ сохраняет знак на интервале (θ_n, θ_{n+1}) . Поскольку каждая из функций $\alpha(\theta_n) < \alpha(\theta_{n+1})$ и $\alpha(\theta)$ является либо выпуклой, либо вогнутой на отрезке $[\theta_n, \theta_{n+1}]$, то прообраз каждого элемента множества $[\alpha(\theta_n), \alpha(\theta_{n+1})]$ состоит из одной точки. Итак, $\bar{\theta}_n$ определено единственным образом.

Равенства $\nu(\theta_n) = \nu(\theta_{n+1}) = 0$ и (7.34) дают представление

$$\text{sign } \nu(\theta) = (-1)^n \text{sign}(k - 1) \quad \text{на } (\theta_n, \theta_{n+1}).$$

Из приведенного выражения следует неравенство (7.30) с учетом (7.33).

Поскольку при любом n функции $\sin \alpha(\theta - \theta_n)$ и $\nu(\theta - \theta_n)$ – нечетны и π -периодичны, то число $h(k) = |\nu(\bar{\theta}_n)|$ не зависит от n . Для доказательства существования предела (7.31) отметим, что $\psi(\theta) \rightarrow \theta$ при $k \rightarrow 1$ равномерно в \mathbb{R} . Обозначим

$$\bar{\theta} = \begin{cases} \bar{\theta}_n - \theta_n, & \text{если } n \text{ — четно;} \\ \theta_{n+1} - \bar{\theta}_n, & \text{если } n \text{ — нечетно,} \end{cases} \quad \left(0 < \bar{\theta} < \frac{\pi}{2}\right).$$

Принимая во внимание свойства $\alpha(\bar{\theta}_n) = (n + \frac{1}{2})\pi$ и (7.27), получим следующее уравнение относительно $\bar{\theta}$:

$$\psi_k(\bar{\theta}) = 3\bar{\theta} - \frac{\pi}{2}. \quad (7.35)$$

Для любого $\theta \in (0, \frac{\pi}{2})$ имеют место предельные соотношения: $\psi_k(\theta) \rightarrow 0$ при $k \rightarrow 0$, а также $\psi_k(\theta) \rightarrow \frac{\pi}{2}$ при $k \rightarrow \infty$. Поскольку функция $\psi_k(\theta)$ монотонна по θ при фиксированном k (а также по $k \in (0, 1)$ и по $k \in (1, +\infty)$ при фиксированном θ), то

$$\bar{\theta} \in \left(\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{4}\right) \quad \text{при } k < 1, \quad \lim_{k \rightarrow +0} \bar{\theta} = \frac{\pi}{6},$$

$$\bar{\theta} \in \left(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{3}\right) \quad \text{при } k > 1, \quad \lim_{k \rightarrow +\infty} \bar{\theta} = \frac{\pi}{3},$$

где $\bar{\theta}$ – решение уравнения (7.35). Из полученных формул следует, что $|\nu(\bar{\theta})| \rightarrow \frac{\pi}{6}$ при $k \rightarrow 0$ и при $k \rightarrow \infty$. Отсюда с учетом периодичности ν следует утверждение леммы. Лемма 7.2 доказана.

Если k_0 нечетно и выполнены условия леммы 7.2, то условие (7.26) эквивалентно неравенству

$$(-1)^{[k_0/2]} \sin \alpha(\bar{\theta}_n) \cdot \sin(\varphi_0 - k_0\gamma_0 + (k_0 - 1)\nu(\bar{\theta}_n)) > 0, \quad \forall \bar{\theta}_n \in [0, 2\pi].$$

В соответствии с формулами (7.30) и (7.31), приведенное выше неравенство выполнено при некотором k только при условии, что существует такое $h \in (-\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{6})$, что

$$\sin(\varphi_0 - k_0\gamma_0 + (k_0 - 1)h) > 0, \quad \sin(\varphi_0 - k_0\gamma_0 - (k_0 - 1)h) < 0.$$

Это означает, что если

$$\varphi_0 - k_0\gamma_0 \not\equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi} \quad \text{и} \quad \left(k_0 > 3 \text{ или } |\sin(\varphi_0 - k_0\gamma_0)| < \sin\left(\frac{k_0 - 1}{6}\pi\right) \right), \quad (7.36)$$

то условие (7.26) выполнено в рассматриваемом случае. Таким образом, если условие (7.36) выполнено при нечетном k_0 и $q = 3$, то функция (7.28) удовлетворяет неравенству (7.10) при достаточно малых $\varepsilon > 0$.

Подставляя $\tilde{\psi}(\rho, \theta) = \psi(\theta)$ в (7.13), получим

$$\left(\rho \frac{\partial \tilde{r}}{\partial \rho} + \frac{k\tilde{r}}{\cos^2(\theta - \theta_0) + k^2 \sin^2(\theta - \theta_0)} \right) \tan(\psi - \theta) = \frac{\partial \tilde{r}}{\partial \theta},$$

если $\psi(\theta) - \theta \not\equiv \frac{\pi}{2} \pmod{\pi}$. Используя разложение

$$\begin{aligned} \tan(\psi - \theta) &= \tan(\psi_k(\theta - \theta_0) - (\theta - \theta_0)) = \frac{\tan \psi_k(\theta - \theta_0) - \tan(\theta - \theta_0)}{1 + \tan \psi_k(\theta - \theta_0) \cdot \tan \theta(\theta - \theta_0)} = \\ &= \frac{(k - 1) \tan(\theta - \theta_0)}{1 + k \tan^2(\theta - \theta_0)}, \end{aligned}$$

нетрудно проверить, что функция

$$\tilde{r}(\rho, \theta) = \rho \sqrt{\cos^2(\theta - \theta_0) + k^2 \sin^2(\theta - \theta_0)}$$

удовлетворяет уравнению (7.13) на $[0, \varepsilon] \times [0, 2\pi]$ при любом $\varepsilon > 0$. Запишем выражения для $p_1 = \tilde{r} \cos \tilde{\psi}$ и $p_2 = \tilde{r} \sin \tilde{\psi}$ в координатах $x_1 = \rho \cos \theta$ и $x_2 = \rho \sin \theta$:

$$\begin{aligned} p_1(x_1, x_2) &= (\cos^2 \theta_0 + k \sin^2 \theta_0)x_1 + (1 - k) \sin \theta_0 \cos \theta_0 \cdot x_2; \\ p_2(x_1, x_2) &= (1 - k) \sin \theta_0 \cos \theta_0 \cdot x_1 + (\sin^2 \theta_0 + k \cos^2 \theta_0)x_2. \end{aligned}$$

Интегрируя эти выражения, получим

$$\begin{aligned} V(x_1, x_2) &= \int_0^{x_1} p_1(\lambda, 0) d\lambda + \int_0^{x_2} p_2(x_1, \lambda) d\lambda = \\ &= \frac{1}{2}(\cos^2 \theta_0 + k \sin^2 \theta_0)x_1^2 + \frac{1-k}{2} \sin 2\theta_0 \cdot x_1 x_2 + \frac{1}{2}(\sin^2 \theta_0 + k \cos^2 \theta_0)x_2^2. \end{aligned}$$

Квадратичная форма $2V(x_1, x_2)$ является положительно-определенной по критерию Сильвестра:

$$\cos^2 \theta_0 + k \sin^2 \theta_0 > 0, \quad \begin{vmatrix} \cos^2 \theta_0 + k \sin^2 \theta_0 & (1-k) \sin \theta_0 \cos \theta_0 \\ (1-k) \sin \theta_0 \cos \theta_0 & \sin^2 \theta_0 + k \cos^2 \theta_0 \end{vmatrix} = k > 0.$$

Таким образом, если $q = 3$ и условие (7.36) выполнено при нечетном k_0 , то система (7.9) стабилизируема по теореме 7.1. Проведенные рассуждения доказывают теорему 7.2.

