

**НАЦІОНАЛЬНА АКАДЕМІЯ НАУК УКРАЇНИ
ІНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЇ МАТЕМАТИКИ І МЕХАНІКИ**

ЗУЄВ Олександр Леонідович

УДК 531.36, 531.39, 517.977

**КЕРУВАННЯ ТА СТАБІЛІЗАЦІЯ РУХУ НЕСКІНЧЕННОВИМІРНИХ
МЕХАНІЧНИХ СИСТЕМ З ПРУЖНИМИ ЕЛЕМЕНТАМИ**

01.02.01 – ТЕОРЕТИЧНА МЕХАНІКА

Автореферат

дисертації на здобуття наукового ступеня
доктора фізико-математичних наук

Донецьк – 2008

Дисертацією є рукопис.

Робота виконана в Інституті прикладної математики і механіки НАН України.

Науковий
консультант:

доктор фізико-математичних наук,
професор, член-кореспондент НАН України
Ковальов Олександр Михайлович,
Інститут прикладної математики і механіки НАН
України, директор інституту.

Офіційні опоненти:

доктор фізико-математичних наук, професор
Новицький Віктор Володимирович,
Інститут математики НАН України,
завідувач відділу аналітичної механіки;
доктор фізико-математичних наук,
старший науковий співробітник
Ігнат'єв Олександр Олегович,
Інститут прикладної математики і механіки НАН
України, провідний науковий співробітник відділу
прикладної механіки;
доктор фізико-математичних наук, професор
Кононов Юрій Микитович,
Донецький національний університет,
професор кафедри прикладної механіки і
комп'ютерних технологій.

Захист відбудеться “25” червня 2008 р. о 15 годині на засіданні спеціалізованої вченої ради Д 11.193.01 в Інституті прикладної математики і механіки НАН України за адресою: 83114, м. Донецьк, вул. Р.Люксембург, 74.

З дисертацією можна ознайомитись у бібліотеці Інституту прикладної математики і механіки НАН України за адресою: 83114, м. Донецьк, вул. Р.Люксембург, 74.

Автореферат розісланий “23” травня 2008 р.

Вчений секретар
спеціалізованої вченої
ради

Краснощок М.В.

ЗАГАЛЬНА ХАРАКТЕРИСТИКА РОБОТИ

Актуальність теми. Прогрес у створенні новітньої техніки викликає необхідність математичного моделювання руху складних керованих механічних систем з розподіленими параметрами. Актуальність цього наукового напрямку можна проілюструвати на прикладі дослідження руху космічних апаратів з деформівними елементами (антенами, панелями сонячних батарей, штангами, тросами) та роботів-маніпуляторів з пружними ланками. У роботах Л.В. Докучаєва, В.М. Рубановського, В.В. Румянцева, Р. Likins та інших учених встановлено, що згадані еластичні елементи істотно впливають на динаміку в цілому, тому проблеми керування та стабілізації руху не можуть бути вирішені з потрібною точністю в рамках моделі абсолютно твердого тіла. Моделювання цих та інших об'єктів сучасної техніки призвело до розвитку теорії гібридних механічних систем, тобто систем, що складаються з абсолютно твердих та деформівних тіл. До найбільш розповсюджених моделей пружних елементів, що використовуються в теоретичних дослідженнях, належать балки Ейлера – Бернуллі та Тимошенка.

Задачі моделювання механічних систем із пружними елементами, а також суміжні питання стійкості та керування в скінченновимірних та нескінченновимірних просторах досліджувалися в роботах В.В. Белецького, І.О. Болграбської, В.І. Гуляєва, Ф.М. Діментберга, О.Є. Закржевського, О.О. Ілюхіна, Ю.М. Кононова, Д.В. Лебедева, І.О. Луковського, А.І. Лур'є, М.К. Набіулліна, О.Я. Савченка, Ф.Л. Черноуська, В.С. Хорошилова, J. Baillieul, M. Balas, G. Leugering, Ö. Morgül, H. Troger та інших авторів.

Одним з найбільш ефективних методів аналізу стійкості та синтезу керувань для моделей гібридних систем з розподіленими параметрами є прямий метод Ляпунова, який дозволяє також дослідити більш загальні властивості сімейства розв'язків (стійкість по відношенню до частини змінних, властивості граничних множин). Важливий внесок в розвиток прямого метода Ляпунова для нескінченновимірних систем зроблено дослідженнями В.І. Зубова, О.О. Ігнат'єва, А.А. Мартинюка, В.М. Матросова, Т.К. Сіразетдінова, О.О. Шестакова, J.M. Ball, J.M. Coron, V. Lakshmikantham, J.P. LaSalle та ін.

Дисертаційна робота пов'язана також з розвитком сучасних методів теорії керування, що ґрунтуються на декомпозиції керованих систем, використанні канонічних форм та теорії плоских (flat) систем за термінологією M. Fliess, J. Lévine, Ph. Martin, P. Rouchon. Ці методи набули суттєвого розвитку в роботах О.М. Ковальова, В.І. Коробова, В.Б. Ларіна, В.В. Новицького та інших вчених.

Оскільки математичні моделі гібридних систем описуються диференціальними рівняннями з частинними похідними та рівняннями у функціональних просторах, в роботі використовуються сучасні підходи математичної теорії керування розподіленими системами, що ґрунтуються на методах функціонального аналізу. Ці підходи пов'язані з дослідженнями А.О. Агратова, А.Г. Бутковського, Ю.Л. Далецького, М.З. Згуровського, М.Д. Копачевського, М.Г. Крейна, С.Г. Крейна, В.С. Мельника, Г.М. Скляра, A. Balakrishnan, V. Barbu, R. Curtain, H. Fattotini, J.-L. Lions, W. Krabs та ін.

Слід відзначити, що у переважній більшості попередніх публікацій з проблем керування нескінченновимірними гібридними системами з пружними балками було розглянуто тільки моделі балки з вільним кінцем або точковою масою на кінці. У дисертаційній роботі вперше створено та досліджено моделі керованих механічних систем, що враховують коливання пружних ланок як балок Ейлера – Бернуллі та Тимошенка, а також рух приєднаних абсолютно твердих тіл. Актуальність цих досліджень підтверджується висновками наведеного в дисертації літературного огляду.

Зв'язок роботи з науковими програмами, планами, темами. Тематика дисертації пов'язана з планами наукових досліджень відділу технічної механіки Інституту прикладної математики і механіки НАН України на 2001–2008 роки. Дисертант приймав участь у бюджетних науково-дослідних роботах “Математичні методи дослідження задач стійкості і керування динамічних систем та їх застосування у динаміці систем твердих тіл” (номер держ. реєстрації 0101U001094, 2001 – 2005 рр.) та „Керування і стійкість гібридних систем та сучасні проблеми робототехніки” (номер держ. реєстрації 0106U000044, 2006 – 2008 рр.)

Окремі результати дисертації отримано в ході виконання автором додаткової відомчої теми НАН України „Стабілізація керованих систем і теорія інваріантів” (номер держ. реєстрації 0106U005990, 2006 р.) і наукової роботи „Математичне моделювання і керування гібридними механічними системами” за грантом Президента України для підтримки наукових досліджень молодих учених (номер держ. реєстрації 0107U008484, 2007 р.) Частину результатів дисертації відзначено премією Президента України для молодих учених 2006 року за роботу „Нелінійна стабілізація багатовимірних керованих систем” (указ Президента України від 15.12.2006 № 1083/2006).

Напрямок досліджень дисертаційної роботи було підтримано грантами Міжнародного центра теоретичної фізики ЮНЕСКО і МАГАТЕ ім. Абдуса Салама (Трієст, Італія, 2003 р.) і фонду Олександра фон Гумбольдта (Німеччина, 2004 р.)

Мета і задачі дослідження. Мета дослідження полягає у створенні ефективних методів керування гібридними механічними системами, що описуються моделями з розподіленими параметрами. Для досягнення цієї мети необхідно розв'язати ряд важливих задач теоретичної механіки та теорії керування. Одна з цих задач пов'язана з адекватним математичним моделюванням просторового руху гібридних систем. У загальному випадку такі моделі описуються системами нелінійних звичайних диференціальних рівнянь та рівнянь з частинними похідними. Ще одна задача дослідження полягає у створенні алгоритмів керування та спостереження за неповною інформацією вимірів.

Об'єктом досліджень у роботі є моделі керованих механічних систем, що складаються з абсолютно твердих тіл та пружних балок.

Предметом досліджень є проблеми керування рухом, стабілізації та стійкості руху моделей механічних систем у нескінченновимірних та скінченновимірних фазових просторах.

Методи досліджень. Для побудови математичних моделей систем з пружними елементами застосовуються методи аналітичної механіки. При дослідженні проблем

керування та стійкості використовується прямий метод Ляпунова, теорія неперервних навіпгруп операторів у банахових просторах, методи варіаційного числення, теорія ступеня відображення.

Наукова новизна одержаних результатів визначається наступними положеннями.

1. Для дослідження асимптотичних властивостей рухів механічних систем з розподіленими параметрами вперше введено поняття асимптотичної стійкості по відношенню до обмеженого функціонала для нелінійних динамічних систем з багатозначними розв'язками на метричному просторі. Доведено узагальнення теореми Барбашина – Красовського та принципу інваріантності. У випадку існування диференційованого функціонала типу Ляпунова виведено достатні умови часткової стійкості в банаховому просторі. Цей результат використано для синтезу функцій керування математичними моделями гібридних механічних систем.
2. Запропоновано нові достатні умови передкомпактності траєкторій класу нелінійних диференціальних рівнянь у банаховому просторі. Такі умови дозволяють досліджувати граничну множину за допомогою принципу інваріантності.
3. Створено математичну модель обертового руху супутника з довільним числом пружних елементів – антен у вигляді балок Ейлера – Бернуллі. Якщо всі балки мають однакові механічні параметри, то досліджувана система не є асимптотично стійкою, і за таких умов вирішено задачу стабілізації по відношенню до норми певного оператора проектування на нескінченновимірний підпростір фазового простору. У випадку балок з нерезонансними параметрами доведено наближену керованість системи і запропоновано функціонал керування, що забезпечує сильну асимптотичну стійкість стану рівноваги. Таке керування забезпечує стабілізацію орієнтації тіла-носія з одночасним гасінням коливань стержнів.
4. Отримано рівняння просторового руху пружного робота-маніпулятора з урахуванням телескопічного зсуву його ланок під впливом керуючих сил. В якості моделі деформації ланок розглянуто балку Ейлера – Бернуллі. Для маніпулятора з однією гнучкою ланкою знайдено керування зі зворотним зв'язком, що забезпечує сильну стабілізацію стану рівноваги в нескінченновимірному фазовому просторі.
5. Запропоновано модель гнучкого маніпулятора, у якого сусідні ланки зв'язані шарнірами. Такі шарніри реалізують пружні моменти, що спрямовані на сполучення центральних ліній ланок. Здобуто математичну модель такого маніпулятора у вигляді граничної задачі з частинними похідними і побудовано наближену систему за Гальоркіним. Запропоновано керування зі зворотним зв'язком, що вирішує задачу стабілізації стану рівноваги наближеної системи. Досліджено спостережуваність у лінійній постановці і проведено чисельне моделювання керованого руху нелінійної скінченновимірної системи.
6. Для скінченновимірної математичної моделі механічної системи з пружною балкою одержано перетворення у явному вигляді, що зводить досліджувану лінійну систему до стандартної канонічної форми (форми Бруновського). Цей результат є остаточною, оскільки доведено, що нелінійне збурювання розглянутої

моделі не є плоским (flat). Вирішено задачу мінімізації квадрата норми керування при фіксованих початковому і кінцевому станах системи. При цьому використано зведення задачі оптимального керування до задачі Лагранжа. Запропонований підхід конструктивно визначає керування з найменшою „енергією”, що переводить систему з будь-якого початкового стану до наперед заданого при довільній кількості узагальнених координат N . Проведено оцінку розв’язків нескінченновимірної системи при використанні оптимального керування, що відповідає підсистемі зі скінченим числом узагальнених координат. Доведено, що запропоноване сімейство керувань дозволяє розв’язати задачу наближеної керованості нескінченновимірної системи. Встановлено, що умови наближеної керованості виконано для моделі коливань твердого тіла з пружною балкою Ейлера – Бернуллі.

7. Створено модель керованої механічної системи у вигляді балки Тимошенка з навантаженням, що описує рух гнучкого робота-маніпулятора. Для рівнянь руху з частинними похідними побудовано наближення за Гальоркіним, засноване на розв’язках відповідної задачі Штурма – Ліувілля. Отримано умови локальної керованості для гальоркінської апроксимації в околі стану рівноваги системи. Доведено стабілізованість стану рівноваги і запропоновано явну схему синтезу керування зі зворотним зв’язком. Отримано умови спостережуваності системи щодо вихідного сигналу у вигляді кута нахилу та компоненти тензора напруження в фіксованій точці балки. Запропоновано схему стабілізації положення рівноваги моделі за допомогою зворотного зв’язку за станом системи-спостерігача. Доведено, що такий підхід забезпечує асимптотичну стійкість незбуреного розв’язку гальоркінської системи при будь-якій кількості ступенів волі, що відповідають коливанням пружної балки. Наведено результат чисельного інтегрування рівнянь руху, що ілюструють ефективність знайденого керування.
8. Запропоновано новий підхід до розв’язання задачі стабілізації, який ґрунтується на зображенні нелінійної керованої системи за допомогою критичних функцій Гамільтона, що використовуються в принципі максимуму Понтрягіна для знаходження оптимальних за часом керувань. Доведено, що симетричні функції критичних гамільтоніанів (символи) визначають необхідні умови існування стабілізуючого керування зі зворотним зв’язком. Цей результат використано для знаходження умов стабілізованості нелінійної керованої системи з двовимірними однорідними векторними полями.

Практичне значення одержаних результатів. Одержані в дисертації результати мають в основному теоретичне значення. Вони можуть бути застосовані для подальшого розвитку теорії стійкості та керування рухом механічних систем з розподіленими параметрами. Результати розділів 3 та 4 можуть бути рекомендовані до застосування в інженерній практиці при проектуванні систем керування космічними апаратами з пружними елементами. Розроблені в розділах 5 та 6 математичні моделі та методи синтезу функцій керування можуть бути застосовані при створенні алгоритмічного забезпечення сучасних роботів-маніпуляторів з пружними ланками.

Особистий внесок здобувача. Усі результати, що представлені до захисту, отримано здобувачем особисто. Стаття [1] опублікована в співавторстві з О.М. Ковальовим і В.Ф. Щербаком. Автору дисертаційної роботи належить виведення рівнянь руху і доведення часткової стабілізованості нелінійної системи. Результати спільних досліджень з Б. Якубчиком (B. Jakubczyk) опубліковані в роботі [6]. Автору дисертації належить доведення теореми про умови стабілізованості й аналіз модельної системи. Стаття [16] опублікована в співавторстві з О. Заводні (O. Sawodny). Автору дисертації належить виведення рівнянь коливання балки Тимошенка з урахуванням подовжніх зсувів і доведення всіх теорем.

Апробація результатів дисертації. Окремі частини дисертаційної роботи детально обговорювалися на таких наукових семінарах:

- Семінар із загальної механіки Інституту прикладної математики і механіки НАН України, 2001 – 2007 рр. Керівник семінару – чл.-кор. НАН України О.М. Ковальов.
- Семінар Інституту механіки Технічного Університету Відня, Відень (Австрія), 2003 р. Керівник семінару – проф. Х. Трогер (H. Troger).
- Семінар Секції математики Міжнародного центра теоретичної фізики ЮНЕСКО і МАГАТЕ ім. Абдуса Салама, Трієст (Італія), 2003 р. Керівник семінару – проф. Д.Т. Ле (D.T. Le).
- Семінар Міжнародної школи вищих досліджень (SISSA), Трієст (Італія), 2003 р. Керівник семінару – проф. А.О. Аграчов.
- Семінар Технічного університету Ільменау, Ільменау (Німеччина), 2004 р. Керівник семінару – проф. О. Заводні (O. Sawodny).
- Семінар кафедри прикладної математики Католицького університету Лувайна, Лувайн-ла-Нев (Бельгія), 2005 р. Керівник семінару – проф. В. Блондель (V. Blondel).
- Семінар відділів нелінійного аналізу та рівнянь з частинними похідними Інституту прикладної математики і механіки НАН України, 2007 р. Керівники семінару - проф. А.Є. Шишков і доктор фіз.-мат. наук О.А. Ковалевський.

У повному обсязі дисертація доповідалася й обговорювалася на семінарі „Математичні проблеми механіки та обчислювальна математика” в Інституті математики НАН України (керівники семінару – акад. НАН України І.О. Луковський та чл.-кор. НАН України В.Л.Макаров, м. Київ, 2008 р.) та семінарі із загальної механіки в Інституті прикладної математики і механіки НАН України (керівник семінару – чл.-кор. НАН України О.М. Ковальов, 2008 р.)

Основні результати дисертації доповідалися та обговорювалися на наступних конгресах, конференціях та наукових зборах:

- Семінар з керування та стабілізації динамічних систем (Control and Stabilization of Dynamical Systems), Міжнародний математичний центр ім. С.Банаха, Варшава (Польща), 17.04 - 2.05.2001 р.;
- Школа з математичної теорії керування, Міжнародний центр теоретичної фізики ЮНЕСКО і МАГАТЕ ім. Абдуса Салама, Трієст (Італія), 3-28.09.2001р.;
- Міжнародні семінари з керування рухом роботів (Robot Motion and Control “RoMoCo”), Познанський технологічний університет, Познань (Польща), 18-

20.10.2001 і 8-10.11.2002 р.;

- Всеросійський конкурс наукових праць молодих учених з механіки та процесів керування, присвячений 100-річчю з дня народження А.І. Лур'є, Санкт-Петербург (Росія), 13-14.12.2001 р. Доповідь відзначено дипломом I ступеня і медаллю переможця;
- Міжнародні Конференції “Моделювання і дослідження стійкості динамічних систем” (DSMSI), Київський національний університет ім. Т. Шевченка, Київ, 27-30.05.2003 і 22-25.05.2007 р.;
- 15-й Всесвітній конгрес Міжнародної федерації автоматичного керування (15th IFAC World Congress), Барселона (Іспанія), 21-26.07.2002 р. Роботу відзначено грамотою IFAC як одну з трьох кращих статей;
- Міжнародні Конференції “Стійкість, керування і динаміка твердого тіла” (ICSCD), Донецьк, 3-7.09.2002 і 1-6.09.2005 р.;
- Школа з математичної теорії керування (School on Mathematical Control Theory), Міжнародний математичний центр ім. С. Банаха, Бендлево-Варшава (Польща), 2-20.09.2002 р.;
- Семінар “Геометрія в нелінійному керуванні” (Geometry in Nonlinear Control), Міжнародний математичний центр ім. С. Банаха, Бендлево (Польща), 16-20.06.2003 р.;
- Міжнародна конференція “Фізика і керування” (PhysCon 2003), С. Петербург (Росія), 20-22.08.2003 р.;
- 48-й Міжнародний науковий колоквиум (IWK 2003), Ільменау (Німеччина), 22-25.09.2003 р.;
- Триместр динамічних і керованих систем, Міжнародна школа вищих досліджень (SISSA), Трієст (Італія), 8.09 - 7.12.2003 р.;
- 2-я Європейська молодіжна конференція “Теорія керування і стабілізація” (European Meeting on Control Theory and Stabilization), Турін (Італія), 3-5.12.2003 р.;
- 42-я Конференція з керування та прийняття рішень (42nd IEEE Conference on Decision and Control CDC'03), Мауї (США), 9-12.12.2003 р.;
- Семінар з математичної теорії систем (Workshop “Mathematische Systemtheorie 2004”), Ельгерсбург (Німеччина), 16-18.02.2004 р.;
- VI Міжнародна молодіжна науково-практична конференція “Людина і Космос”, Дніпропетровськ, 14-16.04.2004 р.;
- Загальні збори Відділення математики НАН України, Інститут математики НАН України, Київ, 28.04.2004 р.;
- Семінар “Геометрія розподілів і систем керування” (Geometry of Distributions and Control Systems), Міжнародний математичний центр ім. С. Банаха, Варшава (Польща), 10-22.05.2004 р.;
- Міжнародні конференції “Класичні проблеми динаміки твердого тіла”, Донецьк, 23-25.06.2004 і 9-13.06.2007 р.;
- IV Європейський математичний конгрес (Fourth European Congress of Mathematics “4есm”), Стокгольм (Швеція), 27.06-2.07.2004 р.;

- Літня школа і конференція по динамічних системах (Summer School and Conference on Dynamical Systems), Міжнародний центр теоретичної фізики ЮНЕСКО і МАГАТЕ ім. Абдуса Салама, Трієст (Італія), 19.07-6.08.2004 р.;
- Семінар ІФАК з узагальнених рішень у задачах керування (IFAC Workshop on Generalized Solutions in Control Problems “GSCP-2004”), Переславль-Залеський (Росія), 21-29.09.2004 р.;
- 16-й Всесвітній конгрес Міжнародної федерації автоматичного керування (16th IFAC World Congress), Прага (Чеська республіка), 4-7.07.2005 р.;
- Засідання Президії НАН України, Київ, 28.12.2005 р.;
- Третя міжнародна конференція з проблем управління, Інститут проблем управління ім. В.О. Трапезникова РАН, Москва (Росія), 20-22.06.2006 р.;
- VIII Кримська Міжнародна математична школа “Метод функцій Ляпунова і його застосування” (МФЛ-2006), Алушта, 10-17.09.2006 р.;
- 45-я Конференція з керування та прийняття рішень (45th IEEE Conference on Decision and Control CDC'06), Сан Дієго (США), 13-15.12.2006 р.;
- Міжнародний конгрес “Нелінійний динамічний аналіз”, присвячений 150-річчю акад. О.М. Ляпунова, Санкт-Петербург (Росія), 4-8.06.2007 р.;
- XIV Міжнародна конференція з автоматичного управління “Автоматика-2007”, Севастополь, 10-14.09.2007 р.;
- Міжнародна конференція з нелінійних диференціальних рівняннях з частинними похідними (Nonlinear partial differential equations “NPDE 2007”, Ялта, 10-15.09.2007 р.;
- X Міжнародна науково-технічна конференція “Моделювання, ідентифікація, синтез систем керування”, п. Канака, АР Крим, 16-23.09.2007 р.;
- Міжнародна конференція з керування в квантових системах “Control, Constraints and Quanta”, Міжнародний математичний центр ім. С. Банаха, Бендлево (Польща), 10-16.10.2007 р.

Публікації. Основні результати дисертації опубліковано в статтях [1-21] у наукових фахових журналах та збірниках наукових праць. До опублікованих праць, що відображають наукові результати дисертації, також належать роботи [22-38].

Структура та обсяг дисертації. Дисертаційна робота викладена на 288 сторінках і містить вступ, основну частину з семи розділів, висновки, список літератури. Дисертація також містить 11 малюнків та одну таблицю. Список використаної літератури складається з 200 джерел і розташований на 23 сторінках.

ОСНОВНИЙ ЗМІСТ

У вступі обґрунтовується актуальність теми, формулюються мета та задачі дослідження, наукова новизна, практичне значення, а також апробація результатів роботи.

У першому розділі подається огляд робіт, які мають безпосереднє відношення до теми дисертації, а також викладено загальну методику дисертаційних досліджень.

Підрозділ 1.1 містить огляд робіт у галузі математичного моделювання та дослідження стійкості руху механічних систем з пружними елементами. У підрозділі 1.2 перелічено результати відомих публікацій з проблем керування та стабілізації моделей пружних систем. У підрозділі 1.3 викладено загальні результати щодо зображення розв'язків диференціальних рівнянь за допомогою неперервних напівгруп операторів у банахових просторах. У підрозділі 1.4 викладено основні положення методу модального керування механічними системами з розподіленими параметрами.

У другому розділі введено клас узагальнених динамічних систем з багатозначним потоком розв'язків та досліджено умови часткової асимптотичної стійкості цих систем у нескінченновимірних просторах [9, 14, 22, 25, 27, 34]. Нехай X – метричний простір, у якому задано функцію відстані ρ . Для дослідження динамічних процесів в X будемо розглядати функції $x(t) \in X$, що визначені при всіх моментах часу $t \in R^+ = [0, +\infty)$. Позначимо за κ множину всіх функцій $x: R^+ \rightarrow X$, позначимо далі за 2^κ множину всіх підмножин κ . Таким чином, елементами множини 2^κ є або пуста множина, або одна функція $x: R^+ \rightarrow X$, або декілька таких функцій.

Означення 2.1. [9] Будемо називати відображення $\pi: X \rightarrow 2^\kappa$ багатозначною D -системою в X , якщо виконані такі умови:

A_1 . $\pi(x_0) \neq \emptyset$ для всіх $x_0 \in X$;

A_2 . кожен елемент $x(\cdot) \in \pi(x_0)$ задовольняє умові $x(0) = x_0$;

A_3 . для кожних $x_0 \in X$, $s \geq 0$, $x(\cdot) \in \pi(x_0)$, $z(\cdot) \in \pi(x(s))$ виконано умови $u(\cdot) \in \pi(x(s))$, $v(\cdot) \in \pi(x_0)$, де $u(t) = x(t+s)$, $v(t) = x(t)$ при $t \leq s$, та $v(t) = z(t-s)$ при $t > s$;

A_4 . для кожних $x_0 \in X$, $\varepsilon > 0$, $T > 0$ існує таке $\delta(x_0, \varepsilon, T) > 0$, що з умов $\rho(\tilde{x}_0, x_0) < \delta$, $\tilde{x}(\cdot) \in \pi(\tilde{x}_0)$ випливає

$$\inf_{x(\cdot) \in \pi(x_0)} \left(\sup_{t \in [0, T]} \rho(\tilde{x}(t), x(t)) \right) < \varepsilon;$$

A_5 . для будь-яких $x_0 \in X$, $T > 0$ та послідовності $\{x_n(\cdot)\} \subset \pi(x_0)$ існує таке $x(\cdot) \in \pi(x_0)$, що

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sup_{t \in [0, T]} \rho(x_n(t), x(t)) \right) = 0.$$

Елементи $x(t)$ множини $\pi(x_0)$ будемо називати *розв'язками задачі Коші* для системи π з початковою умовою $x(0) = x_0$.

У наведеному означенні умови A_1 та A_2 постулюють існування розв'язків, а з умови A_3 випливає, що зсув траєкторії на додатний час також є траєкторією (групова властивість). Умови A_4 та A_5 забезпечують регулярність розв'язків без припущення про їх єдиність. Будемо називати елемент $x_0 \in X$ *особливою точкою* системи π , якщо функція $x(t) \equiv x_0$ належить множині $\pi(x_0)$. Для дослідження асимптотичної поведінки

розв'язків при $t \rightarrow +\infty$ в дисертаційній роботі доведено узагальнення принципу інваріантності ЛаСалля¹ на випадок багатозначних D -систем.

Означення 2.2. Нехай π – багатозначна D -система в X . Будемо називати особливу точку x_0 системи π *асимптотично стійкою по відношенню до функціонала* $y: X \rightarrow R^+$, якщо

- I. Для довільного $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta(\varepsilon) > 0$, що з умови $\rho(\tilde{x}_0, x_0) < \delta$ випливає $y(\tilde{x}(t)) < \varepsilon$ для всіх $\tilde{x}(\cdot) \in \pi(\tilde{x}_0)$, $t \in R^+$.
- II. Існує таке $\Delta > 0$, що з $\rho(\tilde{x}_0, x_0) < \Delta$ випливає $\lim_{t \rightarrow +\infty} y(\tilde{x}(t)) = 0$ для всіх $\tilde{x}(\cdot) \in \pi(\tilde{x}_0)$.

У порівнянні з відомим підходом², в означенні 2.2 не передбачається, що функціонал $y(x)$ відповідає деякій метриці. Відсутність умови позитивної визначеності функціонала дозволяє розглядати це означення як узагальнення поняття асимптотичної стійкості за частиною змінних у сенсі О.М. Ляпунова та В.В. Румянцева.

Для формулювання умов часткової стійкості введемо клас K функцій Хана, який складається з усіх строго зростаючих функцій $\alpha: R^+ \rightarrow R^+$, що задовольняють умову $\alpha(0) = 0$.

Теорема 2.1. [9] Нехай π – багатозначна D -система в метричному просторі X , і нехай x_0 – її особлива точка. Припустимо, що існують неперервні функціонали $y, V: X \rightarrow R^+$, які задовольняють наступні умови:

- C_1 . існують функції $\alpha_1, \alpha_2 \in K$, для яких $\alpha_1(y(x)) \leq V(x) \leq \alpha_2(\rho(x_0, x))$ при всіх $x \in X$;
- C_2 . для будь-яких $\tilde{x}_0 \in X$, $\tilde{x}(\cdot) \in \pi(\tilde{x}_0)$ функція $V(\tilde{x}(t))$ не зростає на R^+ ;
- C_3 . існує таке $\Delta > 0$, що з умов $\rho(\tilde{x}_0, x_0) < \Delta$, $\tilde{x}(\cdot) \in \pi(\tilde{x}_0)$ випливає *предкомпактність* множини $\{\tilde{x}(t) \mid t \geq 0\}$;
- C_4 . $M_1 = \{p \in X \mid V(\tilde{x}(t)) = \text{const} \text{ для деякого } \tilde{x}(\cdot) \in \pi(p)\} \subseteq \text{Ker } y = \{p \in X \mid y(p) = 0\}$.