7.4 Выводы

В данном разделе диссертации предложен новый подход к решению задачи стабилизации нелинейных управляемых систем. Основным результатом в этом направлении сформулирован в виде теоремы 7.1. Выделим отдельные научные положения раздела 7.

1. В теореме 7.1 построение функции Ляпунова сведено к нахождению селектора многозначного отображения вида (7.6). Указанное многозначное отображение задается с помощью неравенств между символами — функциями, которые были предложены в работе В. Jakubczyk [151] для описания полной системы инвариантов нелинейных управляемых систем.
2. Если используемая в доказательстве теоремы 7.1 функция Ляпунова $V(x)$ удовлетворяет дополнительному свойству малости управления [194] и U — окрестность нуля, тогда выполнены условия теоремы [200], и стабилизирующая обратная связь $u = k(x)$ может быть построена с помощью явной формулы, использующей производные функции $V(x)$ в силу векторных полей системы (7.1).

3. В качестве приложения разработанного подхода для критических случаев теории устойчивости исследованы условия стабилизируемости двумерной нелинейной системы. Следует отметить, что полученные в теореме 7.2 условия стабилизируемости и нестабилизируемости применимы для существенно нелинейных систем со сколь угодно высокими степенями векторных полей. Таким образом, используемый в разделе 7 подход позволил получить новые условия разрешимости задачи стабилизации для двумерной системы с вырождающимся векторным полем при управлении, что расширяет возможность описания классов стабилизируемых систем по сравнению с работами ведущих зарубежных специалистов [191], [196]-[199].

Результаты раздела опубликованы в журнальной статье [9] и докладывались на международных конференциях и семинарах [34, 35].

8 Заключительные выводы

В диссертации решена проблема стабилизации движения моделей управляемых механических систем с учетом бесконечного спектра упругих колебаний. Задачи устойчивости и управления рассмотрены в строгой математической постановке с использованием теории непрерывных полугрупп операторов в банаховых пространствах, прямого метода Ляпунова, методов вариационного исчисления, теории степени отображения. Развитые в диссертационной работе методы позволили построить функции управления в явном виде для задач частичной стабилизации, сильной стабилизации, приближенной управляемости. Перечислим наиболее существенные результаты диссертации.

1. Впервые получены достаточные условия частичной асимптотической устойчивости динамической системы с многозначным потоком решений на метрическом пространстве (подраздел 2.1). Для динамической

системы, определяемой нелинейным автономным дифференциальным уравнением в банаховом пространстве, доказано обобщение теоремы Барбашина – Красовского об асимптотической устойчивости по отношению к непрерывному функционалу (подраздел 2.2).

2. Прямой метод Ляпунова впервые использован для описания условий относительной компактности полутраекторий нелинейной системы в банаховом пространстве. Получены новые достаточные условия относительной компактности полутраекторий дифференциального уравнения с нелинейной и немонотонной правой частью (подраздел 2.3). Этот результат использован при синтезе функционалов управления с обратной связью для уравнений движения механических систем с упругими элементами.
3. Исследована модель управляемого вращения спутника с упругими антеннами в виде твердого тела с произвольным числом упругих балок Эйлера – Бернулли. Движение рассматриваемой модели описывается бесконечной системой обыкновенных дифференциальных уравнений с одномерным управлением (подраздел 3.1).

В случае балок с одинаковыми механическими параметрами положение равновесия исследуемой системы не является асимптотически устойчивым. В этом случае решена задача частичной стабилизации, т.е. стабилизации ориентации тела-носителя с затуханием “усредненных” модальных координат, которые соответствуют колебаниям стержней (подраздел 3.4).

Для системы с нерезонансными параметрами доказана приближенная управляемость в гильбертовом пространстве и построен функционал управления, который обеспечивает сильную асимптотическую устойчивость положения равновесия (подразделы 3.2–3.3). Приведены результаты численного интегрирования подсистемы с пятью модами для модели с двумя балками (подраздел 3.5). Эти результаты подтвержда-

- ют применимость полученного управления для задачи стабилизации даже при достаточно больших начальных возмущениях угла ориентации твердого тела.
4. Предложена явная схема сведения конечномерной модели механической системы с упругой балкой к стандартной канонической форме – форме Бруновского (подраздел 4.1). Такое сведение позволяет конструктивно определить управление, переводящее систему из произвольного начального состояния в наперед заданное конечное при любом числе обобщенных модальных координат N (подразделы 4.1 и 4.3). Этот результат является окончательным, поскольку доказано, что нелинейное возмущение рассмотренной системы не приводится к стандартной канонической форме (подраздел 4.2). Получена оценка решений бесконечномерной системы при использовании оптимального управления, соответствующего подсистеме с конечным числом степеней свободы (подраздел 4.4). Доказано, что предложенное семейство управлений позволяет решить задачу приближенной управляемости для модели колебаний твердого тела с упругой балкой Эйлера – Бернулли (подраздел 4.5).
 5. С использованием вариационного принципа Гамильтона – Остроградского выведены дифференциальные уравнения пространственного движения управляемого робота-манипулятора, состоящего из нескольких упругих звеньев и твердых тел. Рассмотрена модель с телескопической раздвижкой звеньев под действием управляющих сил (подразделы 5.1–5.3), а также модель гибкого манипулятора, у которого соседние звенья связаны шарнирами (подраздел 5.7). Такие шарниры реализуют упругие восстанавливающие моменты, направленные на совмещение линий прогиба соседних звеньев. Для описания деформации звеньев манипулятора отдельно рассмотрены модели балок Эйлера – Бернулли и Тимошенко.

6. Для манипулятора с одним звеном в виде балки Эйлера – Бернулли предложено сведение линеаризованных уравнений движения с частными производными к системе двух дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве. Одно из уравнений системы описывает горизонтальные колебания манипулятора, другое – вертикальные. Для каждого из рассмотренных уравнений построено управление с обратной связью, обеспечивающее устойчивость по Ляпунову положения равновесия. Доказана сильная асимптотическая устойчивость подсистемы с обратной связью, которая соответствует колебаниям в вертикальной плоскости (подразделы 5.4–5.6).
7. Для манипуляторов с балками Эйлера – Бернулли и Тимошенко методом Галеркина построены приближенные математические модели в виде систем обыкновенных дифференциальных уравнений (подразделы 5.7, 6.1–6.2, 6.4). Параметры таких систем определяются в терминах собственных значений и собственных функций соответствующей задачи Штурма – Лиувилля. Впервые проведено полное исследование асимптотического распределения собственных значений строгими аналитическими методами для случая произвольных значений коэффициентов модели однородной балки Тимошенко, связанной с твердым телом. Результат этого исследования может быть использован для оценки неизвестных механических параметров системы при наличии информации о спектре собственных частот колебаний (подраздел 6.3).
8. Получены условия локальной управляемости для приближенных по Галеркину систем в окрестности положения равновесия (подраздел 6.5). Доказана стабилизируемость и предложена явная схема синтеза управления с обратной связью по состоянию. Получены условия наблюдаемости системы по измерениям угла наклона и показаниям датчика деформаций в фиксированной точке балки (подраздел 6.6).

Для модели балки Тимошенко предложена схема стабилизации положения равновесия с использованием динамического наблюдателя в цепи обратной связи. Доказано, что такой подход обеспечивает асимптотическую устойчивость невозмущенного решения приближенной по Галеркину системы с произвольным числом степеней свободы (подраздел 6.6). Результаты вычислений иллюстрируют эффективность предложенного управления (подраздел 6.7).