Тоді особлива точка x_0 асимптотично стійка по відношенню до y .

Ця теорема дозволяє встановити часткову асимптотичну стійкість без припущень про єдиність розв'язків та диференційовність функціонала Ляпунова V . Для застосування цього результату розглянемо окремо випадок D -системи, що визначається диференціальним рівнянням у банаховому просторі.

Нехай E – банахів простір з нормою $\|\cdot\|$, і нехай X – замкнена підмножина простору E , що містить кулю $B_R = \{x \in E \mid \|x\| \leq R\}$, $R > 0$. Тоді X – метричний простір з функцією відстані $\rho(a, b) = \|a - b\|$. Припустимо, що задано замкнений нелінійний оператор $F: D(F) \rightarrow E$ з усюди щільною в X областю визначення $D(F)$. Для початкової умови $x_0 \in X$ розглянемо абстрактну задачу Коші:

$$\frac{dx(t)}{dt} = Fx(t), \quad t \in R^+, \quad x(0) = x_0. \quad (1)$$

Надалі будемо припускати, що F є інфінітезимальним генератором неперервної

¹ LaSalle J.P. *Stability theory and invariance principles* / J.P. LaSalle // Dynamical systems. Vol. 1: (L. Cesari, J.K. Hale, and J.P. LaSalle eds.) . – 1976. – New York: Academic Press. – P. 211–222.

² Мовчан А.А. *Устойчивость процессов по двум метрикам* / А.А. Мовчан // Прикладная математика и механика. – 1960. – Т. 24, Вып. 6. – С. 988–1001.

напівгрупи нелінійних операторів $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ в X . Тоді задача Коші (1) коректна, та всі її узагальнені розв'язки можна зобразити у вигляді:

$$x(t) = S(t)x_0, \quad t \in R^+, \quad x_0 \in X.$$

Таким чином, кожному $x_0 \in X$ відповідає одноелементна множина $\pi(x_0) = \{S(\cdot)x_0\}$, і таке відображення $\pi: X \rightarrow 2^X$ є багатозначною D -системою в X у сенсі означення 2.1. Нехай $V: X \rightarrow R$ – диференційовний за Фреше функціонал, тоді функція часу $V(S(t)x_0)$ є диференційовною на кожному класичному розв'язку задачі (1) при фіксованому x_0 , і похідну $\dot{V}$ в силу (1) можна записати у вигляді:

$$\dot{V}(x(t)) = (Fx(t), \nabla_{x(t)} V),$$

де $(\xi, \nabla_x V)$ – значення лінійного функціонала $\nabla_x V \in E^*$ в точці $\xi \in E$. Припустимо, що $F(0)=0$, тоді відповідна D -система π має особливу точку $x=0$. Будемо казати, що особлива точка $x=0$ диференціального рівняння (1) є асимптотично стійкою по відношенню до функціонала $y: X \rightarrow R^+$, якщо для відповідної D -системи π точка $x=0$ є асимптотично стійкою по відношенню до y згідно з означенням 2.2.

Теорема 2.2. [9] *Нехай F – інфінітезимальний генератор неперервної напівгрупи $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ нелінійних операторів в X , $F(0)=0$, та нехай $y: X \rightarrow R^+$ – неперервний функціонал. Припустимо, що існує диференційовний за Фреше функціонал $V: X \rightarrow R$, що задовольняє наступні умови:*

- 1) $\alpha_1(y(x)) \leq V(x) \leq \alpha_2(\|x\|)$ для деяких $\alpha_1, \alpha_2 \in K$;
- 2) $\dot{V}(x) \leq 0$ для всіх $x \in D(F)$;
- 3) існує таке $\Delta > 0$, що для кожного $\|x_0\| < \Delta$ множина $\bigcup_{t \geq 0} \{S(t)x_0\}$ є предкомпактною в X ;
- 4) множина $\text{Ker } y = \{x \in X \mid y(x) = 0\}$ є інваріантною для (1), тобто з $y(S(\tau)x_0) = 0, \tau \geq 0$ випливає $y(S(t)x_0) = 0$ для всіх $t \in R^+$;
- 5) множина $M = \overline{\{x \in D(F) \mid \dot{V}(x) = 0\}} \setminus \text{Ker } y$ не містить цілих напівтраєкторій системи (1) для $t \in R^+$.

Тоді особлива точка $x=0$ диференціального рівняння (1) є асимптотично стійкою по відношенню до y .

Цей результат розповсюджує теорему Є.О. Барбашина – М.М. Красовського та теореми 19.1, 19.2 з монографії В.В. Румянцева та О.С. Озіранера¹ на задачу часткової асимптотичної стійкості у нескінченновимірних просторах. В окремому випадку $y(x) = \|x\|$ теорема 2.2 описує достатні умови сильної асимптотичної стійкості тривіального розв'язку нелінійного диференціального рівняння (1).

Для використання теореми 2.2 необхідно перевірити умову передкомпактності (відносної компактності) траєкторій нелінійного диференціального рівняння в банаховому просторі. У підрозділі 2.3 запропоновано достатні умови передкомпактності для траєкторій задачі Коші наступного вигляду:

$$\dot{x} = Ax + f(t)R(x, t), \quad x(0) = x_0 \in E, \quad (2)$$

¹ Румянцев В.В. Устойчивость и стабилизация движения по отношению к части переменных / В.В. Румянцев, А.С. Озиранер. – М.: Наука, 1987. – 256 с.

де $A: D(A) \rightarrow E$ – лінійний оператор, $f(t)$ – неперервна функція часу $t \in [0, +\infty)$, $R: E \times [0, +\infty) \rightarrow E$ – неперервне відображення.

Теорема 2.3. [14] Нехай E – банахів простір з базисом, A – інфінітезимальний генератор рівномірно обмеженої C_0 -напівгрупи лінійних операторів $\{e^{tA}\}_{t \geq 0}$ в E , $f \in L^1[0, +\infty)$, $R(x, t) \in K$ при всіх $x \in E$, $t \geq 0$, K – компакт. Припустимо також, що всі множини $\{e^{tA}y | t \geq 0\}$ передкомпактні при $y \in K \cup \{x_0\}$.

Тоді кожний узагальнений розв'язок $x(t)$, $t \geq 0$ задачі (2) міститься у деякій компактній підмножині простору E .

Із використанням цього результату досліджено передкомпактність траєкторій наступної задачі Коші:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + h(x(t))B(x(t)), \quad x(0) = x_0 \in E, \quad (3)$$

де $h: E \rightarrow R^1$ та $B: E \rightarrow E$ – локально-ліпшіцеві відображення.

Теорема 2.4. [14] Нехай E – банахів простір з базисом, A – інфінітезимальний генератор рівномірно обмеженої C_0 -напівгрупи лінійних операторів $\{e^{tA}\}_{t \geq 0}$ в E , всі множини $\{e^{tA}y | t \geq 0\}$ передкомпактні при $y \in E$, $B: E \rightarrow E$ – компактний оператор. Припустимо, що існує диференційовний функціонал $w: E \rightarrow R^1$, що задовольняє умови:

- 1) $M_c = \{x | w(x) \leq c\}$ обмежені при всіх $c \in R$;
- 2) $\inf_{\|x\| \leq r} w(x) > -\infty$ при кожному $r > 0$;
- 3) похідна $\dot{w}(x)$ в силу рівняння (3) задовольняє оцінці

$$\dot{w}(x) \leq k_1 h(x) \leq 0, \quad \forall x \in D(A), \quad k_1 = \text{const} > 0.$$

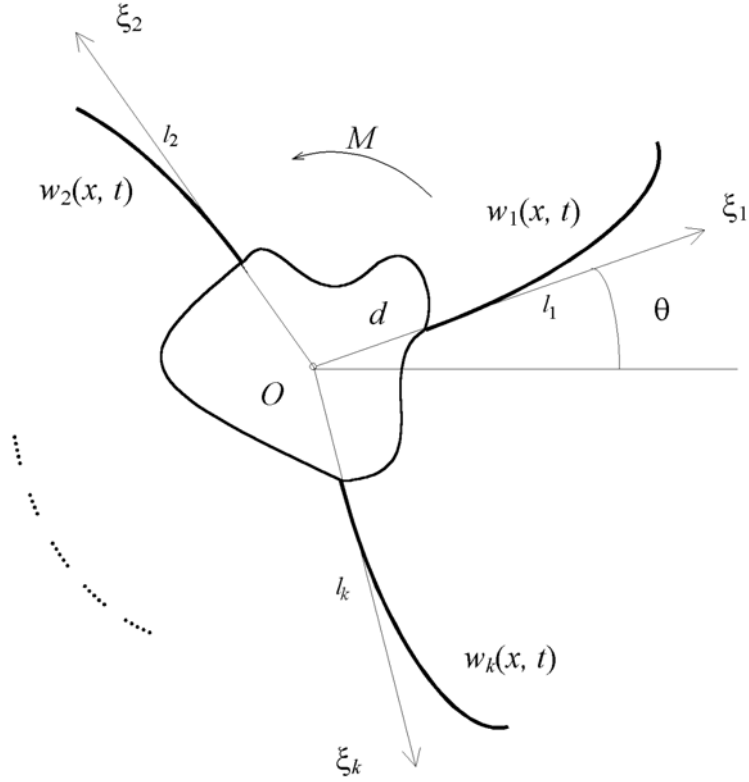
Тоді для кожного $x_0 \in E$ задача Коші (3) має єдиний розв'язок $x(t)$ на $[0, +\infty)$, при цьому $\{x(t) | t \geq 0\}$ – передкомпактна множина в просторі E .

Ці результати використано далі при розв'язанні задач сильної стабілізації та часткової стабілізації моделей механічних систем з пружними балками.

У третьому розділі досліджено проблеми керованості та стабілізації механічної системи, що складається з твердого тіла з k приєднаними балками Ейлера – Бернуллі [1, 5, 8, 23, 24, 28, 29]. Кількість $k \geq 1$ балок може бути довільною. Розглянута система обертається в площині навколо нерухомої точки O під дією керуючого моменту M , що прикладений до твердого тіла (мал. 1.) Позначимо за l_i довжину балки з номером i , $w_i(x, t)$ – поперечний зсув точки i -ї балки з лагранжевою координатою $x \in [0, l_i]$ в момент часу t , $\theta(t)$ – кут між віссю $O\xi_1$ та нерухомим напрямком. Вважається, що кожна балка жорстко защемлена одним зі своїх кінців у твердому тілі на відстані d від точки O . Розглянута система моделює обертальний рух супутника у вигляді твердого тіла-носія з пружними антенами. Для виводу рівнянь руху цієї механічної системи зобразимо поперечний зсув $w_i(x, t)$ сумою ряду Фур'є по певній системі базисних функцій $\{u_{in}(x)\}$:

$$w_i(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_{in}(x) q_{in}(t), \quad (4)$$

та будемо вважати коефіцієнти цього розвинення $q_{in}(t)$ узагальненими координатами, що відповідають пружним коливанням балки.



Мал. 1. Тверде тіло з пружними балками.

Функції $u_{in}(x)$ у розвиненні (4) обрано власними функціями такої задачі Штурма – Ліувілля:

$$\frac{d^4}{dx^4} u_{in}(x) = \lambda_{in} u_{in}(x), \quad x \in (0, l_i),$$

$$u_{in}(0) = u'_{in}(0) = u''_{in}(l_i) = u'''_{in}(l_i) = 0, \quad \int_0^{l_i} u_{in}^2(x) dx = 1.$$

Відомо, що при кожному фіксованому $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ ця задача має зліченну систему власних значень $\lambda_{i1} < \lambda_{i2} < \dots < \lambda_{in} < \dots$, а відповідні власні функції $\{u_{in}(x)\}_{n=1}^{\infty}$ утворюють ортонормований базис в $L^2(0, l_i)$. Введемо змінні

$$\xi_{in} = c_i \sqrt{\lambda_{in}} q_{in}, \quad \eta_{in} = \dot{q}_{in}, \quad \omega = \dot{\theta},$$

де $c_i = \sqrt{E_i I_i / \rho_i}$, величини E_i , I_i та ρ_i позначають, відповідно, модуль Юнга, момент інерції поперечного перетину та масу на одиницю довжини i -ї балки. Будемо вважати всі ці величини додатними константами.

Рівняння руху розглянутої механічної системи записано в формі рівнянь Лагранжа другого роду наступним чином:

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \omega, \quad \dot{\omega} = v, \\ \dot{\xi}_{in} &= c_i \sqrt{\lambda_{in}} \eta_{in}, \\ \dot{\eta}_{in} &= -c_i \sqrt{\lambda_{in}} \xi_{in} + \frac{\omega^2 \xi_{in}}{c_i \sqrt{\lambda_{in}}} - \frac{J_{in}}{\rho_i} v, \end{aligned} \quad i=1, 2, \dots, k, \quad n=1, 2, \dots, \quad (5)$$

де $v \in R^1$ – параметр керування, $J_{in} = \int_0^{l_i} (x+d)u_{in}(x)\rho_i dx$. У підрозділі 3.1 наведено перетворення [1], що зв'язує момент M з керуючим параметром v . Система (5) розглядається у гільбертовому просторі l^2 , елементами якого є нескінченні вектори

$$x = (\theta, \omega, \xi_{11}, \eta_{11}, \dots, \xi_{k1}, \eta_{k1}, \xi_{12}, \eta_{12}, \dots)^T,$$

що задовольняють умову

$$\|x\|^2 = \theta^2 + \omega^2 + \sum_{i=1}^k \sum_{n=1}^{\infty} (\xi_{in}^2 + \eta_{in}^2) < \infty.$$

У підрозділі 3.2 одержано допоміжну лему 3.1, за допомогою якої доведено основний результат (теорему 3.2) про наближену керованість розглянутої моделі.

Теорема 3.2. [8] *Припустимо, що*

$$c_i^2 \lambda_{in} \neq c_j^2 \lambda_{jm} \quad (6)$$

для всіх $(i,n) \neq (j,m)$. Тоді система лінійного наближення для (5) в околі нуля є наближено керованою.

Для розв'язання задачі стабілізації нелінійної системи (5) у підрозділі 3.3 дисертації запропоновано такий функціонал керування зі зворотним зв'язком:

$$v(x) = -\frac{1}{J_0} \left(c_0 \theta + h \omega - \sum_{i=1}^k \sum_{n=1}^{\infty} c_i \sqrt{\lambda_{in}} J_{in} \xi_{in} \right), \quad (7)$$

де J_0 – момент інерції твердого тіла-носія відносно осі обертання, c_0 та h – додатні константи.