9. Предложен новый подход к исследованию условий стабилизируемости нелинейной управляемой системы с использованием критических гамильтонианов. Такие критические гамильтонианы введены в теории оптимального управления для решения задачи оптимального быстрого действия, а их симметрические функции – символы – использованы в работах В. Jakubczyk для описания инвариантов нелинейных систем. В седьмом разделе диссертации доказано, что символы определяют необходимые, а также достаточные условия стабилизируемости нелинейной системы с ограничением на управление. Получены условия стабилизируемости аффинной по управлению нелинейной системы, которая определяется двумя однородными векторными полями (раздел 7).

Сравнительный анализ полученных результатов и сопоставление с известными публикациями проведено в тексте диссертации и выводах из соответствующих разделов. Результаты разделов 2 и 7 составляют теоретическую базу проводимых в диссертации исследований задач стабилизации конечномерных и бесконечномерных моделей движения механических систем. Результаты разделов 3 и 4 могут быть рекомендованы к применению в инженерной практике при проектировании систем управления космическими аппаратами с упругими элементами. Разработанные в разделах 5 и 6 математические модели и методы построения функций управления могут быть использованы при создании алгоритмического обеспечения современных роботов-манипуляторов с упругими звеньями.

Список литературы

- [1] Эйлер Л. *Метод нахождения кривых, обладающих свойствами максимума или минимума, или решение изопериметрической задачи, принимаемой в самом широком смысле* / Леонард Эйлер. — М.-Л.: Гостехтеориздат, 1934. — 600 с. — (Классики естествознания).
- [2] Тимошенко С.П. *Статические и динамические проблемы теории упругости* / Степан Прокофьевич Тимошенко. — К.: Наук. думка, 1975. — 564 с.
- [3] Тимошенко С.П. *Колебания в инженерном деле* / Тимошенко С.П., Янг Д.Х., Уивер У.; пер. с англ. Л.Г. Корнейчука. — М.: Машиностроение, 1985. — 472 с.
- [4] Kovalev A.M. *The synthesis of stabilizing control of a rigid body with attached elastic elements* / A.M. Kovalev, A.L. Zuev, V.F. Shcherbak // Journal of Automation and Information Sciences. — 2002. — Vol. 34, No. 11. — P. 1–10.
- [5] Зуев А.Л. *Стабилизация модели гибкого многозвенника с пассивными шарнирами* / А.Л. Зуев // Механика твердого тела. — 2004. — Вып. 34. — С. 180–188.
- [6] Зуев А.Л. *Моделирование пространственного упругого манипулятора с телескопическим движением звеньев* / А.Л. Зуев // Труды Института прикладной математики и механики НАН Украины. — 2005. — Т. 10. — С. 51–58.
- [7] Зуев А.Л. *Управление упругим манипулятором в рамках модели балки Тимошенко* / А.Л. Зуев // Прикладная механика. — 2005. — Т. 41. — № 12. — С. 107–115.

- [8] Zuyev A.L. *Partial asymptotic stabilization of nonlinear distributed parameter systems* / A.L. Zuyev // Automatica. — 2005. — Vol. 41. — No. 1. — P. 1–10.
- [9] Jakubczyk B. *Stabilizability conditions in terms of critical Hamiltonians and symbols* / B. Jakubczyk, A. Zuyev // Systems and Control Letters. — 2005. — Vol. 54. — P. 597–606.
- [10] Зуев А.Л. *Синтез динамического наблюдателя для модели упругого манипулятора* / А.Л. Зуев // Механика твердого тела. — 2005. — Вып. 35. — С. 217–223.
- [11] Зуев А.Л. *Управление системой с упругими компонентами в нерезонансном случае* / А.Л. Зуев // Український математичний вісник. — 2006. — Т. 3. — № 1. — С. 89–103.
- [12] Зуев А.Л. *Частичная асимптотическая устойчивость абстрактных дифференциальных уравнений* / А.Л. Зуев // Український математичний журнал. — 2006. — Т. 58. — № 5. — С. 629–637.
- [13] Зуев А.Л. *Стабилизация модели манипулятора с наблюдателем в цепи обратной связи* / А.Л. Зуев // Вісник Донецького університету, Сер. А: Природничі науки. — 2006. — Вып. 1 — С. 33–39.
- [14] Зуев А.Л. *Асимптотические свойства собственных значений в задаче о колебании упругого манипулятора* / А.Л. Зуев // Механика твердого тела. — 2006. — Вып. 36. — С. 114–122.
- [15] Зуев А.Л. *Управление упругими колебаниями с использованием канонической формы* / А.Л. Зуев // Динамические системы. — 2006. — Вып. 20. — С. 27–34.
- [16] Зуев А.Л. *О линеаризации управляемой системы с модальными координатами* / А.Л. Зуев // Труды Института прикладной математики и механики НАН Украины. — 2006. — Т. 13. — С. 97–102.

- [17] Зуев А.Л. *Об относительной компактности траекторий дифференциальных уравнений в банаховом пространстве* / А.Л. Зуев // Доповіді НАН України. — 2007. — № 2. — С. 7–12.
- [18] Зуев А.Л. *Оптимальное управление в задаче о колебаниях упругой системы* / А.Л. Зуев // Динамические системы. — 2007. — Вып. 22. — С. 37–45.
- [19] Zuyev A. *Stabilization and observability of a rotating Timoshenko beam model* / A. Zuyev, O. Sawodny // Mathematical Problems in Engineering. — 2007. — Vol. 07. — Id. 57.238. — P. 1–19.
- [20] Зуев А.Л. *Приближенная управляемость упругой системы с обобщенными координатами* / А.Л. Зуев // Труды Института прикладной математики и механики НАН Украины. — 2007. — Т. 14. — С. 89–96.
- [21] Зуев А.Л. *Об условиях приближенной управляемости в классе управлений специального вида* / А.Л. Зуев // Вісник Донецького університету, Сер. А: Природничі науки. — 2007. — Вип. 1. — С. 41–45.
- [22] Зуєв О.Л. *Стабілізація просторових коливань моделі пружної системи* / О.Л. Зуєв // Вісник Київського університету імені Тараса Шевченка, Серія: фізико-математичні науки. — 2007. — Вип. 3. — С. 74–79.
- [23] Зуев А.Л. *Асимптотические свойства траекторий в задаче об управляемых колебаниях упругой балки* / А.Л. Зуев // Труды Института прикладной математики и механики НАН Украины. — 2007. — Т. 15. — С. 70–78.
- [24] Зуев А.Л. *Локализация предельного множества траекторий уравнения Эйлера – Бернулли с управлением* / А.Л. Зуев // Український математичний журнал. — 2008. — Т. 60. — № 2. — С. 173–182.