Теорема 3.3. [8] *Нехай виконано припущення (6) і нехай c_0, h – додатні константи. Тоді керування зі зворотним зв'язком $v=v(x)$ у вигляді (7) забезпечує сильну асимптотичну стійкість тривіального розв'язку нелінійної системи (5).*

У підрозділі 3.4 розглянуто випадок системи з однаковими механічними параметрами всіх балок: $l_i=l, \rho_i=\rho, c_i=c$ для $i=1, 2, \dots, k$. За такими припущеннями умова (6) не виконується при $k \geq 2$. Показано, що система лінійного наближення для (5) не є сильно стабілізовною в цьому випадку. Для розв'язання задачі часткової стабілізації розглянемо обмежений лінійний оператор [5]:

$$P: x \in l^2 \mapsto \left(\theta, \omega, \sum_{i=1}^k \xi_{i1}, \sum_{i=1}^k \eta_{i1}, \dots, \sum_{i=1}^k \xi_{in}, \sum_{i=1}^k \eta_{in}, \dots \right)^T \in l^2.$$

Якщо $k=1$, то P є одиничним оператором в l^2 . У загальному випадку вектор Px описує стан „усередненої” механічної системи, для якої узагальнені координати з індексом n відповідають усередненим значенням модальних координат того ж самого індексу n відносно всіх k балок початкової системи.

Теорема 3.4. [5] *Нехай c_0, h – довільні додатні константи. Тоді керування зі зворотним зв'язком $v=v(x)$ у вигляді (7) забезпечує асимптотичну стійкість розв'язку $x=0$ нелінійної системи (5) по відношенню до обмеженого функціонала*

$$y(x) = \|Px\|$$

в l^2 . При цьому розв'язок $x=0$ замкненої системи (5), (7) є неасимптотично стійким за Ляпуновим.

З механічної точки зору стабілізація розв'язку $x=0$ по відношенню до функціонала $y(x)=\|Px\|$ призводить до стабілізації орієнтації твердого тіла-носія з одночасним гасінням усереднених координат та швидкостей коливань пружних балок.

У підрозділі 3.5 розглянуто підсистему рівнянь руху, що містить скінчену кількість пружних координат для випадку двох балок [1]. Наведено результат чисельного інтегрування рівнянь руху, що ілюструє ефективність запропонованого функціонала керування для задачі стабілізації.

У четвертому розділі досліджено задачі програмного керування системою (5) та її наближеннями [12, 13, 15, 17, 18, 35–37] із використанням стандартної канонічної форми Бруновського¹. Спочатку розглянуто підсистему лінійного наближення для системи (5), що відповідає випадку однієї балки ($k=1$) та узагальненим координатам з індексами не вище за N :

$$\begin{aligned}\dot{\xi}_0 &= \eta_0, \\ \dot{\eta}_0 &= v, \\ \dot{\xi}_j &= \omega_j \eta_j, \\ \dot{\eta}_j &= -\omega_j \xi_j + b_j v, \quad (j=\overline{1, N}),\end{aligned}\tag{8}$$

де $\xi_0=\theta$, $\eta_0=\omega$, ξ_j та η_j – координата та швидкість, що відповідають j -ї моді коливань балки, $j=1, 2, \dots, N$. Коефіцієнти систем (5) і (8) зв'язані співвідношеннями

$$\omega_j = c_1 \sqrt{\lambda_{1j}} > 0, \quad b_j = -J_{1j} / \rho_1.\tag{9}$$

Позначимо

$$x_N = (\xi_0, \eta_0, \dots, \xi_N, \eta_N)^T \in R^{2N+2}, \quad \tilde{x}_N = (\tilde{\xi}_0, \tilde{\eta}_0, \dots, \tilde{\xi}_N, \tilde{\eta}_N)^T \in R^{2N+2}.$$

Теорема 4.1. [12] *Припустимо, що $b_j \neq 0$ та всі $\omega_j^2 \neq 0$ різні для $j=1, 2, \dots, N$. Тоді існує лінійне перетворення*

$$\tilde{x}_N = \Phi x_N, \quad \tilde{v} = \alpha v + \beta(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_N)^T, \quad \det \Phi \neq 0, \alpha \neq 0,\tag{10}$$

що приводить систему (8) до стандартної канонічної форми Бруновського:

$$\begin{aligned}\dot{\tilde{\xi}}_{j-1} &= \tilde{\eta}_{j-1}, \\ \dot{\tilde{\eta}}_{j-1} &= \tilde{\xi}_j, \quad (j=1, 2, \dots, N), \\ \dot{\tilde{\xi}}_N &= \tilde{\eta}_N, \\ \dot{\tilde{\eta}}_N &= \tilde{v}.\end{aligned}\tag{11}$$

У підрозділі 4.1 наведено явний вигляд компонент перетворення (10) для довільної кількості пружних координат N . Застосування цього результату дозволяє записати розв'язки наступних двоточкових задач керування.

Задача 4.1. Для заданих

$$t_0 < t_1, x^0 = (\xi_0^0, \eta_0^0, \dots, \xi_N^0, \eta_N^0)^T \in R^{2N+2}, x^1 = (\xi_0^1, \eta_0^1, \dots, \xi_N^1, \eta_N^1)^T \in R^{2N+2}$$

¹ Brunovský P. *A classification of linear controllable systems* / P. Brunovský // Kybernetika. – 1970. – Vol. 6. – P. 173–188.

знайти функцію керування $v = v(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, для якої система (8) має розв'язок $x_N(t)$, $t \in [t_0, t_1]$, що задовольняє граничні умови $x_N(t_0) = x^0$, $x_N(t_1) = x^1$.

Задача 4.2. Для даних $t_0 < t_1$ та $x^0, x^1 \in \mathbb{R}^{2N+2}$ знайти функцію керування $\bar{v} \in L_2[t_0, t_1]$, яка мінімізує значення функціонала

$$J(v) = \int_{t_0}^{t_1} |v(t)|^2 dt$$

в класі всіх керувань $v \in L_2[t_0, t_1]$, що розв'язують задачу 4.1.

Сформулюємо основні результати щодо застосовності теореми 4.1 для розв'язання цих задач.

Теорема 4.2. [12] *Нехай виконано умови теореми 4.1. Тоді для будь-яких значень $t_0 < t_1$, $x^0 \in \mathbb{R}^{2N+2}$, $x^1 \in \mathbb{R}^{2N+2}$ існує керування $v = v_{x^0 x^1}(t)$, що розв'язує задачу 4.1.*

Вказане керування задається формулою

$$v_{x^0 x^1}(t) = \alpha^{-1} \left(\frac{d^{2N+2}}{dt^{2N+2}} + \sum_{p=1}^N \gamma_p \frac{d^{2p}}{dt^{2p}} \right) y(t), \quad t \in [t_0, t_1],$$

де $y \in C^{2N+2}[t_0, t_1]$ - довільна функція, що задовольняє певним граничним умовам при $t = t_0$ та $t = t_1$ (явний вигляд граничних умов та коефіцієнтів γ_p наведено в підрозділі 4.1).

У підрозділі 4.2 встановлено, що умови теореми 4.1 є остаточною в тому сенсі, що нелінійна скінченновимірна апроксимація системи (5) не може бути зведена до канонічної форми Бруновського за будь-якою кількістю узагальнених координат. А саме, доведено такий результат.

Теорема 4.3. [13] *Розглянемо нелінійну систему*

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_0 &= \eta_0, \\ \dot{\eta}_0 &= v, \\ \dot{\xi}_j &= \omega_j \eta_j, \\ \dot{\eta}_j &= (\eta_0^2 r_j - \omega_j) \xi_j + b_j v, \quad (j = \overline{1, N}) \end{aligned} \tag{13}$$

і припустимо, що $0 < \omega_1 < \dots < \omega_N$, $b_j \neq 0$, $r_j \neq 0$ для всіх $j = \overline{1, N}$. Тоді не існує дифеоморфізму $(x_N, v) \mapsto (\tilde{x}_N, \tilde{v}) : \tilde{x}_N = \Phi(x_N), \tilde{v} = \alpha(x_N)v + \beta(x_N)$, який зводив би систему (13) до канонічної форми Бруновського (11).

З цієї теореми випливає, що нелінійна система (13) не є плоскою (flat) за термінологією М. Fliess, J. Lévine, Ph. Martin, P. Rouchon¹. Теорему 4.2 застосовано для розв'язання задачі оптимального керування.

Теорема 4.4. [15] *Нехай $b_j \neq 0$, $\omega_j \neq 0$, та всі ω_j^2 різні для $j = \overline{1, N}$. Тоді для будь-яких $x^0, x^1 \in \mathbb{R}^{2N+2}$, $\tau > 0$ існує єдине оптимальне керування $v = \bar{v}_N(t)$, $t \in [0, \tau]$, що розв'язує задачу 4.2 для системи (8). Вказане оптимальне керування є гладкою функцією, що визначається формулою*

¹ Fliess M. *Flatness and defect of nonlinear systems: introductory theory and examples* / M. Fliess, J. Lévine, Ph. Martin, P. Rouchon // Internat. Journal of Control. – 1995. – Vol. 61(6). – P. 1327–1361.

$$\bar{v}_N(t) = k_0 + k_1 t + \sum_{j=1}^N (U_j \cos(\omega_j t) + V_j \sin(\omega_j t)), t \in [0, \tau], \quad (12)$$

де коефіцієнти k_0, k_1, U_j, V_j задовольняють певній системі лінійних алгебраїчних рівнянь (систему наведено в підрозділі 4.3).

Сім'я оптимальних керувань з теореми 4.3 може бути використана при наближеному розв'язанні задачі керування нескінченновимірною системою. Для формулювання цього результату запишемо лінеаризовану (в околі нуля) систему (5) в операторному вигляді:

$$\dot{x} = Ax + Bv, \quad (14)$$

де $x = (\xi_0, \eta_0, \xi_1, \eta_1, \dots)^T \in l^2$ – фазовий вектор, $v \in R^1$ – керування, лінійний оператор $A: D(A) \rightarrow l^2$ задано блочно-діагональною матрицею

$$A = \text{diag}(A_0, A_1, A_2, \dots), \quad A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A_j = \begin{pmatrix} 0 & \omega_j \\ -\omega_j & 0 \end{pmatrix}, j=1, 2, \dots,$$

$$B = (0, 1, 0, b_1, 0, b_2, \dots)^T \in l^2.$$

Позначимо

$$S = \left\{ x \in l^2 \mid \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\sum_{j=n+1}^{\infty} b_j^2 \right) \left(\sum_{j=1}^n \frac{\xi_j^2 + \eta_j^2}{b_j^2} \right) \right\}. \quad (15)$$

Теорема 4.5. [17] Нехай $b_j \neq 0, \omega_j > 0, \omega_i \neq \omega_j$ при всіх $i \neq j$, та

$$\sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^{\infty} \frac{1}{(\omega_i - \omega_j)^2} < \infty. \quad (16)$$

Тоді існує $\tau > 0$, при якому для кожних $x^0, x^1 \in S \subset l^2$ та $\varepsilon > 0$ є таке число $N_0 = N_0(x^0, x^1, \varepsilon)$, що нерівність

$$\|x(\tau; x^0, \bar{v}_N) - x^1\| < \varepsilon$$

виконана при всіх $N \geq N_0$. Керування $v = \bar{v}_N(t)$, $0 \leq t \leq \tau$, визначено формулою (12).

Для обґрунтування можливості практичного застосування цього результату в підрозділі 4.5 перевірено умови збіжності ряду (16) для рівняння (14), якщо коефіцієнти відповідають формулам (9) для балки Ейлера – Бернуллі.

Висновок з теореми 4.5. [18] Нехай коефіцієнти системи (14) визначаються формулами (9). Тоді для кожних x^0, x^1 із щільної підмножини $S \subset l^2$ та будь-якого $\varepsilon > 0$ існує керування у формі (12), при якому відповідний розв'язок системи (14) задовольняє оцінку

$$\|x(\tau; x^0, \bar{v}_N) - x^1\| < \varepsilon.$$

У п'ятому розділі запропоновано математичну модель просторового руху керованого робота-маніпулятора, що складається з n балок Ейлера – Бернуллі та трьох твердих тіл (платформи, маточини, вантажу) [2, 3, 19 – 21, 26, 38]. Ця модель враховує розподіл мас твердих тіл і телескопічні зсуви ланок. Використовуючи варіаційний принцип Гамільтона – Остроградського, отримано рівняння руху маніпулятора у вигляді системи нелінійних звичайних диференціальних рівнянь та

рівнянь з частинними похідними (підрозділи 5.1 – 5.2). У загальному вигляді ці рівняння опубліковано в статті [3]. Встановлено умови існування окремих розв'язків цієї системи, що відповідають стану рівноваги маніпулятора (підрозділ 5.3).

У підрозділах 5.4 – 5.6 досліджено систему лінійного наближення в околі стану рівноваги для випадку маніпулятора з одною ланкою у вигляді балки довжини l . Таким чином, у момент часу t компоненти відносного зсуву точки центральної лінії балки з просторовою координатою $x \in [0, l]$ визначаються функціями $y(x, t)$ та $z(x, t)$ у відповідній рухомій декартовій системі координат. Зазначена система координат відповідає послідовним обертанням фіксованої системи координат на кут $\varphi_T(t)$ у горизонтальній площині та $\varphi_R(t)$ у вертикальній площині. Система перетворює такі обертання під дією керуючих моментів M_T та M_R , що прикладені до маточини в нижній точці балки. Будемо припускати, що тверде тіло (вантаж) жорстко приєднано до верхньої частини балки у власному центрі мас. Для кожного значення φ_R^0 існує керуючий момент $M_R = M_R^0$, що реалізує стан рівноваги $\varphi_T(t) = 0$, $\varphi_R(t) = \varphi_R^0$, $y(x, t) = 0$, $z(x, t) = z_0(x)$ розглянутої механічної системи. Система лінеаризованих рівнянь руху в околі такого стану рівноваги має наступний вигляд [19]:

$$\ddot{y}(x, t) + \frac{1}{\rho}(c_z y''(x, t))'' = \psi_T(x)u_T, \quad \ddot{\tilde{z}}(x, t) + \frac{1}{\rho}(c_y \tilde{z}''(x, t))'' = g\tilde{\varphi}_R \sin \varphi_R^0 - xu_R, \quad x \in (0, l), \quad (17)$$

$$y|_{x=0} = \tilde{z}|_{x=0} = 0, y'|_{x=0} = \tilde{z}'|_{x=0} = 0, \quad (18)$$

$$\frac{1}{m}(c_z y'')' - \ddot{y} + \psi_T(x)u_T \Big|_{x=l} = 0, \quad -c_z y'' - J_3 \ddot{y}' + J_3 \psi_T'(x)u_T \Big|_{x=l} = 0, \quad (19)$$

$$\frac{1}{m}(c_y \tilde{z}'')' + g\tilde{\varphi}_R \sin \varphi_R^0 - \ddot{\tilde{z}} - lu_R \Big|_{x=l} = 0, \quad c_y \tilde{z}'' + J_2(u_R + \ddot{\tilde{z}}') \Big|_{x=l} = 0, \quad (20)$$

$$\ddot{\varphi}_T = u_T, \quad \ddot{\varphi}_R = u_R, \quad (21)$$

де u_T та u_R – керуючі параметри, що зв'язані з моментами M_T та M_R за допомогою відомих перетворень,

$$\tilde{z}(x, t) = z(x, t) - z_0(x), \quad \tilde{\varphi}_R(t) = \varphi_R(t) - \varphi_R^0, \quad \tilde{M}_R = M_R - M_R^0, \quad \psi_T(x) = x \cos \varphi_R^0 - z_0(x) \sin \varphi_R^0 - R.$$

Процедуру для обчислення форми рівноваги $z_0(x)$ та моменту M_R^0 наведено в підрозділі 5.3. Параметри системи (17)–(21) мають таку фізичну інтерпретацію: $\rho(x)$ – маса на одиницю довжини балки; $c_z(x) = E(x)I_z(x)$, $c_y(x) = E(x)I_y(x)$; $E(x)$ – модуль Юнга; $I_z(x)$ та $I_y(x)$ – моменти інерції поперечного перетину балки відносно відповідних осей z та y ; m – маса твердого тіла (вантажу); J_1 , J_2 , J_3 – головні центральні моменти інерції твердого тіла (вантажу); m_0 – маса маточини; I_1 , I_2 , I_3 – моменти інерції маточини; R – радіус платформи, відносно якої обертається маточина; I_0 – момент інерції платформи; d – відстань між початком рухомої системи координат та центром мас маточини.