- [25] Zuyev A.L. *Motion planning and partial stabilization of infinite-dimensional systems* / A.L. Zuyev // Proc. 2nd International Workshop on Robot Motion and Control (RoMoCo'01): 18-20 Oct. 2001. — Poznań: Poznań University of Technology, 2001. — P. 129–133.
- [26] Zuyev A.L. *Partial stabilization of a rigid body with several elastic beams* / A.L. Zuyev // Proc. 15th IFAC World Congress: 21-26 July 2002. — Barcelona: Elsevier, 2002. — Vol. D. — P. 139–144.
- [27] Zuyev A.L. *Controllability analysis and motion planning of a planar hybrid system* / A.L. Zuyev // Устойчивость, управление и динамика твердого тела (ICSCD'02): 8 Междунар. конф., 3-7 сент. 2002 г.: тезисы докл. — Донецк: ИПММ НАН Украины, 2002. — С. 58.
- [28] Zuyev A.L. *Strong partial stabilization of infinite dimensional systems with application to flexible manipulators* / A.L. Zuyev // Dynamical System Modeling and Stability Investigation (DSMSI-2003): XI Междунар. конф., 27-30 мая 2003 г.: тезисы докл. — Киев: Киевский национальный университет им. Т.Шевченко, 2003. — С. 385.
- [29] Zuyev A.L. *Stabilization of a Multi-Link Flexible Manipulator by Torque Control* / A.L. Zuyev // Proc. 48. Internationales Wissenschaftliches Kolloquium: 22-25 Sept. 2003. — Ilmenau: Technische Universität Ilmenau, 2003. — P. 679–684.
- [30] Zuyev A.L. *Partial asymptotic stability and stabilization of nonlinear abstract differential equations* / A.L. Zuyev // Proc. 42nd IEEE Conference on Decision and Control (CDC 2003): 9-12 Dec. 2003. — Maui (USA). — 2003. — P. 1321–1326.
- [31] Zuyev A. *On partial stabilization of a system of the Euler – Bernoulli beam equations* / Zuyev A. — Trieste: The Abdus Salam International Centre for Theoretical Physics, 2003. — 22 p. — (Препринт / The

Abdus Salam International Centre for Theoretical Physics, Trieste, Italy; IC/2003/150).

- [32] Zuyev A.L. *Stabilization of a space structure model with flexible beams* / A.L. Zuyev // Человек и Космос: VI Межд. конф., 14-16 апр. 2004 г.: тезисы докл. — Днепропетровск: НЦАОМУ, 2004. — С. 132.
- [33] Zuyev A.L. *Modeling and Observer-Based Stabilization of a Timoshenko Beam* / A.L. Zuyev // Устойчивость, управление и динамика твердого тела (ICSCD'05): 9 Междунар. конф., 1-6 сент. 2005 г.: тезисы докл. — Донецк: ИПММ НАН Украины, 2005. — С. 67–68.
- [34] Зуев А.Л. *Теория степени отображения и существование функции Ляпунова в задаче стабилизации* / А.Л. Зуев // Третья междунар. конф. по проблемам управления, 20-22 июня 2006 г.: тезисы докл. — Москва: ИПУ РАН, 2006. — Т. 1. — С. 40.
- [35] Зуев А.Л. *Критические гамильтонианы и управляемые функции Ляпунова в задаче стабилизации* / А.Л. Зуев // Метод функций Ляпунова и его приложения: VIII Крымская Междунар. матем. школа, 10-17 сент. 2006 г.: тезисы докл. — Симферополь: Таврический национальный ун-т, 2006. — С. 71.
- [36] Зуев А.Л. *Управление моделью гибкого манипулятора при неполных измерениях* / А.Л. Зуев // Моделирование, идентификация, синтез систем управления: 9-й Междунар. науч.-техн. конф., 16-23 сент. 2006 г.: тезисы докл. — Донецк: ИПММ НАН Украины, 2006. — С. 34–35.
- [37] Зуев А.Л. *Локализация предельного множества и предкомпактность траекторий дифференциальных уравнений в банаховом пространстве* / А.Л. Зуев // Нелинейный динамический анализ - 2007: Междунар. конгресс, 4-8 июня 2007 г.: тезисы докл. — С.-Петербург: С.-Петербургский гос. ун-т, 2007. — С. 93.

- [38] Зуев А.Л. *Управление моделью гибридной системы с упругими элементами* / А.Л. Зуев // Dynamical System Modelling and Stability Investigation (DSMSI-2007): Междунар. конф., 22-25 мая 2007 г.: тезисы докл. — Киев: Киевский национальный ун-т им. Т. Шевченко, 2007. — С. 293.
- [39] Зуев А.Л. *Метод точной линеаризации в оптимальном управлении системой с модальными координатами* / А.Л. Зуев // Классические задачи динамики твердого тела: Междунар. конф., 9-13 июня 2007 г.: тезисы докл. — Донецк: ИПММ НАН Украины, 2007. — С. 31–32.
- [40] Зуев А.Л. *Приближенное решение двухточечной задачи управления для класса бесконечномерных систем* / А.Л. Зуев // Автоматика-2007: XIV міжнар. конф., 10-14 вер. 2007 р.: матеріали конф. — Севастополь: СНУЯЕтаП, 2007. — Ч. 1. — С. 23–24.
- [41] Zuyev A.L. *Strong stabilization of a controlled Euler – Bernoulli equation with mixed boundary conditions* / A.L. Zuyev // Nonlinear Partial Differential Equations: Междунар. конф., 10-15 сент. 2007 г.: тезисы докл. — Донецк: ИПММ НАН Украины, 2007. — С. 78–79.
- [42] Григорьян А.Т. *Даниил Бернулли (1700–1782)* / А.Т. Григорьян, Б.Д. Ковалев. — М.: Наука, 1981. — 314 с.
- [43] Докучаев Л.В. *Нелинейная динамика летательных аппаратов с деформируемыми элементами* / Лев Викторович Докучаев. — М.: Машиностроение, 1987. — 232 с.
- [44] Кирхгоф Г. *Механика* / Густав Роберт Кирхгоф. — М.: Изд-во АН СССР. — 1962. — 402 с.
- [45] Крылов Н.М. *О разложении в ряды по фундаментальным функциям, встречаемых при интегрировании одного дифференциального*

- уравнения с частными производными 4-го порядка* / Н.М. Крылов. — К.: Типогр. Императ. Универ. Св. Владимира, 1911. — 103 с.
- [46] *Функциональный анализ* / [ред. С.Г. Крейн]. — 2-е изд. — М.: Наука, 1972. — 544 с.
- [47] Диментберг Ф.М. *Изгибные колебания вращающихся валов* / Федор Менасьевич Диментберг. — М.: Изд-во АН СССР, 1959. — 248 с.
- [48] Лурье А.И. *Аналитическая механика* / Анатолий Исаакович Лурье. — М.: Физматгиз, 1961. — 824 с.
- [49] Рубановский В.Н. *Об устойчивости сложных механических систем* / В.Н. Рубановский, В.В. Румянцев // *Успехи механики*. — 1979. — Т. 2, № 2. — С. 53–79.
- [50] Рубановский В.Н. *Устойчивость установившихся движений сложных механических систем* / В.Н. Рубановский // *Итоги науки и техники. Общая механика*. — М.: ВИНТИ, 1982. — Т. 5. — С. 62–134.
- [51] Румянцев В.В. *Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных* / В.В. Румянцев, А.С. Озиранер. — М.: Наука, 1987. — 256 с.
- [52] Воротников В.И. *Частичная устойчивость и управление: состояние проблемы и перспективы развития* / В.И. Воротников // *Автоматика и телемеханика*. — 2005. — № 4. — С. 3–59.
- [53] Рубановский В.Н. *Устойчивость стационарных вращений твердого тела с двумя упругими стержнями* / В.Н. Рубановский // *Прикладная математика и механика*. — 1976. — Т. 40, № 1. — С. 55–64.
- [54] Докучаев Л.В. *Нелинейная динамика упругого летательного аппарата* / Л.В. Докучаев // *Итоги науки и техники. Общая механика*. — М.: ВИНТИ, 1982. — Т. 5. — С. 135–197.