Для запису системи рівнянь (17)–(21) в компактній формі розглянемо гільбертів простір

$$X = \{(\eta, \zeta, \phi, \omega, p, q)^T : \eta \in H^2(0, l), \zeta \in L_2(0, l), \eta(0) = \eta'(0) = 0, \phi, \omega, p, q \in R\},$$

де $H^k(0, l)$ – простір Соболева функцій з $L_2(0, l)$, що мають узагальнені похідні порядку до k включно з $L_2(0, l)$. Для елементів

$$\xi_1 = (\eta_1, \zeta_1, \phi_1, \omega_1, p_1, q_1)^T \in X, \quad \xi_2 = (\eta_2, \zeta_2, \phi_2, \omega_2, p_2, q_2)^T \in X,$$

скалярний добуток визначено формулою

$$\langle \xi_1, \xi_2 \rangle_X = \int_0^l (\eta_1''(x)\eta_2''(x) + \zeta_1(x)\zeta_2(x))dx + \phi_1\phi_2 + \omega_1\omega_2 + p_1p_2 + q_1q_2.$$

Введемо лінійний оператор $A: D(A) \rightarrow X$ та елемент $B \in X$ наступним чином:

$$A: \xi = \begin{pmatrix} \eta \\ \zeta \\ \phi \\ \omega \\ p \\ q \end{pmatrix} \mapsto A\xi = \begin{pmatrix} \zeta \\ -\frac{1}{\rho}(c\eta'')'' + \gamma\phi \\ \omega \\ 0 \\ \gamma\phi + \frac{1}{m}(c\eta'')'|_{x=l} \\ -\frac{c}{J}\eta''|_{x=l} \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 \\ \psi \\ 0 \\ 1 \\ \psi(l) \\ \psi'(l) \end{pmatrix}. \quad (22)$$

Передбачається, що $c(x) > 0$ та $\psi(x)$ – функції класу $C^2[0, l]$; $J > 0$ та γ – константи.

Нехай $(y(x, t), \tilde{z}(x, t), \varphi_T(t), \tilde{\varphi}_R(t))$ є класичним розв'язком задачі (17)–(21) з керуванням $(u_T(t), u_R(t))$ для $0 \leq t < \tau$, $\tau \leq +\infty$. Позначимо

$$\xi_T(t) = \begin{pmatrix} y(\cdot, t) \\ \dot{y}(\cdot, t) \\ \varphi_T(t) \\ \dot{\varphi}_T(t) \\ \dot{y}(l, t) \\ \dot{y}'(l, t) \end{pmatrix}, \quad \xi_R(t) = \begin{pmatrix} \tilde{z}(\cdot, t) \\ \dot{\tilde{z}}(\cdot, t) \\ \tilde{\varphi}_R(t) \\ \dot{\tilde{\varphi}}_R(t) \\ \dot{\tilde{z}}(l, t) \\ \dot{\tilde{z}}'(l, t) \end{pmatrix}.$$

Тоді $\xi_T(t) \in D(A)$ та $\xi_R(t) \in D(A)$ для всіх $t \in [0, \tau)$. Розглянемо пару (A_T, B_T) , яка відповідає позначенням для (A, B) з $\psi(x) = \psi_T(x)$, $c(x) = c_z(x)$, $J = J_3$, $\gamma = 0$ в формулі (22). Аналогічно, нехай (A_R, B_R) – пара, що відповідає випадку $\psi(x) = -x$, $c(x) = c_y(x)$, $J = J_2$, $\gamma = g \sin \varphi_R^0$ у визначенні (A, B) . Таким чином, крайову задачу (17) – (21) зведено до наступної системи диференціальних рівнянь:

$$\dot{\xi}_T = A_T \xi_T + B_T u_T, \quad (23)$$

$$\dot{\xi}_R = A_R \xi_R + B_R u_R, \quad (24)$$

де (ξ_T, ξ_R) – фазовий вектор, (u_T, u_R) – вектор керування. Надалі будемо вважати цю систему абстрактним формулюванням задачі (17)–(21) з $\xi_T, \xi_R \in X$ та $u_T, u_R \in R$.

Оскільки система (23), (24) розпадається на дві незалежні підсистеми, то проблему стабілізації можна розв'язувати окремо по відношенню до компонент ξ_T та ξ_R . Сформулюємо основні результати у цьому напрямку.

Теорема 5.1. [19] *Розглянемо задачу Коші при $t \geq 0$:*

$$\dot{\xi}(t) = A\xi(t) + Bu, \quad (25)$$

$$\xi(0) = \xi_0 \in X, \quad (26)$$

де A, B визначаються формулами (22), $u = h(\xi)$,

$$h(\xi) = -\frac{1}{\beta} \left\{ k\omega + \left(\alpha - \gamma \left(\int_0^l \rho \psi dx + m\psi(l) \right) \right) \phi + \int_0^l c\eta''\psi'' dx + (c\eta''\psi' - (c\eta'')'\psi)|_{x=0} - \gamma \left(\int_0^l \rho \eta dx + m\eta(l) \right) \right\} \quad (27)$$

$k > 0$ – довільна константа, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ – достатньо великі константи.

Тоді задача Коші (25)–(26) з керуванням $u = h(\xi)$ коректна при $t \geq 0$, а розв'язок

$\xi = 0$ є стійким за Ляпуновим, а саме, для кожного $\varepsilon > 0$ існує таке $\delta = \delta(\varepsilon) > 0$, що будь-який розв'язок задачі (25)–(27) задовольняє умову

$$\|\xi_0\| < \delta \Rightarrow \|\xi(t)\| < \varepsilon, \forall t \geq 0.$$

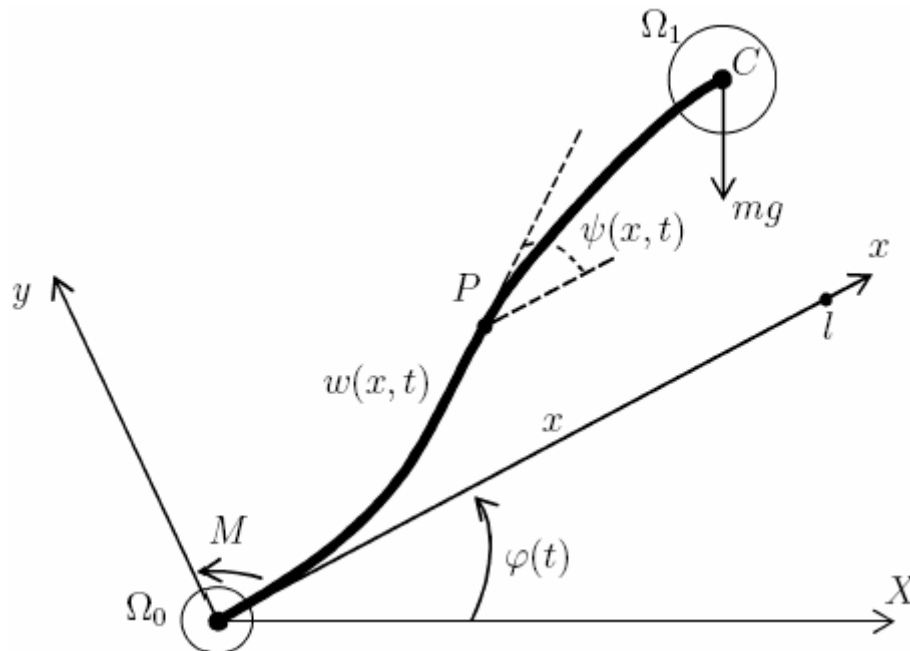
Припустимо далі, що $\rho = \text{const}$, $c = \text{const}$.

Теорема 5.2. [21] Нехай α , β – достатньо великі константи, $k > 0$. Тоді кожна напівтраєкторія $\{\xi(t)\}_{t \geq 0}$ рівняння (25) з керуванням $u = h(\xi)$ у вигляді зворотного зв'язку (27) міститься у деякій компактній підмножині простору X .

Теорема 5.3. [20] Нехай α , β – достатньо великі константи, $k > 0$. Припустимо також, що $\psi(x) = -x$ (тобто рівняння (25) описує коливання у вертикальній площині). Тоді розв'язок $\xi = 0$ рівняння (25) з керуванням $u = h(\xi)$ у вигляді зворотного зв'язку (27) є асимптотично стійким за Ляпуновим.

У підрозділі 5.7 розглянуто математичну модель маніпулятора з гнучкими ланками, що з'єднані пружними шарнірами [2]. Для цієї моделі отримано керування, що забезпечує асимптотичну стійкість стану рівноваги та наведено результати чисельного моделювання руху. Доведено, що розглянута система є спостережуваною.

У шостому розділі запропоновано та досліджено модель керованого робота-маніпулятора, що складається з твердого тіла Ω_0 (маточини), пружної балки довжини l , та твердого тіла Ω_1 (вантажу) [4, 7, 10, 11, 16, 30, 33]. Розглянута механічна система обертається у вертикальній площині відносно нерухомої точки O під дією керуючого моменту M , що прикладений до тіла Ω_0 (мал. 2).



Мал. 2. Маніпулятор з балкою Тимошенка.

Орієнтація тіла Ω_0 в момент часу t визначається кутом $\varphi(t)$ між нерухомою горизонтальною віссю OX та рухомою віссю Ox . Деформація пружної балки у рухомій системі координат, що пов'язана з тілом Ω_0 , визначається функціями $w(x, t)$

та $\psi(x, t)$, $0 \leq x \leq l$, згідно з моделлю С.П. Тимошенка. Користуючись варіаційним принципом Гамільтона – Остроградського, в підрозділі 6.1 отримано таку систему інтегро-диференціальних рівнянь руху [16]:

$$\begin{aligned}
 \ddot{w} + \frac{1}{\rho} (K(\psi - w')) &= -g \cos \varphi - x \ddot{\varphi} + \dot{\varphi}^2 w + \frac{1}{\rho} ((\rho_2 \dot{\varphi}^2 - g \rho_1 \sin \varphi) w')', \\
 \ddot{\psi} + \frac{K}{I_\rho} (\psi - w') - \frac{1}{I_\rho} (EI \psi')' &= -\ddot{\varphi}, \quad x \in (0, l); \\
 w|_{x=0} = \psi|_{x=0} &= 0; \\
 K(\psi - w')|_{x=l} &= m \left\{ \ddot{w} + l \ddot{\varphi} - \dot{\varphi}^2 w + g \cos \varphi + (l \dot{\varphi}^2 - g \sin \varphi) w' \right\}_{x=l}; \\
 -EI \psi'|_{x=l} &= J_c (\ddot{\varphi} + \ddot{\psi}|_{x=l}), \\
 M(t) = \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} - \frac{\partial L}{\partial \varphi} &= \left\{ J_c + J_0 + m[l^2 + w^2(l, t)] + \int_0^l [I_\rho + (x^2 + w^2) \rho - \rho_2 w'^2] dx \right\} \ddot{\varphi} + \\
 + \int_0^l (\rho x \ddot{w} + I_\rho \ddot{\psi} + 2\rho w \dot{\varphi} \dot{w} - 2\rho_2 w' \dot{\varphi} \dot{w}') dx &+ m(l \ddot{w} + 2w \dot{\varphi} \dot{w})|_{x=l} + J_c \ddot{\psi}|_{x=l} + \\
 + g \left\{ \int_0^l \left(\rho x - \frac{1}{2} \rho_1 w'^2 \right) dx + ml \right\} \cos \varphi - g \left\{ \int_0^l \rho w dx + mw(l, t) \right\} \sin \varphi, & \quad (28)
 \end{aligned}$$

де $\rho_1(x) = \int_x^l \rho(\xi) d\xi + m$, $\rho_2(x) = \int_x^l \xi \rho(\xi) d\xi + ml$, E – модуль Юнга, I – момент інерції перетину балки, ρ – маса на одиницю довжини балки, m та J_c – маса та центральний момент інерції твердого тіла Ω_1 (вантажу), J_0 – момент інерції твердого тіла Ω_0 (маточини), g – прискорення вільного падіння. Коефіцієнт $K = \gamma GA$ залежить від модуля пружності відносно зсуву (G), площі перетину балки (A), та константи γ , що залежить від геометрії перетину балки. Передбачається, що ρ , I_ρ , EI , K – додатні диференційовані функції, що залежать від просторової координати x .

Система (28) має стан рівноваги

$$\varphi(t) = \varphi_0, w(x, t) = w_0(x), \psi(x, t) = \psi_0(x), M(t) = M_0$$

при виконанні наступних умов:

$$\begin{aligned}
 (K(w'_0(x) - \psi_0(x)))' &= g \left\{ \rho \cos \varphi_0 + (\rho_1 w'_0)' \sin \varphi_0 \right\}; \\
 (EI \psi'_0(x))' + K(w'_0(x) - \psi_0(x)) &= 0, \quad x \in (0, l); \\
 w_0(0) = \psi_0(0) = 0; \psi'_0(l) = 0; K(\psi_0(l) - w'_0(l)) &= mg(\cos \varphi_0 - w'_0(l) \sin \varphi_0); \\
 \frac{M_0}{g} &= \left(\int_0^l \left(\rho x - \frac{1}{2} \rho_1 w'^2_0 \right) dx + ml \right) \cos \varphi_0 - \left(\int_0^l \rho w_0 dx + mw_0(l) \right) \sin \varphi_0. \quad (29)
 \end{aligned}$$

Нехай (φ_0, w_0, ψ_0) задовольняє системі (29) при певному M_0 . Підставляючи

$$\varphi = \varphi_0 + \tilde{\varphi}, w = w_0 + \tilde{w}, \psi = \psi_0 + \tilde{\psi}, M = M_0 + \tilde{M}$$

у динамічні рівняння (28), в підрозділі 6.2 отримано таку систему рівнянь збуреного руху:

$$\begin{aligned}
 \ddot{\tilde{\varphi}} &= v; \\
 \ddot{\tilde{w}} + \frac{1}{\rho} (K(\tilde{\psi} - \tilde{w}'))' &= -xv + g \tilde{\varphi} \sin \varphi_0 - \frac{g}{\rho} ((\tilde{w}' \sin \varphi_0 + \tilde{\varphi} w'_0 \cos \varphi_0) \rho_1)' + \dots; \\
 I_\rho \ddot{\tilde{\psi}} + K(\tilde{\psi} - \tilde{w}') - (EI \tilde{\psi}')' &= -I_\rho v; \\
 \tilde{w}|_{x=0} = \tilde{\psi}|_{x=0} &= 0;
 \end{aligned}$$

$$\left(\frac{K}{m} (\tilde{w}' - \tilde{\psi}') + \ddot{\tilde{w}} - g(\sin \varphi_0 + w'_0 \cos \varphi_0) \tilde{\varphi} - g \tilde{w}' \sin \varphi_0 + \dots \right) \Big|_{x=l} = -lv;$$

$$\left(EI \tilde{\psi}' + J_c \ddot{\tilde{\psi}} \right) \Big|_{x=l} = -J_c v, \quad (30)$$

де

$$v = \left(J_0 + \int_0^l [(w_0)^2 \rho - (w'_0)^2 \rho_2] dx + m w_0^2(l) \right)^{-1} \times$$

$$\times \left\{ \tilde{M} + g \left(\int_0^l [\rho w_0 - \rho_1 w'_0] \cos \varphi_0 - \frac{1}{2} \rho_1 (w'_0)^2 \sin \varphi_0 dx + m w_0(l) \cos \varphi_0 \right) \tilde{\varphi} + \right.$$

$$\left. + g \int_0^l [(w'_0 \cos \varphi_0 - \sin \varphi_0) \rho_1 \tilde{w}' + \rho \tilde{w} \sin \varphi_0] dx + m g \tilde{w}(l, t) - EI \tilde{\psi}'(0, t) \right\} + \dots, \quad (31)$$

символ “...” позначає члени порядку мализни вище першого відносно змінних $\tilde{\varphi}$, $\tilde{w}$, $\tilde{\psi}$ та їх похідних. Для кожного фазового вектору $(\tilde{\varphi}(t), \dot{\tilde{\varphi}}(t), \tilde{w}(\cdot, t), \dot{\tilde{w}}(\cdot, t), \tilde{\psi}(\cdot, t), \dot{\tilde{\psi}}(\cdot, t))$ формула (31) визначає взаємно-однозначне співвідношення між $\tilde{M}$ та v .

У підрозділі 6.3 вивчено властивості власних значень та функцій задачі Штурма – Ліувілля, що виникає при розділенні змінних у лінеаризованій системі збуреного руху. Розглянемо розв’язки системи (30) спеціального вигляду:

$$\tilde{\varphi}(t) \equiv 0, v = 0, \tilde{w}(x, t) = \bar{w}(x) q(t), \tilde{\psi}(x, t) = \bar{\psi}(x) q(t).$$

Підстановка цих співвідношень у (30) призводить до диференціального рівняння $\ddot{q}(t) = -\lambda q(t)$ та наступної задачі Штурма – Ліувілля [16]:

$$\begin{aligned} (K(\bar{\psi} - \bar{w}') + g \rho_1 \bar{w}' \sin \varphi_0)' - \lambda \rho \bar{w} &= 0, \\ K(\bar{\psi} - \bar{w}') - (EI \bar{\psi}')' - \lambda I \rho \bar{\psi} &= 0, x \in (0, l), \\ \bar{w}(0) = 0, \bar{\psi}(0) &= 0, \\ K(\bar{w}'(l) - \bar{\psi}(l)) - m g \bar{w}'(l) \sin \varphi_0 - m \lambda \bar{w}(l) &= 0, \\ EI \bar{\psi}'(l) - \lambda J_c \bar{\psi}(l) &= 0, \end{aligned} \quad (32)$$

де λ – скалярний параметр. У підрозділі 6.3 досліджено питання розподілу власних значень цієї задачі [4, 11].

Для побудови наближених рівнянь руху зафіксуємо ціле число $N \geq 1$ і розглянемо N мінімальних власних значень $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_N$ задачі Штурма – Ліувілля (32) та відповідні власні функції (w_j, ψ_j) для $j=1, 2, \dots, N$. У наближених рівняннях руху функції відносних деформацій в системі (30) замінюються скінченими сумами

$$\tilde{w}(x, t) = \sum_{j=1}^N q_j(t) w_j(x), \tilde{\psi}(x, t) = \sum_{j=1}^N q_j(t) \psi_j(x),$$

де $q_j(t)$ являє собою узагальнену координату, що відповідає моді коливань з індексом j . Підставляючи ці скінчені суми в варіаційну форму граничної задачі (30) та користуючись схемою методу Гальоркіна, в підрозділі 6.4 отримано таку систему звичайних диференціальних рівнянь відносно $\tilde{\varphi}, q_1, q_2, \dots, q_N$ [16]:

$$\begin{aligned} \dot{z}_1 &= A_{11} z_1 + A_{12} z_2 + B_1 u + R_1(z, u), \\ \dot{z}_2 &= A_{21} z_1 + A_{22} z_2 + B_2 u + R_2(z, u), \end{aligned} \quad (33)$$

де $z = (z_1^T, z_2^T)^T \in R^{2N+2}$ – фазовий вектор, $u \in R$ – керування,

$$z_1 = (\tilde{\varphi}, \dot{\tilde{\varphi}})^T, z_2 = (q_1, \dot{q}_1, q_2, \dot{q}_2, \dots, q_N, \dot{q}_N)^T, u = \frac{\tilde{M}}{J_0 + \int_0^l (w_0^2 \rho - w_0'^2 \rho_2) dx + m w_0^2(l)},$$

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ d_0 & 0 \end{pmatrix}, A_{12} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ d_1 & 0 & d_2 & 0 & \dots & d_N & 0 \end{pmatrix}, B_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, B_2 = (0, -b_1, \dots, 0, -b_N)^T,$$

$$A_{21} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a_1 - b_1 d_0 & 0 \\ 0 & 0 \\ a_2 - b_2 d_0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \\ a_N - b_N d_0 & 0 \end{pmatrix}, A_{22} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -\lambda_1 - b_1 d_1 & 0 & -b_1 d_2 & 0 & \dots & -b_1 d_N & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ -b_2 d_1 & 0 & -\lambda_2 - b_2 d_2 & 0 & \dots & -b_2 d_N & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -b_N d_1 & 0 & -b_N d_2 & 0 & \dots & -\lambda_N - b_N d_N & 0 \end{pmatrix},$$

вирази для коефіцієнтів матриць наведено в тексті дисертації. Нелінійний член $R(z, u) = (R_1^T, R_2^T)^T$ задовольняє оцінці $\|R(z, u)\| = O(\|z\|^2 + u^2)$ навколо стану рівноваги $z = 0$, $u = 0$.

Система звичайних диференціальних рівнянь з керуванням (33) являє собою скінченновимірну апроксимацію крайової задачі (30) з узагальненими координатами порядку не вище N . У підрозділі 6.5 одержано умови локальної керованості та стабілізованості цієї системи [4].

Теорема 6.1. Система (33) є локально керованою в околі нуля, якщо всі λ_j різні та $a_j + \lambda_j b_j \neq 0$ для всіх $j=1, 2, \dots, N$.

Теорема 6.2. Припустимо що всі власні значення $(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ задачі (32) некрратні, а також $\lambda_j > 0$, $a_j + \lambda_j b_j \neq 0$ для всіх $j=1, 2, \dots, N$. Тоді існує керування зі зворотним зв'язком $u = Kz$, що забезпечує асимптотичну стійкість тривіального розв'язку системи (33). Вказане керування задано формулами

$$K = (K_1, K_2), K_1 = \begin{pmatrix} h_1 + \sum_{j=1}^N a_j (b_j + a_j / \lambda_j) \\ -d_0 - \frac{h_1 + \sum_{j=1}^N a_j (b_j + a_j / \lambda_j)}{h_2}, -\frac{h_0}{h_2} \end{pmatrix}, \quad (34)$$

$$K_2 = \left(-d_1 + \frac{a_1 + \lambda_1 b_1}{h_2}, 0, -d_2 + \frac{a_2 + \lambda_2 b_2}{h_2}, 0, \dots, -d_N + \frac{a_N + \lambda_N b_N}{h_2}, 0 \right),$$

де h_0, h_1, h_2 – довільні додатні константи.

Для практичної реалізації стабілізуючого керування $u = Kz$ з теореми 6.2 необхідно мати можливість вимірювати значення фазового вектору $z(t)$ системи (33) в будь-який момент часу $t \geq 0$. Для існуючих маніпуляторів з гнучкими ланками немає можливості безпосередніх вимірів функцій $w(x, t)$ та $\psi(x, t)$ у реальному часі при всіх x . Замість цього, існує інформація про виміри датчиків напружень, що розташовані у фіксованій точці $x = l_0$, $0 \leq l_0 \leq l$. Використовуючи ці виміри, можна вважати, що наявна вихідна інформація про стан системи обмежується такими вихідними функціями:

$$y_1(t) = \tilde{\varphi}(t), y_2(t) = l^2 \tilde{\psi}'(x, t) \Big|_{x=l_0} = \sum_{j=1}^N \chi_j q_j(t),$$

де $\chi_j = l^2 \psi_j'(l_0)$. У векторних позначеннях ці функції мають наступний вигляд:

$$y_1 = C_1 z_1, y_2 = C_2 z_2, \quad C_1 = (1, 0), \quad C_2 = (\chi_1, 0, \chi_2, 0, \dots, \chi_N, 0). \quad (35)$$

У підрозділі 6.6 досліджено умови спостережуваності та синтезу динамічного спостерігача відносно функцій (35). Отримані в дисертації результати для загального випадку $l_0 \in [0, l]$ суттєво розвивають напрямок попередніх досліджень¹, у яких було розглянуто лише випадок $l_0 = 0$ для балки Ейлера – Бернуллі.

Теорема 6.3. [7] Система (33) є локально спостережуваною (в околі точки $z = 0$) відносно виходу (35), якщо виконано нерівність:

$$\begin{vmatrix} \pi_{11} & \pi_{12} & \dots & \pi_{1N} \\ \pi_{21} & \pi_{22} & \dots & \pi_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \pi_{N1} & \pi_{N2} & \dots & \pi_{NN} \end{vmatrix} \neq 0, \quad (36)$$

де

$$\pi_{1,j} = \chi_j, \pi_{k,j} = -\lambda_j \pi_{k-1,j} - d_j \sum_{i=1}^N \pi_{k-1,i} b_i, \quad j = \overline{1, N}, k = \overline{2, N}.$$

Зокрема, умова (36) еквівалентна нерівності $\chi_1 \neq 1$ при $N=1$, або нерівності

$$\chi_1 \chi_2 (\lambda_1 - \lambda_2 + b_1 d_1 - b_2 d_2) + b_2 \chi_2^2 d_1 - b_1 \chi_1^2 d_2 \neq 0$$

при $N=2$.

При виконанні умов спостережуваності одержано результат про стабілізацію стану рівноваги зі спостерігачем типу Луенбергера.

Теорема 6.4. [10] Нехай для системи (33), (35) виконано умову спостережуваності (36), всі λ_j додатні та різні, $a_j + \lambda_j b_j \neq 0$, $b_j d_j > 0$ для всіх $j = \overline{1, N}$. Тоді розв'язок $z = 0$, $\bar{z} = 0$ розширеної системи (33), (35), та

$$\begin{aligned} \dot{\bar{z}}_1 &= (A_{11} - F_1 C_1) \bar{z}_1 + A_{12} \bar{z}_2 + F_1 y_1 + B_1 u, \\ \dot{\bar{z}}_2 &= (A_{22} - F_{22} C_2) \bar{z}_2 + F_{21} y_1 + F_{22} y_2 + B_2 u \end{aligned}$$

є асимптотично стійким при використанні керування зі зворотним зв'язком $u = K \bar{z}$, де $y_1 = C_1 z_1, y_2 = C_2 z_2$, коефіцієнти K задані формулою (34),

$$\begin{aligned} F_1 &= (\phi_1, d_0 + \phi_2)^T, F_{21} = (0, a_1 - b_1 d_0, 0, a_2 - b_2 d_0, \dots, 0, a_N - b_N d_0)^T, \\ F_{22} &= (f_1, 0, f_2, 0, \dots, f_N, 0)^T, (f_1, f_2, \dots, f_N)^T = \gamma Q^{-1} (\chi_1, \chi_2, \dots, \chi_N)^T, \end{aligned}$$

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{\lambda_1 d_1}{b_1} + d_1^2 & d_1 d_2 & \dots & d_1 d_N \\ d_2 d_1 & \frac{\lambda_2 d_2}{b_2} + d_2^2 & \dots & d_2 d_N \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ d_N d_1 & d_N d_2 & \dots & \frac{\lambda_N d_N}{b_N} + d_N^2 \end{pmatrix},$$

де $h_0, h_1, h_2, \phi_1, \phi_2, \gamma$ - довільні додатні константи.

¹ Luo Z.-H. Further Theoretical Results on Direct Strain Feedback Control of Flexible Robot Arms / Z.H. Luo, B.-Z. Guo // IEEE Trans. on Autom. Control. – 1995. – Vol. 40, No. 4. – P. 747–751.

У підрозділі 6.8 також наведено результат комп'ютерного обчислення розв'язків системи (33) при використанні запропонованого керування зі зворотним зв'язком для випадку $N=2$ [10].