- [55] Савченко А.Я. *Устойчивость движения систем связанных твердых тел* / А.Я. Савченко, И.А. Болграбская, Г.А. Кононыхин. — К.: Наук. думка, 1991. — 168 с.
- [56] Харламов П.В. *Об уравнениях движения системы твердых тел* / П.В. Харламов // *Механика твердого тела*. — 1972. — Вып. 4. — С. 52–73.
- [57] Илюхин А.А. *Пространственные задачи нелинейной теории упругих стержней* / Александр Алексеевич Илюхин. — К.: Наук. думка, 1979. — 216 с.
- [58] Baillieul J. *Rotational elastic dynamics* / J. Baillieul, M. Levi // *Physica D*. — 1987. — Vol. 27. — P. 43–62.
- [59] Baillieul J. *Constrained relative motions in rotational mechanics* / J. Baillieul, M. Levi // *Arch. Rational Mech. Anal.* — 1991. — Vol. 115. — P. 101–135.
- [60] Набиуллин М.К. *Стационарные движения и устойчивость упругих спутников* / Мансур Каримович Набиуллин. — Новосибирск: Наука, 1990. — 216 с.
- [61] Троценко В.А. *Методы расчета собственных колебаний цилиндрической оболочки с присоединенным твердым телом* / В.А. Троценко, Ю.В. Троценко // *Нелінійні коливання*. — 2004. — Т. 7, № 2. — С. 263–285.
- [62] Krabs W. *On the Controllability of a Slowly Rotating Timoshenko Beam* / W. Krabs, G.M. Sklyar // *Journal for Analysis and Applications*. — 1999. — Vol. 18, № 2. — P. 437–448.
- [63] Geist B. *Double Eigenvalues for the Uniform Timoshenko Beam* / B. Geist, J.R. McLaughlin // *Appl. Math. Lett.* — 1997. — Vol. 10, № 3. — P. 129–134.

- [64] Xu G.Q. *Exponential Decay Rate for a Timoshenko Beam with Boundary Damping* / G.Q. Xu, S.P. Yung // *J. of Optimization Theory and Applications*. — 2004. — Vol. 123, № 3. — P. 669–693.
- [65] Grosh K. *Design of Galerkin generalized least squares methods for Timoshenko beams* / K. Grosh, P.M. Pinsky // *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*. — 1996. — Vol. 132. — P. 1-16.
- [66] *Ротационное движение космических тросовых систем* / [Алпатов А.П., Белецкий В.В., Драновский В.И., Закржевский А.Е., Пироженко А.В., Трогер Г., Хорошилов В.С.]. — Днепропетровск: Ин-т технической механики НАН и НКА Украины, 2001. — 404 с.
- [67] Лебедев Д.В. *Навигация и управление ориентацией малых космических аппаратов* / Д.В. Лебедев, А.И. Ткаченко А.И. — К.: Наукова думка, 2006. — 298 с.
- [68] Kononov Yu.N. *Spin stability of a Lagrange top containing linear oscillators* / Yu.N. Kononov // *Journal of Mathematical Sciences (New York)*. — 2001. — Vol. 103, № 1. — P. 38–42.
- [69] Дегтярев Г.Л. *Теоретические основы оптимального управления упругими космическими аппаратами* / Г.Л. Дегтярев, Т.К. Сиразетдинов. — М.: Машиностроение, 1986. — 216 с.
- [70] Мовчан А.А. *Устойчивость процессов по двум метрикам* / А.А. Мовчан // *Прикладная математика и механика*. — 1960. — Т. 24, Вып. 6. — С. 988–1001.
- [71] Зубов В.И. *Методы А.М. Ляпунова и их применение* / Владимир Иванович Зубов. — Л.: Изд-во ЛГУ, 1957. — 241 с.
- [72] Матросов В.М. *Метод сравнения в математической теории систем* / Матросов В.М., Анапольский Л.Ю., Васильев С.Н. — Новосибирск: Наука, 1980. — 481 с.

- [73] Мартынюк А.А. *Практическая устойчивость движения* / Анатолий Андреевич Мартынюк. — К.: Наук. думка, 1983. — 248 с.
- [74] Сиразетдинов Т.К. *Устойчивость систем с распределенными параметрами* / Талгат Касимович Сиразетдинов. — Новосибирск: Наука, 1987. — 231 с.
- [75] Шестаков А.А. *Обобщенный прямой метод Ляпунова для систем с распределенными параметрами* / Александр Андреевич Шестаков. — М.: Наука, 1990. — 320 с.
- [76] Lakshmikantham V. *Nonlinear differential equations in abstract spaces* / V. Lakshmikantham, S. Leela. — Oxford: Pergamon Press, 1981. — 390 p.
- [77] Ла-Салль Ж. *Исследование устойчивости прямым методом Ляпунова* / Ж. Ла-Салль, С. Лефшец; пер. с англ. Н.Х. Розова. — М.: Мир, 1964. — 186 с.
- [78] LaSalle J.P. *Stability theory and invariance principles* / J.P. LaSalle // Dynamical systems. Vol. 1: Int. symp. on dyn. syst. Providence 1974 (L. Cesari, J.K. Hale, and J.P. LaSalle Eds.) — 1976. — New York: Academic Press. — P. 211–222.
- [79] Ignatyev A.O. *On the partial equiasymptotic stability in functional differential equations* / A.O. Ignatyev // J. Math. Anal. Appl. — 2002. — Vol. 268, No. 2. — P. 615–628.
- [80] Игнатъев А.О. *Исследование устойчивости с использованием знакопостоянных функций Ляпунова* / А.О. Игнатъев // Український математичний вісник. — 2005. — Т. 2. — № 1. — С. 74–83.
- [81] Бутковский А.Г. *Методы управления системами с распределенными параметрами* / Анатолий Григорьевич Бутковский. — М.: Наука, 1975. — 568 с.

- [82] Fattorini H.O. *Infinite dimensional optimization and control theory* / H.O. Fattorini — Cambridge: Cambridge University Press, 1999. — 798 p.
- [83] Luo Z.-H. *Stability and stabilization of infinite dimensional systems with applications* / Z.-H. Luo, B.-Z. Guo, O. Morgul. — London: Springer-Verlag, 1999. — 403 p.
- [84] Oostveen J. *Strongly stabilizable distributed parameter systems* / J. Oostveen. — Philadelphia: SIAM, 2000. — 150 p.
- [85] Черноусько Ф.Л. *Манипуляционные роботы: динамика, управление, оптимизация* / Ф.Л. Черноусько, Н.Н. Болотник, В.Г. Градецкий. — М.: Наука, 1989. — 368 с. — (Научные основы робототехники).
- [86] Talebi H.A. *Control of Flexible-link Manipulators Using Neural Networks* / H.H. Talebi, R.V. Patel, K. Khorasani. — London: Springer-Verlag, 2001. — 142 p.
- [87] Сиразетдинов Т.К. *Оптимизация систем с распределенными параметрами* / Талгат Касимович Сиразетдинов. — М.: Наука, 1977. — 480 с.
- [88] Рутковский В.Ю. *Управление угловым движением деформируемого спутника с распределенными массами* / В.Ю. Рутковский, В.М. Суханов // Космические исследования. — 1970. — Т. 8, № 1. — С. 71–79.
- [89] Гуляев В.И. *Динамика упругих систем при сложном движении* / В.И. Гуляев // Прикладная механика. — 2003. — Т. 39, № 5. — С. 28–51.
- [90] Гуляев В.И. *Динамика робота-манипулятора с упругими звеньями* / В.И. Гуляев, Т.В. Завражина // Прикладная механика. — 2001. — Т. 37, № 11. — С. 130–140.