У цьому розділі розглянуто задачу стабілізації для системи нелінійних диференціальних рівнянь наступного вигляду [6, 31, 32]:

$$\dot{x} = f(x, u), x \in X \subseteq R^n, u \in U \subseteq R^m, \quad (37)$$

де x – фазовий вектор, u – керування. Будемо вважати, що f – гладка функція, X – відкрита множина, $0 \in X$, та $f(0, u_0) = 0$ при деякому $u_0 \in U$. Введемо гамільтоніан системи (37) формулою $h(p, x, u) = (p, f(x, u))$, що описує швидкість системи вздовж напрямку p в залежності від керування u . Припустимо, що для загальних фіксованих p , x функція $h(p, x, u)$ має дві критичних точки $u = u_1(p, x)$ та $u = u_2(p, x)$. Тоді для системи (37) визначимо критичні гамільтоніани $H_1(p, x) = h(p, x, u_1(p, x))$, $H_2(p, x) = h(p, x, u_2(p, x))$ та символи

$$S_1(p, x) = H_1(p, x) + H_2(p, x), \quad S_2(p, x) = H_1^2(p, x) + H_2^2(p, x).$$

Такі символи були введені в роботах В. Jakubczyk¹ для опису інваріантів нелінійної системи відносно перетворень зі зворотним зв'язком. У підрозділах 7.1 – 7.2 символи використано для зображення умов стабілізованості системи (37). Будемо казати, що система (37) стабілізована, якщо існує керування зі зворотним зв'язком $u = k(x)$, $k(0) = u_0$, $k \in C(X \setminus \{0\})$, яке забезпечує асимптотичну стійкість розв'язку $x=0$ системи $\dot{x} = f(x, k(x))$. Поставимо у відповідність елементу $x \in X$ множину

$$K(x) = \{p \mid S_2(p, x) > S_1^2(p, x) \text{ або } (S_1(p, x) < 0, 2S_2(p, x) \geq S_1^2(p, x))\}.$$

Позначимо, відповідно, за B_ε та S_ε відкриту кулю та сферу радіуса $\varepsilon > 0$ з центром в точці $x=0$.

Теорема 7.1. [6] Припустимо, що система (37) має два символи $S_1(p, x)$ та $S_2(p, x)$ при всіх $x \in X \setminus \{0\}$. Якщо система (37) стабілізована, то для кожного достатньо малого $\varepsilon > 0$ існує гладка функція $p(x) = (p_1(x), p_2(x), \dots, p_n(x)) \in K(x)$, що визначена при $x \in S_\varepsilon$ і задовольняє такі умови:

$$(C1) \quad \deg_{S_\varepsilon} p = 1;$$

$$(C2) \quad \text{для будь-якої замкненої регулярної кривої } \gamma \subset S_\varepsilon \text{ виконано}$$

$$\oint_{\gamma} p_1(x) dx_1 + p_2(x) dx_2 + \dots + p_n(x) dx_n = 0;$$

$$(C3) \quad p(x) \text{ має таке гладке продовження } \tilde{p}(x) \text{ на } \bar{B}_\varepsilon, \text{ що}$$

$$\frac{\partial \tilde{p}_i(x)}{\partial x_j} \equiv \frac{\partial \tilde{p}_j(x)}{\partial x_i}, \quad \forall i, j \in \{1, 2, \dots, n\};$$

$$(C4) \quad \text{вказане } \tilde{p}(x) \text{ породжує позитивно - визначену функцію } V(x) \text{ у } B_\varepsilon,$$

$$V(x) = \int_0^{x_1} \tilde{p}_1(\lambda, 0, \dots, 0) d\lambda + \int_0^{x_2} \tilde{p}_2(x_1, \lambda, \dots, 0) d\lambda + \dots + \int_0^{x_n} \tilde{p}_n(x_1, x_2, \dots, \lambda) d\lambda.$$

¹ Jakubczyk B. *Critical Hamiltonians and Feedback Invariants* / B. Jakubczyk // *Geometry of Feedback and Optimal Control*: (B. Jakubczyk, W. Respondek eds.) – New York: Marcel Dekker, 1998. – P. 219–256.

З іншого боку, якщо система (37) афінна за керуванням, U – опукла множина, існує функція $\tilde{p} \in C^1(\bar{B})$, що задовольняє умови (C3) і (C4) у деякому околі нуля B , та $\tilde{p}(x) \in K(x)$ при всіх $x \in B \setminus \{0\}$, то система (37) стабілізовна. При цьому звуження $\tilde{p}(x)$ на S_ε задовольняє умовам (C1) та (C2) при кожному $\varepsilon: 0 < \varepsilon < \inf_{x \in \partial B} \|x\|$.

В умові (C1) $\deg_{S_\varepsilon} p$ позначає ступінь відображення $p(x)$ на ε -сфері.

Теорему 7.1 використано в підрозділі 7.3 для знаходження умов стабілізованості керованої системи, що визначається двовимірними однорідними векторними полями на комплексній площині:

$$\dot{z} = f_0 z^s + u g_0 z^q, \quad z \in C, u \in [-1, 1], \quad (38)$$

де $z = x_1 + ix_2$ – фазовий вектор ($x_1, x_2 \in R, i^2 = -1$), u – керування, f_0 та g_0 – ненульові комплексні константи, s та q – натуральні числа. Позначимо $\varphi_0 = \arg f_0$, $\gamma_0 = \arg g_0$.

Теорема 7.2. [6] Система (38) стабілізовна при виконанні будь-якої з умов (S1)-(S5):

$$(S1) \quad q=s=1, \quad |g_0 \cos \gamma_0| > |f_0| \cos \varphi_0;$$

$$(S2) \quad s > q=1, \quad \gamma_0 \neq \frac{\pi}{2} \pmod{\pi};$$

$$(S3) \quad q > s=1, \quad \cos \varphi_0 < 0;$$

$$(S4) \quad q > 1, \quad s \geq 2q-1, \quad k_0 = \frac{s-1}{q-1} - \text{парне ціле}, \quad (-1)^{k_0/2} \cos(\varphi_0 - k_0 \gamma_0) < 0;$$

$$(S5) \quad q=3, \quad s \geq 7, \quad k_0 = \frac{s-1}{2} - \text{непарне ціле}, \quad \varphi_0 - k_0 \gamma_0 \neq \frac{\pi}{2} \pmod{\pi},$$

$$k_0 > 3 \quad \text{або} \quad |\sin(\varphi_0 - k_0 \gamma_0)| < \sin\left(\frac{k_0-1}{6}\pi\right).$$

Система (38) нестабілізовна, якщо виконано будь-яку з умов (N1)-(N3):

$$(N1) \quad q=s=1, \quad |g_0 \cos \gamma_0| < |f_0| \cos \varphi_0;$$

$$(N2) \quad q > s=1, \quad \cos \varphi_0 > 0;$$

$$(N3) \quad 2q-1 > s > 1.$$

ВИСНОВКИ

У дисертаційній роботі розв'язано проблему стабілізації руху моделей керованих механічних систем з урахуванням нескінченного спектра пружних коливань. Розвинуті в роботі методи дозволили отримати функції керування в явному вигляді для задач часткової стабілізації, сильної стабілізації, наближеної керованості. Одержано такі нові наукові результати.

1. Вперше отримано достатні умови часткової асимптотичної стійкості динамічної системи з багатозначними розв'язками на метричному просторі. Для динамічної системи, що визначається нелінійним автономним диференціальним рівнянням у банаховому просторі, доведено узагальнення теореми Барбашина – Красовського про асимптотичну стійкість по відношенню до неперервного функціонала.

2. Прямий метод Ляпунова вперше використано для зображення умов відносної компактності напівтраєкторій нелінійної системи в банаховому просторі. Отримано нові достатні умови відносної компактності напівтраєкторій для диференціального рівняння з нелінійною та немонотонною правою частиною. Цей результат застосовано при синтезі функціоналів керування зі зворотним зв'язком для рівнянь руху механічних систем з пружними елементами.
3. Досліджено нескінчену систему звичайних диференціальних рівнянь, що описують рух механічної системи у вигляді твердого тіла з довільним числом пружних балок Ейлера – Бернуллі. Така система моделює плоский обертальний рух супутника з пружними антенами. Якщо всі балки мають однакові механічні параметри, то стан рівноваги досліджуваної системи не є асимптотично стійким. За таких умов розв'язано задачу часткової стабілізації, тобто стабілізації тіла-носія з одночасним гасінням “усереднених” модальних координат, що відповідають коливанням стержнів. Для балок з нерезонансними параметрами доведено наближену керованість системи в гільбертовому просторі та запропоновано функціонал керування, що забезпечує сильну асимптотичну стійкість стану рівноваги. Наведено результати чисельного інтегрування рівнянь руху при застосуванні керування, що відповідає першим п'яти модам пружних коливань механічної системи з двома балками. Ці результати підтверджують придатність одержаного керування для задачі стабілізації навіть за умов великих початкових збурень кута орієнтації твердого тіла.
4. За допомогою варіаційного принципу Гамільтона – Остроградського виведено диференціальні рівняння просторового руху керованого робота-маніпулятора, що складається з твердих тіл та пружних ланок. Розглянуто випадок телескопічного зсуву ланок під впливом керуючих сил, а також модель гнучкого маніпулятора, у якого сусідні ланки зв'язані шарнірами. Такі шарніри реалізують пружні моменти, що спрямовані на сполучення центральних ліній ланок. Окремо розглянуто моделі балок Ейлера – Бернуллі та Тимошенка для опису деформацій ланок маніпулятора.
5. Для маніпулятора з однією гнучкою ланкою у вигляді балки Ейлера – Бернуллі запропоновано редукцію лінеаризованих рівнянь руху з частинними похідними до системи двох диференціальних рівнянь у гільбертовому просторі, що відповідають коливанням системи у горизонтальному і вертикальному напрямках. Для кожного з цих рівнянь запропоновано керування зі зворотним зв'язком, що забезпечує стійкість за Ляпуновим відповідного стану рівноваги. Доведено сильну асимптотичну стійкість підсистеми зі зворотним зв'язком, що відповідає коливанням у вертикальній площині.
6. Запропоновано явну схему зведення скінченновимірної моделі механічної системи з пружною балкою до стандартної канонічної форми (форми Бруновського). Таке зведення дозволило конструктивно визначити керування, що переводить систему з будь-якого початкового стану до наперед заданого при довільній кількості узагальнених координат N . Цей результат є остаточним, оскільки доведено, що нелінійне збурювання розглянутої моделі не зводиться до такої канонічної форми. Одержано оцінку розв'язків нескінченновимірної системи

при використанні оптимального керування, що відповідає підсистемі зі скінченим числом узагальнених координат. Доведено, що запропоноване сімейство керувань дозволяє розв'язати задачу наближеної керованості нескінченновимірної моделі коливань твердого тіла з пружною балкою Ейлера – Бернуллі.

7. Для моделей маніпулятора у вигляді балок Ейлера – Бернуллі та Тимошенка побудовано наближені за Гальоркіним системи звичайних диференціальних рівнянь. Параметри наближених систем визначаються в термінах власних значень та власних функції відповідної задачі Штурма – Ліувілля. Вперше здійснено повний аналіз асимптотичного розподілу власних значень для довільних параметрів однорідної балки Тимошенка, що з'єднана з твердим тілом. Цей результат може бути застосовано для оцінки невідомих механічних параметрів системи за наявною інформацією про власні частоти коливань.
8. Отримано умови локальної керованості для систем Гальоркіна в околі стану рівноваги. Доведено стабілізованість стану рівноваги і запропоновано явну схему синтезу керування зі зворотним зв'язком. Отримано умови спостережуваності системи щодо вихідного сигналу у вигляді кута нахилу та компоненти тензора напруження в фіксованій точці балки. Для моделі балки Тимошенка запропоновано схему стабілізації положення рівноваги моделі за допомогою зворотного зв'язку за станом системи-спостерігача. Доведено, що такий підхід забезпечує асимптотичну стійкість незбуреного розв'язку системи Гальоркіна при довільній кількості ступенів волі. Результат чисельного інтегрування рівнянь руху ілюструє ефективність знайденого керування.
9. Вперше запропоновано підхід до дослідження умов стабілізованості нелінійної системи зі застосуванням критичних функцій Гамільтона, що використовуються в принципі максимуму Понтрягіна для знаходження оптимальних за часом керувань. Доведено, що симетричні функції критичних гамільтоніанів (символи) визначають достатні, а також необхідні умови існування обмеженого стабілізуючого керування зі зворотним зв'язком. Цей підхід дозволив одержати нові умови розв'язності задачі стабілізації для нелінійної системи з виродними векторними полями, що розширює можливість опису класів стабілізованих систем у порівнянні з роботами провідних фахівців.

СПИСОК ОПУБЛІКОВАНИХ ПРАЦЬ ЗА ТЕМОЮ ДИСЕРТАЦІЇ

1. Kovalev A.M. *The synthesis of stabilizing control of a rigid body with attached elastic elements* / A.M. Kovalev, A.L. Zuev, V.F. Shcherbak // Journal of Automation and Information Sciences. – 2002. – Vol. 34. – No. 11. – P. 1-10.
2. Зуев А.Л. *Стабилизация модели гибкого многосвязника с пассивными шарнирами* / А.Л.Зуев // Механика твердого тела.– 2004.– Вып. 34.– С. 180–188.
3. Зуев А.Л. *Моделирование пространственного упругого манипулятора с телескопическим движением звеньев* / А.Л. Зуев // Труды Института прикладной математики и механики НАН Украины. – 2005. – Т. 10. – С. 51–58.
4. Зуев А.Л. *Управление упругим манипулятором в рамках модели балки Тимошенко* / А.Л.Зуев // Прикладная механика.– 2005.– Т.41. –№12.– С.107–115.