- [91] Завражина Т.В. *Управление пространственными движениями портального манипулятора с упругими звеньями* / Т.В. Завражина // Прикладная механика. — 2006. — Т. 42, № 2. — С. 121–128.
- [92] Sawodny O. *Trajectory Generation for the Trajectory Tracking Control of a Fire Rescue Turntable Ladder* / O. Sawodny, S. Lambeck, A. Hildebrandt // Proc. 3rd International Workshop on Robot Motion and Control “RoMoCo’02”: 9–11 November 2002. — Poznań: Poznań University of Technology, 2002. — P. 411–416.
- [93] Воробьев Е.И. *Пространственные шарнирные механизмы* / Е.И. Воробьев, Ф.М. Диментберг. — М.: Наука, 1991. — 264 с.
- [94] Ларин В.Б. *Задачи управления манипулятором* / В.Б. Ларин // Проблемы управления и информатики. — 1996. — № 4. — С. 5–18.
- [95] Кириченко Н.Ф. *Моделирование, управление и адаптация манипуляционных роботов* / Н.Ф. Кириченко, Ю.В. Крак, Р.А. Сорока // Кибернетика и вычислительная техника. — 1987. — Вып. 73. — С. 90–93.
- [96] Chen G. *Modeling, stabilization and control of serially connected beams* / G. Chen, M.C. Delfour, A.M. Krall, G. Payre. // SIAM J. Control Optim. — 1987. — Vol. 25. — P. 526–546.
- [97] Chen G. *The Euler–Bernoulli Beam Equation with Boundary Energy Dissipation* / G. Chen, S.G. Krantz, D.W. Ma, C.E. Wayne // Operator methods for optimal control problems: (Lecture Notes in Pure & Appl. Math., S.J. Lee, ed.). — New York - Basel: Marcel Dekker, 1987. — P. 67–96.
- [98] Huang F.L. *Characteristic conditions for exponential stability of linear dynamical systems in Hilbert spaces* / F.L. Huang // Ann. Diff. Eqs. — 1985. — Vol. 1, No. 1. — P. 43–53.

- [99] Huang F. *On the mathematical model for linear elastic system with analytic damping* / F. Huang // SIAM J. Control and Optimization. — 1988. — Vol. 26, № 3. — P. 714–724.
- [100] Leugering G. *On control and stabilization of a rotating beam by applying moments at the base only* / G. Leugering // Optimal Control of Partial Differential Equations: (Lecture Notes in Control & Inf. Sciences, Vol. 149, K.-H. Hoffmann, W. Krabs, Eds.). — Berlin: Springer, 1991. — P. 182–191.
- [101] Luo Z.-H. *Further Theoretical Results on Direct Strain Feedback Control of Flexible Robot Arms* / Z.-H. Luo, B.-Z. Guo // IEEE Trans. on Autom. Control. — 1995. — Vol. 40, № 4. — P. 747–751.
- [102] Luo Z.-H. *Shear force feedback control of a single-link flexible robot with a revolute joint* / Z.-H. Luo, B.-Z. Guo // IEEE Trans. on Autom. Control. — 1997. — Vol. 42. — P. 53–65.
- [103] Xu C.Z. *Stabilizability and stabilization of a rotating body-beam system with torque control* / C.Z. Xu, J. Baillieul. // IEEE Trans. on Autom. Control. — 1993. — Vol. 38. — P. 1754–1765.
- [104] Coron J.-M. *Stabilization of a rotating body beam without damping* / J.-M. Coron, B. d'Andrea-Novel // IEEE Trans. on Autom. Control. — 1998. — Vol. 44. — P. 608–618.
- [105] Lagnese J.E. *Controllability of Thin Elastic Beams and Plates* / J.E. Lagnese, G. Leugering // The control handbook : (W.S. Levine ed.). — Boca Raton: CRC Press - IEEE Press, 1996. — P. 1139–1156.
- [106] Rudolph J. *Flatness Based Control of Distributed Parameter Systems* / J. Rudolph. — Aachen: Shaker Verlag, 2003. — 201 p.
- [107] Lasiecka I. *Control theory for partial differential equations: continuous and approximation theories. 2: Abstract hyperbolic-like systems over a*

- finite time horizon* / I. Lasiecka, R. Triggiani. — Cambridge: Cambridge University Press, 2000. — 1067 p.
- [108] Sontag E.D. *Mathematical Control Theory, Deterministic Finite Dimensional Systems. Second Edition* / E.D. Sontag. — New York: Springer-Verlag, 1998. — 531 p.
- [109] Kim J.U. *Boundary control of the Timoshenko beam* / J.U. Kim, Y. Renardy // SIAM J. Control. Optim. — 1987. — Vol. 25. — P. 1417–1429.
- [110] Morgül Ö. *Boundary control of a Timoshenko beam attached to a rigid body: planar motion* / Ö. Morgül // Int. J. Control. — 1991. — Vol. 54, № 4. — P. 763–791.
- [111] Krabs W. *On the Stabilizability of a Slowly Rotating Timoshenko Beam* / W. Krabs, G.M. Sklyar. // Zeitschrift für Analysis und ihre Anwendungen. — 2000. — Vol. 19, № 1. — P. 131–145.
- [112] Taylor S.W. *A smoothing property of a hyperbolic system and boundary controllability* / S.W. Taylor // Journal of Computational and Applied Mathematics. — 2000. — Vol. 114. — P. 23–40.
- [113] Taylor S.W. *Boundary control of a rotating Timoshenko beam* / S.W. Taylor, S.C.B. Yau. // Australian and New Zealand Industrial and Applied Mathematics Journal. — 2003. — Vol. 44 (E). — P. 143–184.
- [114] Shi D.-H. *Feedback stabilization of a Timoshenko beam with an end mass* / D.-H. Shi, S.H. Hou, D.-X. Feng. // Int. J. Control. — 1998. — Vol. 69, № 2. — P. 285–300.
- [115] Коробов В.И. *К вопросу о сильной стабилизируемости сжимающих систем в гильбертовых пространствах* / В.И. Коробов, Г.М. Скляр. // Диф. уравнения. — 1984. — Т. 20, № 11. — С. 1862–1869.

- [116] Знаменская Л.Н. *Управление упругими колебаниями* / Людмила Николаевна Знаменская. — М.: Физматлит, 2004. — 176 с.
- [117] Згуровский М.З. *Нелинейный анализ и управление бесконечномерными системами* / М.З. Згуровский, В.С. Мельник. — К.: Наук. думка, 1999. — 631 с.
- [118] Далецкий Ю.Л. *Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве* / Ю.Л. Далецкий, М.Г. Крейн. — М.: Наука, 1970. — 536 с.
- [119] Михайлов В.П. *Дифференциальные уравнения в частных производных* / Валентин Петрович Михайлов. — М.: Наука, 1976. — 392 с.
- [120] Иосида К. *Функциональный анализ* / К. Иосида; [пер. с англ. В.М. Волосова]. — М.: Мир, 1967. — 624 с.
- [121] Хилле Э. *Функциональный анализ и полугруппы* / Э. Хилле, Р. Филлипс; [пер. с англ. Д.А. Василькова] — М.: Изд-во иностр. лит., 1962. — 830 с.
- [122] Крейн С.Г. *Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве* / Селим Григорьевич Крейн. — М.: Наука, 1967. — 464 с.
- [123] Балакришнан А.В. *Прикладной функциональный анализ* / А.В. Балакришнан; [пер. с англ. В.И. Благодатских] — М.: Наука, 1980. — 384 с.
- [124] Като Т. *Теория возмущений линейных операторов* / Т. Като; [пер. с англ. Г.А. Воропаевой, А.М. Степина, И.А. Шишмарева]. — М.: Мир, 1972. — 740 с.
- [125] Pazy A. *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations* / A. Pazy. — New York: Springer-Verlag, 1983. — 279 p.

- [126] Barbu V. *Semigrupuri de contractii neliniare in spatii Banach* / V. Barbu. — Bucuresti: Edit. Acad. Rep. Soc. Romania, 1974. — 342 p.
- [127] Barbu V. *Analysis and control of nonlinear infinite dimensional systems* / V. Barbu. — San Diego, CA: Academic Press, 1992. — 476 p.
- [128] Ладыженская О.А. *О нахождении минимальных глобальных аттракторов для уравнений Навье – Стокса и других уравнений с частными производными* / О.А. Ладыженская // Успехи математических наук. — 1987. — Т. 42, вып. 6(258). — С. 25–60.
- [129] Phillips R.S. *Dissipative operators and hyperbolic systems of partial differential equations* / R.S. Phillips // Trans. Amer. Math. Soc. — 1959. — Vol. 90. — P. 193–254.
- [130] Lumer G. *Dissipative operators in a Banach space* / R.S. Phillips, G. Lumer. // Pacific J. Math. — 1961. — Vol. 11. — P. 679–698.
- [131] Хейл Дж. *Теория функционально-дифференциальных уравнений* / Дж. Хейл; пер. с англ. С.Н. Шиманова. — М.: Мир, 1984. — 421 с.
- [132] Копачевский Н.Д. *Операторные методы в линейной гидромеханике* / Н.Д. Копачевский, С.Г. Крейн, Нго Зуй Кан. — М.: Наука, 1989. — 416 с.
- [133] Dafermos C.M. *Asymptotic behavior of nonlinear contraction semigroups* / C.M. Dafermos, M. Slemrod. // Journal of Functional Analysis. — 1973. — Vol. 13. — P. 97–106.
- [134] Brezis H. *Monotonicity methods in Hilbert spaces and some applications to nonlinear partial differential equations* / H. Brezis // Contributions to Nonlinear Functional Analysis: (E.H. Zarantonello ed.). — New York: Academic Press, 1971. — P. 101–156.
- [135] Канторович Л.В. *Функциональный анализ* / Л.В. Канторович, Г.П. Акилов. — М.: Наука, 1984. — 752 с.

- [136] Барбашин Е.А. *Об устойчивости движения в целом* / Е.А. Барбашин, Н.Н. Красовский. // Докл. АН СССР. — 1952. — Т. 86, № 3. — С. 453–456.
- [137] Ковалев А.М. *Нелинейные задачи управления и наблюдения в теории динамических систем* / Александр Михайлович Ковалев. — К.: Наукова думка, 1980. — 175 с.
- [138] Ковалев А.М. *Управляемость, наблюдаемость, идентифицируемость динамических систем* / А.М. Ковалев, В.Ф. Щербак. — К.: Наукова думка, 1993. — 236 с.
- [139] Закржевский А.Е. *Программные движения систем твердых и упругих тел* / А.Е. Закржевский // Прикладная механика. — 1993. — Т. 29, № 6. — С. 3–21.
- [140] Ohkami Y. *Eigenvalues and eigenvectors for hybrid coordinate equations of motion for flexible spacecraft* / Y. Ohkami, P. Likins // Celestial Mech. — 1979. — V. 19, № 4. — P. 359–390.
- [141] Новицкий В.В. *Построение обратной связи и функции Ляпунова для линейных нестационарных систем* / В.В. Новицкий // Автоматика. — 1990. — № 4. — С. 16–23.
- [142] Новицький В.В. *Декомпозиція та керування в лінійних системах* / Віктор Володимирович Новицький. — К.: Ін-т математики, 1995. — 150 с. — (Праці / Ін-т математики НАН України; т. 11).
- [143] Закржевский А.Е. *Об оптимальном развороте упругого космического аппарата* / А.Е. Закржевский // Прикладная механика. — 2003. — Т. 39, № 10. — С. 106–113.
- [144] Закржевский А.Е. *Анализ погрешностей конечномерного моделирования динамики твердого тела с упругими элементами* / А.Е. Закржевский // Прикладная механика. — 1994. — Т. 30, № 7. — С. 79–84.

- [145] Balas M.J. *Modal control of certain flexible dynamical systems* / M.J. Balas // SIAM J. Control Optim. — 1978. — Vol. 16, № 3. — P. 450–462.
- [146] Li H.X. *Fuzzy Neural Intelligent Systems: Mathematical Background and Application to Engineering* / H.X. Li, C.L.P. Chen, H.-P. Huang. — Boca Raton: CRC Press, 2000. — 392 p.
- [147] Уонэм М. *Линейные многомерные системы управления: Геометрический подход* / У. Мюррей Уонэм; пер. с англ. Э.Л. Наппельбаума. — М.: Наука, 1980. — 376 с.
- [148] Барбашин Е.А. *Введение в теорию устойчивости* / Евгений Алексеевич Барбашин. — М.: Наука, 1967. — 224 с.
- [149] Лыкова О.Б. *Принцип сведения в банаховом пространстве* / О.Б. Лыкова // Укр. мат. журнал. — 1971. — Т. 23, № 4. — С. 464–471.
- [150] Fliess M. *Flatness and defect of nonlinear systems: introductory theory and examples* / M. Fliess, J. Lévine, Ph. Martin, P. Rouchon // International Journal of Control. — 1995. — Vol. 61(6). — P. 1327–1361.
- [151] Jakubczyk B. *Critical Hamiltonians and Feedback Invariants* / B. Jakubczyk // Geometry of Feedback and Optimal Control: (B. Jakubczyk, W. Respondek eds.). — New York: Marcel Dekker, 1998. — P. 219–256.
- [152] Clarke F.H. *Asymptotic controllability implies feedback stabilizaton* / F.H. Clarke, Yu.S. Ledyaev, E.D. Sontag, A.I. Subbotin. // IEEE Trans. on Automat. Control. — 1997. — Vol. 42. — P. 1394–1407.
- [153] Филиппов А.Ф. *Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью* / Алексей Федорович Филиппов. — М.: Наука, 1985. — 224 с.
- [154] Толстоногов А.А. *Дифференциальные включения в банаховом пространстве* / Александр Александрович Толстоногов. — Новосибирск: Наука, 1986. — 296 с.

- [155] Немыцкий В.В. *Качественная теория дифференциальных уравнений* / В.В. Немыцкий, В.В. Степанов. — М.-Л.: Гостехиздат, 1949. — 550 с.
- [156] Ляпунов А.М. *Избранные труды* / Александр Михайлович Ляпунов. — М.: Изд-во АН СССР, 1965. — 541 с.
- [157] Хартман Ф. *Обыкновенные дифференциальные уравнения* / Ф. Хартман — М.: Мир, 1970. — 720 с.
- [158] Потапенко Е.М. *Устойчивость движения орбитально маневрирующего упругого КА* / Е.М. Потапенко // Космические исследования. — 1990. — Т. 28. — С. 203–211.
- [159] Levan N. *Strong stabilizability of linear contractive control systems on Hilbert space* / N. Levan, L. Rigby. // SIAM J. Control Optim. — 1979. — Vol. 17. — P. 23–35.
- [160] Krabs W. *On moment theory and controllability of one dimensional vibrating systems and heating processes* / W. Krabs // Lecture Notes in Control and Information Sciences. — Vol. 173. — Berlin: Springer-Verlag, 1992. — 174 p.
- [161] Curtain R.F. *On stabilizability of linear spectral systems via state boundary feedback* / R.F. Curtain // SIAM J. Control Optim. — 1985. — Vol. 23. — P. 144–152.
- [162] Curtain R.F. *An introduction to infinite-dimensional linear systems theory* / R.F. Curtain, H. Zwart. — New York: Springer-Verlag, 1995. — 698 p.
- [163] Laousy H. *Boundary feedback stabilization of a rotating body-beam system* / H. Laousy, C.Z. Xu, G. Sallet. // IEEE Trans. on Autom. Control. — 1996. — Vol. 41. — P. 241–245.