5. Zuyev A.L. *Partial asymptotic stabilization of nonlinear distributed parameter systems* / A.L. Zuyev // Automatica. – 2005. – Vol. 41. – No. 1. – P. 1–10.
6. Jakubczyk B. *Stabilizability conditions in terms of critical Hamiltonians and symbols* / B. Jakubczyk, A. Zuyev // Systems and Control Letters. – 2005. – Vol. 54. – P. 597–606.
7. Зуев А.Л. *Синтез динамического наблюдателя для модели упругого манипулятора* / А.Л. Зуев // Механика твердого тела. – 2005. – Вып. 35. – С. 217–223.
8. Зуев А.Л. *Управление системой с упругими компонентами в нерезонансном случае* / А.Л. Зуев // Український математичний вісник. – 2006. – Т. 3. – № 1. – С. 89–103.
9. Зуев А.Л. *Частичная асимптотическая устойчивость абстрактных дифференциальных уравнений* / А.Л. Зуев // Український математичний журнал. – 2006. – Т. 58. – № 5. – С. 629–637.
10. Зуев А.Л. *Стабилизация модели манипулятора с наблюдателем в цепи обратной связи* / А.Л. Зуев // Вісник Донецького університету, Сер. А: Природничі науки. – 2006. – Вип. 1 – С. 33–39.
11. Зуев А.Л. *Асимптотические свойства собственных значений в задаче о колебании упругого манипулятора* / А.Л. Зуев // Механика твердого тела. – 2006. – Вып. 36. – С. 114–122.
12. Зуев А.Л. *Управление упругими колебаниями с использованием канонической формы* / А.Л. Зуев // Динамические системы. – 2006. – Вып. 20. – С. 27–34.
13. Зуев А.Л. *О линеаризации управляемой системы с модальными координатами* / А.Л. Зуев // Труды Института прикладной математики и механики НАН Украины. – 2006. – Т. 13. – С. 97–102.
14. Зуев А.Л. *Об относительной компактности траекторий дифференциальных уравнений в банаховом пространстве* / А.Л. Зуев // Доповіді НАН України. – 2007. – № 2. – С. 7–12.
15. Зуев А.Л. *Оптимальное управление в задаче о колебаниях упругой системы* / А.Л. Зуев // Динамические системы. – 2007. – Вып. 22. – С. 37–45.
16. Zuyev A. *Stabilization and observability of a rotating Timoshenko beam model* / A. Zuyev, O. Sawodny // Mathematical Problems in Engineering. – 2007. – Vol. 07. – Id. 57.238. – P. 1–19.
17. Зуев А.Л. *Приближенная управляемость упругой системы с обобщенными координатами* / А.Л. Зуев // Труды Института прикладной математики и механики НАН Украины. – 2007. – Т. 14. – С. 89–96.
18. Зуев А.Л. *Об условиях приближенной управляемости в классе управлений специального вида* / А.Л. Зуев // Вісник Донецького університету, Сер. А: Природничі науки. – 2007. – Вип. 1. – С. 41–45.
19. Зуев О.Л. *Стабілізація просторових коливань моделі пружної системи* / О.Л. Зуєв // Вісник Київського університету ім. Т. Шевченка, Серія: фізико-математичні науки. – 2007. – Вип. 3. – С. 74–79.
20. Зуев А.Л. *Асимптотические свойства траекторий в задаче об управляемых колебаниях упругой балки* / А.Л. Зуев // Труды Института прикладной

математики и механики НАН Украины. – 2007. – Т. 15. – С. 70–78.

21. Зуев А.Л. *Локализация предельного множества траекторий уравнения Эйлера – Бернулли с управлением* / А.Л. Зуев // Український математичний журнал. – 2008. – Т. 60. – № 2. – С. 173–182.
22. Zuyev A.L. *Motion planning and partial stabilization of infinite-dimensional systems* / A.L. Zuyev // Proc. 2nd International Workshop on Robot Motion and Control (RoMoCo'01): 18-20 Oct. 2001. – Poznan: Poznan University of Technology, 2001. – P. 129–133.
23. Zuyev A.L. *Partial stabilization of a rigid body with several elastic beams* / A.L. Zuyev // Proc. 15th IFAC World Congress: 21-26 July 2002. – Barcelona: Elsevier, 2002. – Vol. D. – P. 139–144.
24. Zuyev A.L. *Controllability analysis and motion planning of a planar hybrid system* / A.L. Zuyev // Устойчивость, управление и динамика твердого тела (ICSCD'02): 8 Междунар. конф., 3-7 сент. 2002 г.: тезисы докл. – Донецк: ИПММ НАН Украины, 2002. – С. 58.
25. Zuyev A.L. *Strong partial stabilization of infinite dimensional systems with application to flexible manipulators* / A.L. Zuyev // Dynamical System Modeling and Stability Investigation (DSMSI-2003): XI Междунар. конф., 27-30 мая 2003 г.: тезисы докл. – Киев: Киевский национальный университет им. Т.Шевченко, 2003. – С. 385.
26. Zuyev A.L. *Stabilization of a Multi-Link Flexible Manipulator by Torque Control* / A.L. Zuyev // Proc. 48. Internationales Wissenschaftliches Kolloquium: 22-25 Sept. 2003. – Ilmenau: Technische Universität Ilmenau, 2003. – P. 679–684.
27. Zuyev A.L. *Partial asymptotic stability and stabilization of nonlinear abstract differential equations* / A.L. Zuyev // Proc. 42nd IEEE Conference on Decision and Control (CDC 2003): 9-12 Dec. 2003. – Maui (USA). – 2003. – P. 1321–1326.
28. Zuyev A. *On partial stabilization of a system of the Euler – Bernoulli beam equations* / Zuyev A. – Trieste: The Abdus Salam International Centre for Theoretical Physics, 2003. – 22 p. – (Препринт / The Abdus Salam International Centre for Theoretical Physics, Trieste, Italy; IC/2003/150).
29. Zuyev A.L. *Stabilization of a space structure model with flexible beams* / A.L. Zuyev // Человек и Космос: VI Межд. конф., 14-16 апр. 2004 г.: тезисы докл. – Днепропетровск: НЦАОМУ, 2004. – С. 132.
30. Zuyev A.L. *Modeling and Observer-Based Stabilization of a Timoshenko Beam* / A.L. Zuyev // Устойчивость, управление и динамика твердого тела (ICSCD'05): 9 Междунар. конф., 1-6 сент. 2005 г.: тезисы докл. – Донецк: ИПММ НАН Украины, 2005. – С. 67–68.
31. Зуев А.Л. *Теория степени отображения и существование функции Ляпунова в задаче стабилизации* / А.Л. Зуев // Третья междунар. конф. по проблемам управления, 20-22 июня 2006 г.: тезисы докл. Москва: ИПУ РАН, 2006. – Т. 1. – С. 40.
32. Зуев А.Л. *Критические гамильтонианы и управляемые функции Ляпунова в задаче стабилизации* / А.Л.Зуев // Метод функций Ляпунова и его приложения:

- VIII Крымская Междунар. матем. школа, 10-17 сент. 2006 г.: тезисы докл. – Симферополь: Таврический национальный ун-т, 2006. – С. 71.
33. Зуев А.Л. *Управление моделью гибкого манипулятора при неполных измерениях* / А.Л. Зуев // Моделирование, идентификация, синтез систем управления: 9-й Междунар. науч.-техн. конф., 16-23 сент. 2006 г.: тезисы докл. – Донецк: ИПММ НАН Украины, 2006. – С. 34–35.
 34. Зуев А.Л. *Локализация предельного множества и предкомпактность траекторий дифференциальных уравнений в банаховом пространстве* / А.Л. Зуев // Нелинейный динамический анализ - 2007: Междунар. конгресс, 4-8 июня 2007 г.: тезисы докл. – С.-Петербург: С.-Петерб. гос. ун-т, 2007. – С.93.
 35. Зуев А.Л. *Управление моделью гибридной системы с упругими элементами* / А.Л. Зуев // Dynamical System Modelling and Stability Investigation (DSMSI-2007): Междунар. конф., 22-25 мая 2007 г.: тезисы докл. – Киев: Киевский национальный ун-т им. Т. Шевченко, 2007. – С. 293.
 36. Зуев А.Л. *Метод точной линеаризации в оптимальном управлении системой с модальными координатами* / А.Л. Зуев // Классические задачи динамики твердого тела: Междунар. конф., 9-13 июня 2007 г.: тезисы докл. – Донецк: ИПММ НАН Украины, 2007. – С. 31–32.
 37. Зуев А.Л. *Приближенное решение двухточечной задачи управления для класса бесконечномерных систем* / А.Л. Зуев // Автоматика-2007: XIV міжнар. конф., 10-14 вер. 2007 р.: матеріали конф. – Севастополь: СКУАЕтаП, 2007. – Ч. 1. – С. 23–24.
 38. Zuyev A.L. Strong stabilization of a controlled Euler – Bernoulli equation with mixed boundary conditions / A.L. Zuyev // Nonlinear Partial Differential Equations: Междунар. конф., 10-15 сент. 2007 г.: тезисы докл. – Донецк: ИПММ НАН Украины, 2007. – С. 78–79.

АНОТАЦІЇ

Зуєв О.Л. Керування та стабілізація руху нескінченновимірних механічних систем з пружними елементами. – Рукопис.

Дисертація на здобуття наукового ступеня доктора фізико-математичних наук за спеціальністю 01.02.01 – теоретична механіка. – Інститут прикладної математики і механіки НАН України, Донецьк, 2008.

У дисертації розв'язано проблеми стабілізації та керування рухом моделей механічних систем з пружними елементами з нескінченною кількістю ступенів волі. Введено клас узагальнених динамічних систем з багатозначним потоком розв'язків та досліджено умови часткової асимптотичної стійкості цих систем у метричних та банахових просторах. Ці результати застосовано при синтезі функціоналів керування для механічної системи, що складається з твердого тіла та довільної кількості пружних балок Ейлера – Бернуллі. Для скінченномірної моделі системи з пружною балкою запропоновано зведення до стандартної канонічної форми Бруновського. Розв'язано задачу оптимального керування та доведено наближену керованість нескінченновимірної системи. Одержано рівняння руху робота-

маніпулятора з ланками у вигляді балок Ейлера – Бернуллі та Тимошенка. Для маніпулятора з однією ланкою знайдено керування, що забезпечує сильну стабілізацію в нескінченновимірному фазовому просторі. Для рівнянь руху з частинними похідними побудовано наближення за Гальоркіним та розв’язано задачі керованості, стабілізації, спостереження, стабілізації зі спостерігачем. Наведено чисельні результати, що ілюструють ефективність знайдених керувань. Запропоновано новий підхід до стабілізації нелінійної керованої системи, який ґрунтується на використанні критичних функцій Гамільтона.

Ключові слова: стабілізація, стійкість, керування зі зворотним зв’язком, функціонал Ляпунова, маніпулятор з гнучкими ланками, балка Ейлера – Бернуллі, балка Тимошенка, метод Гальоркіна, ступінь відображення, напівгрупа операторів.

Зуев А.Л. Управление и стабилизация движения бесконечномерных механических систем с упругими элементами. – Рукопись.

Диссертация на соискание учёной степени доктора физико-математических наук по специальности 01.02.01 – теоретическая механика. – Институт прикладной математики и механики НАН Украины, Донецк, 2008.

В диссертации решена проблема стабилизации движения моделей управляемых механических систем с учетом бесконечного спектра упругих колебаний. Задачи устойчивости и управления рассмотрены в строгой математической постановке с использованием теории непрерывных полугрупп операторов в банаховых пространствах, прямого метода Ляпунова, методов вариационного исчисления, теории степени отображения.

Впервые получены достаточные условия частичной асимптотической устойчивости динамической системы с многозначным потоком решений на метрическом пространстве. Для динамической системы, определяемой нелинейным автономным дифференциальным уравнением в банаховом пространстве, доказано обобщение теоремы Барбашина – Красовского об асимптотической устойчивости по отношению к непрерывному функционалу. Прямой метод Ляпунова впервые использован для описания условий относительной компактности полутраекторий нелинейной системы в банаховом пространстве. Эти результаты использованы при синтезе функционалов управления с обратной связью.

Исследована модель управляемого вращения спутника с упругими антеннами в виде твердого тела с произвольным числом упругих балок Эйлера – Бернуллі. В случае балок с одинаковыми механическими параметрами решена задача частичной стабилизации положения равновесия. Для системы с нерезонансными параметрами доказана приближенная управляемость в гильбертовом пространстве и построен функционал управления, который обеспечивает сильную асимптотическую устойчивость положения равновесия. Приведены результаты численного интегрирования подсистемы с пятью модами для модели с двумя балками. Предложена явная схема сведения конечномерной модели механической системы с упругой балкой к стандартной канонической форме Бруновского. Такое сведение позволяет конструктивно определить управление, переводящее систему из произвольного начального состояния в наперед заданное конечное, при любом числе обобщенных модальных координат. Получена оценка решений

бесконечномерной системы при использовании оптимального управления, соответствующего подсистеме с конечным числом степеней свободы. Доказано, что предложенное семейство управлений позволяет решить задачу приближенной управляемости для модели колебаний твердого тела с упругой балкой Эйлера – Бернулли.

С использованием вариационного принципа Гамильтона – Остроградского выведены дифференциальные уравнения пространственного движения управляемого робота-манипулятора, состоящего из нескольких упругих звеньев и твердых тел. Для манипулятора с одним звеном в виде балки Эйлера – Бернулли построено управление с обратной связью, обеспечивающее устойчивость по Ляпунову положения равновесия. Для манипуляторов с балками Эйлера – Бернулли и Тимошенко методом Галеркина построены приближенные математические модели в виде систем обыкновенных дифференциальных уравнений. Параметры таких систем определяются в терминах решений соответствующей задачи Штурма – Лиувилля. Впервые проведено полное исследование асимптотического распределения собственных значений строгими аналитическими методами для модели однородной балки Тимошенко, связанной с твердым телом. Получены условия локальной управляемости для приближенных по Галеркину систем в окрестности положения равновесия, доказана стабилизируемость и предложена явная схема синтеза управлений с обратной связью, в том числе при неполных измерениях. Получены условия наблюдаемости системы по измерениям угла наклона и показаниям датчика деформаций в фиксированной точке балки. Результаты вычислений иллюстрируют эффективность предложенного управления.

Предложен новый подход к исследованию условий стабилизируемости нелинейной управляемой системы с использованием критических гамильтонианов. Получены условия стабилизируемости аффинной по управлению нелинейной системы, которая определяется двумя однородными векторными полями.

Ключевые слова: стабилизация, устойчивость, управление с обратной связью, функционал Ляпунова, манипулятор с гибкими звеньями, балка Эйлера – Бернулли, балка Тимошенко, метод Галеркина, степень отображения, полугруппа операторов.

Zuyev A.L. Motion control and stabilization of infinite dimensional mechanical systems with elastic elements. – Manuscript.

Thesis for a doctor's degree (physical and mathematical sciences) by speciality 01.02.01 – theoretical mechanics. – Institute of Applied Mathematics and Mechanics of National Academy of Sciences of Ukraine, Donetsk, 2008.

In the thesis, stabilization and control problems are solved for models of mechanical systems with elastic elements having infinite number of degrees of freedom. A class of generalized dynamical systems with the multi-valued solutions flow is introduced, and conditions of partial asymptotic stability are investigated for these systems in Banach and metric spaces. These results are applied for the synthesis of control functionals of a mechanical system consisting of a rigid body and an arbitrary number of the Euler – Bernoulli beams. The reduction scheme of a finite dimensional model of a system with elastic beam to the standard Brunovsky canonical form is proposed. An optimal control problem is solved, and the approximate controllability of the infinite dimensional system

is established. The motion equations are derived for a manipulating robot with links represented by the Euler – Bernoulli and Timoshenko beams. For a single-link manipulator, a feedback control is found that ensures strong stabilization in an infinite dimensional state space. For the partial differential equations of motion, approximate Galerkin systems are constructed, and the problems of controllability, stabilization, observability and observer-based stabilization are solved. Numerical results are presented to illustrate the efficiency of the control laws proposed. A new approach for the stabilization of nonlinear control systems is proposed, based on the application of the critical Hamiltonians.

Key words: stabilization, stability, feedback control, Lyapunov functional, flexible link manipulator, Euler – Bernoulli beam, Timoshenko beam, Galerkin's method, degree of a mapping, semigroup of operators.