- [164] Bloch A.M. *On the dynamics of rotating elastic beams* / A.M. Bloch, E.S. Titi. // *New Trends in Systems Theory: (Proc. Jt. Conf., Genoa, Italy, 1990)*. — 1991. — Vol. 7. — P. 128–135.
- [165] Попов В.М. *Решение новой задачи устойчивости регулируемых систем* / В.М. Попов // *Автоматика и телемеханика*. — 1964. — Т. 25, № 9. — С. 1257–1262.
- [166] Brunovský P. *A classification of linear controllable systems* / P. Brunovský // *Kybernetika*. — 1970. — Vol. 6. — P. 173–188.
- [167] Проскуряков И.В. *Сборник задач по линейной алгебре. 3-е изд.* / И.В. Проскуряков — М.: Наука, 1967. — 382 с.
- [168] Respondek W. *Introduction to Geometric Nonlinear Control; Linearization, Observability, Decoupling* / W. Respondek // *Mathematical Control Theory: (A.A. Agrachev ed.)*. — Trieste: ICTP Lecture Notes, 2002. — P. 169–222.
- [169] Fliess M. *Sur les systèmes non linéaires différentiellement plats* / M. Fliess, J. Lévine, Ph. Martin, P. Rouchon // *C.R. Acad. Sci. Paris*. — 1992. — Vol. I-315. — P. 619–624.
- [170] Martin Ph. *Flat Systems* / Ph. Martin, R.M. Murray, P. Rouchon. // *Mathematical Control Theory (A.A. Agrachev ed.)*. — Trieste: ICTP Lecture Notes, 2002. — P. 705–768.
- [171] Fliess M. *Some open questions related to flat nonlinear systems* / M. Fliess, J. Lévine, Ph. Martin, P. Rouchon // *Open problems in mathematical systems and control theory: (V. Blondel et al. ed.)*. — London: Springer-Verlag, 1999. — P. 99–103.
- [172] Charlet B. *On dynamic feedback linearization* / B. Charlet, J. Lévine, R. Marino. // *Systems and Control Letters*. — 1989. — Vol. 13. — P. 143–151.

- [173] Jakubczyk B. *On linearization of control systems* / B. Jakubczyk, W. Respondek. // Bull. Acad. Polonaise Sci., Ser. Sci. Math. — 1980. — Vol. 28. — P. 517–522.
- [174] Понтрягин Л.С. *Математическая теория оптимальных процессов. 2-е изд.* / Л.С. Понтрягин, В.Г. Болтянский, Р.В. Гамкрелидзе, Е.Ф. Мищенко. — М.: Наука, 1969. — 384 с.
- [175] Ли Э.Б. *Основы теории оптимального управления* / Э.Б. Ли, Л. Маркус; пер. с англ. Л.Л. Леонтьевой — М.: Наука, 1972. — 576 с.
- [176] Аграчев А.А. *Геометрическая теория управления* / А.А. Аграчев, Ю.Л. Сачков. — М.: Физматлит, 2005. — 392 с.
- [177] Эльсгольц Л.Э. *Дифференциальные уравнения и вариационное исчисление* / Лев Эрнестович Эльсгольц. — М.: Наука, 1969. — 424 с.
- [178] Черноусько Ф.Л. *Управление колебаниями* / Ф.Л. Черноусько, Л.Д. Акуленко, Б.Н. Соколов. — М.: Наука, 1980. — 384 с.
- [179] Бердичевский В.Л. *Вариационные принципы механики сплошной среды* / Виктор Львович Бердичевский. — М.: Наука, 1983. — 447 с.
- [180] Харди Г.Г. *Неравенства* / Г.Г. Харди, Дж.Е. Литтлвуд, Г. Полия; пер. с англ. В.И. Левина. — М.: Гос. изд-во иностр. лит., 1948. — 456 с.
- [181] Ахиезер Н.И. *Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве* / Н.И. Ахиезер, И.М. Глазман. — М.: Наука, 1966. — 544 с.
- [182] Donea J. *Finite Element Methods for Flow Problems* / J. Donea, A. Huerta. — Chichester: Wiley, 2003. — 350 p.
- [183] Folkow P.D. *Time domain Green functions for the homogeneous Timoshenko beam* / P.D. Folkow, P. Olsson, G. Kristensson // The Quarterly Journal of Mechanics and Applied Mathematics — 1998. — Vol. 51 (1). — P. 125–142.

- [184] Cowper G.R. *The shear coefficient in Timoshenko's beam theory* / G.R. Cowper // Transactions of ASME. Ser. E. — 1966. — Vol. 88. — P. 335–340.
- [185] Костюченко А.Г. *Распределение собственных значений (самосопряженные обыкновенные дифференциальные операторы)* / А.Г. Костюченко, И.С. Саргсян. — М.: Наука, 1979. — 400 с.
- [186] Малкин И.Г. *Теория устойчивости движения* / Иоэль Гильевич Малкин. — М.: Наука, 1966. — 532 с.
- [187] Hermann R. *Nonlinear controllability and observability* / R. Hermann, A.J. Krener // IEEE Trans. Autom. Control. — 1977. — Vol. 22. — P. 728–740.
- [188] Красносельский М.А. *Геометрические методы нелинейного анализа* / М.А. Красносельский, П.П. Забрейко. — М.: Наука, 1975. — 512 с.
- [189] Brockett R. *Asymptotic Stability and Feedback Stabilization* / R. Brockett // Differential geometric control theory: (Proc. Conf., Mich. Technol. Univ., 1982, R.W. Brockett, R.S. Millman, H.J. Sussmann, eds.). — Boston: Birkhäuser, 1983. — P. 181–191.
- [190] Coron J.-M., *A necessary condition for feedback stabilization* / J.-M. Coron // Systems and Control Letters. — 1990. — Vol. 14. — P. 227–232.
- [191] Dayawansa W.P. *Recent Advances in the Stabilization Problem for Low Dimensional Systems* / W.P. Dayawansa // Geometry of Feedback and Nonlinear Control: (B. Jakubczyk, W. Respondek eds.). — New York: Marcel Dekker, 1998. — P. 165–203.
- [192] Milnor J. *Topology from a Differential Viewpoint* / J. Milnor. — Charlottesville: The University Press of Virginia, 1965. — 64 p.

- [193] Eisenbud D. *An algebraic formula for the degree of a C^∞ map germ* / D. Eisenbud, H.I. Levine // *Annals of Mathematics*. — 1977. — Vol. 106. — P. 19–44.
- [194] Artstein Z. *Stabilization with relaxed controls* / Z. Artstein // *Nonlinear Analysis, TMA*. — 1983. — Vol. 7. — P. 1163–1173.
- [195] Burke W.L. *Applied differential geometry* / W.L. Burke. — Cambridge: Cambridge University Press, 1985. — 414 p.
- [196] Kawski M. *Stabilization of nonlinear systems in the plane* / M. Kawski // *Systems and Control Letters*. — 1989. — Vol. 12. — P. 169–175.
- [197] Liu W. *Feedback stabilization of real analytic systems in the plane* / W. Liu // *Systems and Control Letters*. — 1995. — Vol. 25. — P. 131–139.
- [198] Iggidr A. *Global stabilization of planar homogeneous polynomial systems* / A. Iggidr, H. Jghima, R. Outbib // *Nonlinear Analysis, TMA*. — 1998. — Vol. 34. — P. 1097–1109.
- [199] Jerbi H. *Asymptotic stabilizability of homogeneous polynomial systems of odd degree* / H. Jerbi, T. Kharrat // *Systems and Control Letters*. — 2003. — Vol. 48. — P. 87–99.
- [200] Lin Y. *Universal formula for stabilization with bounded controls* / Y. Lin, E.D. Sontag // *Systems and Control Letters*. — 1991. — Vol. 16. — P. 393–397.